Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

fortgeführt von

C. W. Borchardt, K. Weierstrass, L. Kronecker,
L. Fuchs, K. Hensel, L. Schlesinger

gegenwärtig herausgegeben von

Helmut Hasse und **Hans Rohrbach**

unter Mitwirkung von

W. Brödel, M. Deuring, O. Haupt,
G. Köthe, W. Schmeidler

Band 190

In 4 Heften

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin 1952

Archiv-Nr. 180 352
Satz von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35
Druck von Buchkunst, Berlin W 35
Printed in Germany

Inhaltsverzeichnis des Bandes 190

Seite

Bergmann, G., Periodische Ketten linearer Transformationen 108

Gaschütz, Wolfgang, Zur Erweiterungstheorie der endlichen Gruppen 93

Haacke, Wolfhart, Die stabilen Lagen eines ebenen n-fachen Pendels mit vertikal periodisch erschüttertem Aufhängepunkt 51

Jaeger, Arno, Eine algebraische Theorie vertauschbarer Differentiationen für Körper beliebiger Charakteristik 1

Krull, Wolfgang, Über geschlossene Bewertungssysteme 75

Löwig, H. F. J., Bemerkung zu den Primquotienten eines distributiven Verbandes 49

— —, On the properties of freely generated algebras 65

Maak, Wilhelm, Integralmittelwerte von Funktionen auf Gruppen und Halbgruppen 34

Ohmann, D., Eine Abschätzung für die Dicke bei Überdeckung durch konvexe Körper 125

Ringel, Gerhard, Farbensatz für nichtorientierbare Flächen beliebigen Geschlechtes 129

Roquette, Peter, Arithmetische Untersuchung des Charakterringes einer endlichen Gruppe 148

Tietz, Horst, Fabersche Entwicklungen auf geschlossenen Riemannschen Flächen 22

Volkmann, Bodo, Über Klassen von Mengen natürlicher Zahlen 199

Witt, Ernst, Die algebraische Struktur des Gruppenringes einer endlichen Gruppe über einem Zahlkörper 231

Zulauf, Achim, Beweis einer Erweiterung des Satzes von Goldbach-Vinogradov . . 169

Berichtigungen 246

Inhaltsverzeichnis der Bände 181—190 247

Ausgabedaten der Hefte von Bd. 190

Heft 1	ausgegeben	am 24. April 1952
Heft 2	ausgegeben	am 18. Juli 1952
Heft 3/4	ausgegeben	am 22. Dezember 1952

Eine algebraische Theorie vertauschbarer Differentiationen für Körper beliebiger Charakteristik[1].

Von *Arno Jaeger* in Ibadan (Nigeria).

Da in Polynomringen von Primzahlcharakteristik bei Anwendung der klassischen Differentiationstheorie alle p-ten und höheren Ableitungen identisch verschwinden, begründeten H. Hasse[2]), F. K. Schmidt[2]) und M. Deuring[3]) eine modifizierte algebraische Differentiationstheorie, in der — unabhängig von der Charakteristik — nichttriviale Ableitungen beliebig hoher Ordnung definiert werden können.

Im folgenden wird die entsprechende Theorie für partielle Differentiationen aufgestellt. Die verwandte Symbolik ist eine Verallgemeinerung der entsprechenden bei Deuring im Falle einfacher Differentiationen, so daß die dort vorkommenden Definitionen und Sätze hier enthalten sind, wenn die Dimension $n = 1$ gesetzt wird. Die weiterhin entwickelte Modul- und Expansionstheorie ist dagegen auch für $n = 1$ neu. Abschließend werden einige Anwendungen auf algebraische Funktionen mehrerer Unbestimmter gezeigt.

§ 1. Einleitung.

Für das Rechnen mit formalen Potenzreihen in n Unbestimmten erweist sich die folgende Vektorsymbolik als zweckmäßig: Es seien

$\mathfrak{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, $\mathfrak{v}, \ldots$ Vektoren mit unabhängigen Unbestimmten als Komponenten,

$\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\mathfrak{b}, \ldots$ Vektoren mit Komponenten aus einem algebraischen Bereich,

$\mathfrak{h} = (h_1, \ldots, h_n)$, $\mathfrak{i}, \ldots$ Vektoren mit (i. a. nichtnegativen) ganzrationalen Zahlen als Komponenten,

sämtlich von der Dimension n, und $s, t, \ldots$ natürliche Zahlen. Dann bezeichne:

(1) $\mathfrak{u}^t = (u_1^t, \ldots, u_n^t)$ den *Vektor*, der aus $\mathfrak{u}$ durch Erheben jeder Komponente in die t-te Potenz entsteht;

(2) $\mathfrak{u}^{p^t} = (u_1^{p^{t_1}}, \ldots, u_n^{p^{t_n}})$ den *Vektor*, der aus $\mathfrak{u}$ durch Erheben der ν-ten Komponente in die p^{t_ν}-te Potenz entsteht;

(3) $\mathfrak{u}_{\mathfrak{m}} = (u_{1\mathfrak{m}}, \ldots, u_{n\mathfrak{m}})$ den *Vektor*, bei dem jede Komponente den Indexvektor $\mathfrak{m}$ hat;

(4) $\mathfrak{u}^{\mathfrak{m}} = \prod_{\nu=1}^{n} u_\nu^{m_\nu}$ den *Skalar*, dessen ν-ter Faktor die m_ν-te Potenz von u_ν ist;

[1]) Verallgemeinerung der gleich betitelten Dissertation des Verfassers (Göttingen 1949).

[2]) Vgl. *H. Hasse*, Theorie der höheren Differentiale in einem algebraischen Funktionenkörper mit vollkommenem Konstantenkörper bei beliebiger Charakteristik, Journal für reine u. angew. Math. **175** (1936). *H. Hasse* und *F. K. Schmidt*, Noch eine Begründung der Theorie der höheren Differentialquotienten in einem algebraischen Funktionenkörper einer Unbestimmten, Journal für reine u. angew. Math. **177** (1937), insbesondere ebenda: *F. K. Schmidt*, Zusatz bei der Korrektur.

[3]) Vgl. das Buch *M. Deuring*, Arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen (noch nicht erschienen). Verf. ist Herrn Prof. *Deuring* für die freundliche Überlassung des Manuskriptes zur Einsichtnahme zu ergebenstem Dank verpflichtet.

(5) $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{n}} = \prod_{\nu=1}^{n} \binom{m_\nu}{n_\nu}$ den *Skalar*, dessen Faktoren Binomialkoeffizienten entsprechender Komponenten sind;

(6) $[\mathfrak{u}\, p^{\mathfrak{t}}] = (u_1 p^{t_1}, \ldots, u_n p^{t_n})$ den *Vektor*, dessen ν-te Komponente das Produkt $u_\nu p^{t_\nu}$ ist;

(7) $\mathfrak{u}\,\mathfrak{v} = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & \cdots & u_1 v_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ u_n v_1 & \cdots & u_n v_n \end{pmatrix}$ diejenige n-reihige quadratische *Matrix*, die in der i-ten Zeile und k-ten Spalte das Glied $u_i v_k$ hat;

(8) $\mathrm{mod}\ \mathfrak{u}$ den von $u_1, \ldots, u_n$ erzeugten *Modul*;

(9) $\bar{\mathfrak{u}} = (u, u, \ldots, u)$ die Löschung aller Indizes im Vektor $\mathfrak{u}$, d. h. die Gleichsetzung aller Komponenten;

(10) $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$ den *Vektor* $(n+m)$*-ter Dimension*, der durch Aneinanderreihen der Komponenten der Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ in der angegebenen Reihenfolge entsteht.

Es möge weiter bedeuten: $\mathfrak{o}$ den *Nullvektor*, $\mathfrak{O}$ die *Nullmatrix*, $\mathfrak{E}$ die *Einheitsmatrix*, $\mathfrak{e}_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ den *k-ten Einheitsvektor*; $\mathfrak{e}$ den Vektor $(1, 1, \ldots, 1)$; $\mathfrak{a} \in R$, daß alle $a_i \in R$; $\mathfrak{m} \to \infty$, daß alle $m_i \to \infty$; $\mathfrak{m} \leqq \mathfrak{n}$, daß alle $m_i \leqq n_i$; $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$, daß $\mathfrak{m} \leqq \mathfrak{n}$, aber $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$ ist.

Es sei nun R ein kommutativer Ring. Unter dem *Ring* $R\{\mathfrak{u}\}$ *der ganzen Potenzreihen in n Unbestimmten* $\mathfrak{u}$ wird dann die Gesamtheit aller formalen Elemente

$$r_{\{\mathfrak{u}\}} = \sum_{\mathfrak{t}=0}^{\infty} \mathfrak{u}^{\mathfrak{t}} r_{\mathfrak{t}}, \quad r_{\mathfrak{t}} \in R \tag{11}$$

verstanden, zwischen denen die Addition, Subtraktion und Multiplikation formal durch

$$\sum_{\mathfrak{t}=0}^{\infty} \mathfrak{u}^{\mathfrak{t}} r_{\mathfrak{t}} \pm \sum_{\mathfrak{t}=0}^{\infty} \mathfrak{u}^{\mathfrak{t}} s_{\mathfrak{t}} = \sum_{\mathfrak{t}=0}^{\infty} \mathfrak{u}^{\mathfrak{t}} (r_{\mathfrak{t}} \pm s_{\mathfrak{t}}),$$

$$\sum_{\mathfrak{t}=0}^{\infty} \mathfrak{u}^{\mathfrak{t}} r_{\mathfrak{t}} \cdot \sum_{\mathfrak{t}=0}^{\infty} \mathfrak{u}^{\mathfrak{t}} s_{\mathfrak{t}} = \sum_{\mathfrak{t}=0}^{\infty} \mathfrak{u}^{\mathfrak{t}} \Big(\sum_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{t}} r_{\mathfrak{a}} s_{\mathfrak{b}} \Big)$$

erklärt wird. Ist R ein Körper, so bezeichne weiterhin $R\{\{\mathfrak{u}\}\}$ *den Quotientenkörper von* $R\{\mathfrak{u}\}$.

Vektoren, deren Komponenten in $R\{\mathfrak{u}\}$ liegen, werden mit

$$\mathfrak{a}_{\{\mathfrak{u}\}} = \sum_{\mathfrak{t}=0}^{\infty} \mathfrak{u}^{\mathfrak{t}} \mathfrak{a}_{\mathfrak{t}} \tag{12}$$

bezeichnet. Haben dagegen bei einem Element von R die Koeffizienten von $\mathfrak{u}^{\mathfrak{t}}$ auch gerade die Gestalt (4), d. h. $\mathfrak{a}^{\mathfrak{t}}$ $(\mathfrak{a} \in R)$, so werde es

$${}_{\mathfrak{a}}\{\mathfrak{u}\} = \sum_{\mathfrak{t}=0}^{\infty} \mathfrak{u}^{\mathfrak{t}} \mathfrak{a}^{\mathfrak{t}} \tag{13}$$

geschrieben. Ist schließlich R ein kommutativer Operatorenring über der Additivgruppe eines Integritätsbereiches $\mathfrak{R}$ und sind z, ${}_{\mathfrak{a}}\{\mathfrak{u}\}$ Elemente aus $\mathfrak{R}$ bzw. $R\{\mathfrak{u}\}$, so bedeute[4])

$$z_{\mathfrak{a}}\{\mathfrak{u}\} = \sum_{\mathfrak{t}=0}^{\infty} \mathfrak{u}^{\mathfrak{t}} (\mathfrak{a}^{\mathfrak{t}} z) \tag{14}$$

ein Element in $\mathfrak{R}\{\mathfrak{u}\}$. Aus ${}_{\mathfrak{a}}\{\mathfrak{u}\} = {}_{\mathfrak{b}}\{\mathfrak{u}\}$ folgt dann $z_{\mathfrak{a}}\{\mathfrak{u}\} = z_{\mathfrak{b}}\{\mathfrak{u}\}$.

Die Gleichheit zweier Potenzreihen $r_{\{\mathfrak{u}\}}, s_{\{\mathfrak{u}\}}$ aus $R\{\mathfrak{u}\}$ bedeutet elementweise Gleichheit der beiden n-fach-Folgen $r_{\mathfrak{m}}, s_{\mathfrak{m}}$ aus R. Hieraus ergibt sich, daß folgende *Ersetzungsprozesse* in Gleichungen zwischen formalen Potenzreihen *erlaubt* sind, d. h. wieder zu Gleichungen führen:

---

[4]) In Anlehnung an *Deurings* Symbolik, l. c. [3]).

1. *Man darf Komponenten von* $\mathfrak{u}$ *gleich Null setzen.*

Denn zwei entsprechende Teil-Vielfachfolgen sind gliedweise gleich, wenn ihre vollen n-fach-Folgen untereinander gliedweise gleich sind.

2. *Man darf Komponenten von* $\mathfrak{u}$ *gleichsetzen.*

Denn dann entstehen zwei neue Vielfachfolgen, bei denen die entsprechenden Elemente aus den ursprünglichen zwei n-fach-Folgen auf gleiche Weise *durch endlich viele Schritte* in den drei Grundrechnungsarten hervorgehen.

3. *Man darf, wenn* $\mathfrak{u}_0 = \mathfrak{o}$ ist, $\mathfrak{u}$ *mit einem Potenzreihenvektor* $\mathfrak{u}_{\{\mathfrak{v}\}} = \sum_{\mathfrak{k}=0}^{\infty} \mathfrak{v}^{\mathfrak{k}} \mathfrak{u}_{\mathfrak{k}}$ *identifizieren, wo die* $\mathfrak{v}$*-Komponenten* m *über* R *unabhängige Unbestimmte mit* $1 \leqq m \leqq n$ *sind.*

Denn aus $r_{\{\mathfrak{u}\}} = s_{\{\mathfrak{u}\}}$ folgt

$$\sum_{\mathfrak{m}=0}^{\infty} \Big(\sum_{\mathfrak{k}>0} \mathfrak{v}^{\mathfrak{k}} \mathfrak{u}_{\mathfrak{k}} \Big)^{\mathfrak{m}} r_{\mathfrak{m}} = \sum_{\mathfrak{m}=0}^{\infty} \Big(\sum_{\mathfrak{k}>0} \mathfrak{v}^{\mathfrak{k}} \mathfrak{u}_{\mathfrak{k}} \Big)^{\mathfrak{m}} s_{\mathfrak{m}} \mod \mathfrak{v}^{\mathfrak{h}} \text{ für festes } \mathfrak{h},$$

weil man auf beiden Seiten der Kongruenz dieselben *endlich vielen Schritte* in den drei Grundrechnungsarten mit denselben Größen aus R auszuführen hat, um die Summen nach $\mathfrak{v}$ umzuordnen; und für $\mathfrak{h} \to \infty$ folgt die Behauptung.

Es seien nun $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ Vektoren unabhängiger Unbestimmter über R. Dann läßt sich durch $r_{\{\mathfrak{u}\}} \to r_{\{\mathfrak{u}+\mathfrak{v}\}}$, also

$$\sum_{\mathfrak{k}=0}^{\infty} \mathfrak{u}^{\mathfrak{k}} r_{\mathfrak{k}} \to \sum_{\mathfrak{k}=0}^{\infty} (\mathfrak{u} + \mathfrak{v})^{\mathfrak{k}} r_{\mathfrak{k}} = \sum_{\mathfrak{k}=0}^{\infty} \mathfrak{v}^{\mathfrak{k}} s_{\mathfrak{k}}, \quad s^{\mathfrak{k}} \in R\{\mathfrak{u}\},$$

der Ring $R\{\mathfrak{u}\}$ isomorph in $R\{\mathfrak{u}, \mathfrak{v}\}$ abbilden. Die Vielfachfolge

$$\{s_{\mathfrak{k}} = \Delta^{\mathfrak{k}}(r_{\{\mathfrak{u}\}})\}, \quad \mathfrak{k} \geqq \mathfrak{o}$$

ist wegen

$$s_{\{\mathfrak{v}\}} = \sum_{\mathfrak{k}=0}^{\infty} (\mathfrak{u} + \mathfrak{v})^{\mathfrak{k}} r_{\mathfrak{k}} = \sum_{\mathfrak{k}=0}^{\infty} \mathfrak{v}^{\mathfrak{k}} \sum_{\mathfrak{l} \geqq \mathfrak{k}} \mathfrak{u}^{\mathfrak{l}-\mathfrak{k}} \binom{\mathfrak{l}}{\mathfrak{k}} r_{\mathfrak{l}}$$

durch

$$\Delta^{\mathfrak{k}}(r_{\{\mathfrak{u}\}}) = \sum_{\mathfrak{l} \geqq \mathfrak{k}} \binom{\mathfrak{l}}{\mathfrak{k}} \mathfrak{u}^{\mathfrak{l}-\mathfrak{k}} r_{\mathfrak{l}} \tag{15}$$

eindeutig bestimmt. Hierbei soll Δ, für sich alleinstehend, einen formalen Vektor $(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ darstellen und ein Symbol für den Abbildungsprozeß sein. Man sieht sofort:

$$\Delta^{\mathfrak{o}}(r_{\{\mathfrak{u}\}}) = r_{\{\mathfrak{u}\}}.$$

Aus (15) folgt durch Iteration

$$\Delta^{\mathfrak{i}} \Delta^{\mathfrak{k}}(r_{\{\mathfrak{u}\}}) = \sum_{\mathfrak{l} \geqq \mathfrak{i}+\mathfrak{k}} \mathfrak{u}^{\mathfrak{l}-\mathfrak{i}-\mathfrak{k}} \binom{\mathfrak{l}}{\mathfrak{k}} \binom{\mathfrak{l}-\mathfrak{k}}{\mathfrak{i}} r_{\mathfrak{l}},$$

und daher ergibt sich wegen der auch bei Charakteristik p gültigen Binomialrelation $\binom{\mathfrak{l}}{\mathfrak{k}}\binom{\mathfrak{l}-\mathfrak{k}}{\mathfrak{i}} = \binom{\mathfrak{l}}{\mathfrak{i}+\mathfrak{k}}\binom{\mathfrak{i}+\mathfrak{k}}{\mathfrak{i}}$ die *Iterationsregel*

$$\Delta^{\mathfrak{i}} \Delta^{\mathfrak{k}}(r_{\{\mathfrak{u}\}}) = \binom{\mathfrak{i}+\mathfrak{k}}{\mathfrak{i}} \Delta^{\mathfrak{i}+\mathfrak{k}}(r_{\{\mathfrak{u}\}}), \tag{16}$$

die speziell $\Delta^{\mathfrak{i}} \Delta^{\mathfrak{k}} = \Delta^{\mathfrak{k}} \Delta^{\mathfrak{i}}$ enthält. Unter Verwendung von (10) und (14) ist (16) mit

$$r_{\{\mathfrak{u}\}_{(\Delta, \Delta)}}\{\mathfrak{v}, \mathfrak{w}\} = r_{\{\mathfrak{u}\}_{\Delta}}\{\mathfrak{v} + \mathfrak{w}\} \tag{17}$$

gleichwertig, wenn die $(\mathfrak{v}, \mathfrak{w})$-Komponenten $2n$ über $R\{\mathfrak{u}\}$ unabhängige Unbestimmte sind.

In Anlehnung an die Bewertungstheorie heiße schließlich ein n-Tupel $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_{\{\mathfrak{u}\}} \in K\{\mathfrak{u}\}$ (K Körper) *prim*, wenn $K\{\mathfrak{v}\} = K\{\mathfrak{u}\}$ gilt. Die n Gleichungen

$$\mathfrak{v} = \sum_{\mathfrak{k}=0}^{\infty} \mathfrak{u}^{\mathfrak{k}} \mathfrak{v}_{\mathfrak{k}}$$

lassen sich aber genau dann nach $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_{\{\mathfrak{v}\}}$ umkehren, wenn die Determinante der Matrix $(v_{i\varepsilon_k})$ nicht verschwindet. D. h. $\mathfrak{v}$ ist genau dann prim in $K\{\mathfrak{u}\}$, wenn $\| \Delta \mathfrak{v} \| \not\equiv 0 \mod \mathfrak{u}$ ist.

§ 2. Die Multidifferentiationen.

Es sei nun $R\{\mathfrak{u}\}$ der Potenzreihenring in n unabhängigen Unbestimmten $\mathfrak{u}$ über einem Integritätsbereich R. Jede isomorphe Abbildung $z \to z_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\}$ der Elemente z aus R auf einen Teilring $R_{\mathfrak{u}}$ von $R\{\mathfrak{u}\}$ definiert für jedes z eine Vielfachfolge von Elementen

$$\mathfrak{D}^{\mathfrak{o}} z = z, \quad \mathfrak{D}^{\mathfrak{n}} z \qquad (\mathfrak{n} > \mathfrak{o}). \tag{18}$$

$\mathfrak{D}$ heißt eine *Multidifferentiation n-ter Dimension in R*, wenn bei dieser Abbildung Δ das Bild von $\mathfrak{D}$ wird, d. h.

$$(\mathfrak{D}^{\mathfrak{n}} z)_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\} = \Delta^{\mathfrak{n}}(z_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\}) \tag{19}$$

gilt. Mit der Vielfachfolge (18) sind dann simultan alle Ableitungen nach $\mathfrak{D}$ von z definiert. $z_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\}$ heiße in Anlehnung an die klassische Theorie auch die $\mathfrak{D}$-*Taylorreihe nach* $\mathfrak{u}$.

Sind $\mathfrak{v}$ weitere n unabhängige Unbestimmte über $R\{\mathfrak{u}\}$, so erfüllt $\mathfrak{D}$ wegen der Isomorphiebedingung und als Urbild von Δ wegen (17) die Bedingungen ($x, y \in R$):

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\quad x_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\} + y_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\} = (x+y)_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\} && \text{oder}\quad \mathfrak{D}^{\mathfrak{m}} x + \mathfrak{D}^{\mathfrak{m}} y = \mathfrak{D}^{\mathfrak{m}}(x+y);\\
&\text{b)}\quad x_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\} \cdot y_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\} = (x \cdot y)_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\} && \text{oder}\quad \sum_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{m}} \mathfrak{D}^{\mathfrak{a}} x \cdot \mathfrak{D}^{\mathfrak{b}} y = \mathfrak{D}^{\mathfrak{m}}(xy);\\
&\text{c)}\quad x_{(\mathfrak{D},\mathfrak{D})}\{\mathfrak{u}, \mathfrak{v}\} = x_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}+\mathfrak{v}\} && \text{oder}\quad \mathfrak{D}^{\mathfrak{a}}\mathfrak{D}^{\mathfrak{b}} x = \binom{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} \mathfrak{D}^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}} x.
\end{aligned} \tag{20}$$

Ist $\{\mathfrak{D}\}$ der Ring, erzeugt von den Operatoren $\mathfrak{D}^{\mathfrak{m}}$ bei festem $\mathfrak{D}$ und variablem $\mathfrak{m} \geqq \mathfrak{o}$, so gilt im Potenzreihenring $\{\mathfrak{D}\}\{\mathfrak{u}\}$ für das spezielle Element ${}_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\}$ nach Definition von Δ:

$${}_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\}\,{}_{\Delta}\{\mathfrak{v}\} = {}_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}+\mathfrak{v}\}. \tag{21}$$

Damit wird erst recht $y_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\}\,{}_{\Delta}\{\mathfrak{v}\} = y_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}+\mathfrak{v}\}$; also zeigen sich (19) und (20c) als äquivalent, und Δ erweist sich als eine Multidifferentiation.

Eine Multidifferentiation erster Dimension wird einfach *Differentiation*[5]) genannt und wegen ihres gewissermaßen skalaren Charakters mit großen lateinischen Buchstaben, also z. B. mit D, bezeichnet. Diejenigen Elemente c von R, für die $Dc = 0$ ist, mögen *D-konstant* heißen, die übrigen *D-inkonstant*. Bei jenen gilt entweder $c_D\{u\} = c$, dann nennt man sie *D-vollkonstant* oder auch *D-konstant der Ordnung* ∞, oder sie können (bei Charakteristik $p \neq 0$)[3]) auch die Form

$$c_D\{u\} = \sum_{\nu=0}^{\infty} u^{\nu p^t} D^{\nu p^t} c, \quad D^{p^t} c \neq 0$$

besitzen und heißen dann *D-Konstante t-ter Ordnung*. Ist ein Element c D-vollkonstant für alle in R möglichen Differentiationen, so bezeichne man es als *absolut-konstant*. Die D-Konstanten mindestens t-ter Ordnung ($t > 0$), die D-Voll- und die Absolut-Konstanten bilden je einen Ring (sogar Körper, sobald R ein Körper ist). Die Gesamtheit der D-inkonstanten Elemente aus R bildet weder eine additive noch eine multiplikative Gruppe, sie wird als *D-Inkonstanzbereich* bezeichnet.

Setzt man in $z_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\}$ alle Komponenten von $\mathfrak{u}$ bis auf eine gleich Null, so erhält man eine Differentiation. Die n so entstehenden Differentiationen D_ν ($\nu = 1, \ldots, n$) werden *Komponenten von* $\mathfrak{D}$ genannt. Entsprechend kann man auch *Multikomponenten* $(D_{\alpha_1}, \ldots, D_{\alpha_\nu})$ der Dimension ν mit $\nu < n$ aus $\mathfrak{D}$ ableiten.

Wegen dieses Zusammenhanges zwischen Multidifferentiationen und Differentiationen gilt dann für die Elemente $c \in R$, bei denen mindestens ein Element des Vektors $\mathfrak{D}c$ gleich Null ist, entweder $c_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\} = c$ (c heißt dann $\mathfrak{D}$-*vollkonstant*) oder sie können die Form

$$c_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\} = \sum_{\mathfrak{t}=0}^{\infty} \mathfrak{u}^{[\mathfrak{t}p^t]} \mathfrak{D}^{[\mathfrak{t}p^t]} c, \quad \mathfrak{t} > \mathfrak{o}, \quad D_i^{p^{t_i}} c \neq 0 \quad (i = 1, \ldots, n),$$

[5]) Bei *F. K. Schmidt* l. c. [2])) „iterative Differentiation" genannt.

besitzen und werden dann $\mathfrak{D}$-*konstant der Ordnung* t genannt. Das Minimum aller t_ν heiße *Minimalordnung*.

Die $\mathfrak{D}$-Konstanten mindestens t-ter Ordnung ($t > 0$) bilden einen Ring (Körper) $R_{\mathfrak{D}^t}$, die $\mathfrak{D}$-Vollkonstanten und die Absolutkonstanten bilden Ringe (Körper) $R_{\mathfrak{D}^\infty}$ und R_∞.

In $R_{\mathfrak{D}^t}$ ist durch

$$(\varepsilon_{-t}\mathfrak{D})^n y = \mathfrak{D}^{[np^t]} y \tag{22}$$

eine neue Multidifferentiation $\varepsilon_{-t}\mathfrak{D}$ erklärbar; dieser Prozeß heiße t-*fache Reduktion* von $\mathfrak{D}$. Sind nun Elemente von R sämtlich $\mathfrak{D}$-konstant von einer Ordnung $\geqq t$, d. h. ist $R = R_{\mathfrak{D}^t}$, existiert aber ein Element $y \in R$ mit $\mathfrak{D}^{p^t} y \neq 0$, so erweist sich $\varepsilon_{-t}\mathfrak{D}$ als eine Multidifferentiation von R mit inkonstanten Elementen, kurz als *reduziert*. Umgekehrt läßt sich zu jeder Multidifferentiation $\mathfrak{D}$ in R durch

$$(\varepsilon_t\mathfrak{D})^n z = \mathfrak{D}^{[np^t]} z, \quad z_{(\varepsilon_t\mathfrak{D})}\{\mathfrak{u}\} = z_{\mathfrak{D}^{(\mathfrak{u}^t)}} \tag{23}$$

eine neue Multidifferentiation $\varepsilon_t\mathfrak{D}$ in R definieren; dieser Vorgang werde als t-*fache Expansion von* $\mathfrak{D}$ bezeichnet.

Sieht man also von der *trivialen Multidifferentiation* $\mathfrak{O}$ mit $y_{\mathfrak{O}}\{\mathfrak{u}\} = y$ für jedes $y \in R$ ab, so kann man sich zunächst auf die Untersuchung reduzierter Multidifferentiationen beschränken.

§ 3. Fortsetzbarkeit von Multidifferentiationen.

Satz 1. *Eine Multidifferentiation $\mathfrak{D}$ in einem Integritätsbereich R läßt sich in genau einer Weise auf den Quotientenkörper K von R, auf jede separabel algebraische Erweiterung L von K und genau dann eindeutig auf eine transzendente Erweiterung $K(t)$ fortsetzen, sobald man die $\mathfrak{D}^n t$ beliebig in $K(t)$, aber der Iterationsregel* (20c) *genügend, festgelegt hat.*

Man kann sich also auf die Untersuchung von Multidifferentiationen in Körpern beschränken.

Beweis. 1. Die eindeutige Fortsetzbarkeit von $\mathfrak{D}$ auf K läßt sich völlig analog dem eindimensionalen Fall[3]) zeigen.

2. Die Fortsetzung durch $\mathfrak{D}^\mathfrak{r} t = 0$ für alle $\mathfrak{r} \neq 0$ möge *trivial* heißen. Sie ist nicht nur auf $K(t)$, sondern auch auf $K\{t\}$ möglich. Wenn aus $r_{(t)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} t^\nu r_\nu \in K\{t\}$ bei trivialer Fortsetzung von $\mathfrak{D}$ die Taylorreihe $(r_{(t)})_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\}$ gebildet werden soll, so bedeutet dies nichts anderes, als daß simultan die Taylorreihen $r_{\nu_{\mathfrak{D}}}\{\mathfrak{u}\}$ aufzustellen sind:

$$\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} t^\nu r_\nu\right)_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\} = \sum_{\nu=0}^{\infty} t^\nu r_{\nu_{\mathfrak{D}}}\{\mathfrak{u}\}.$$

Triviale Fortsetzungen werden durch Akzente vor dem Symbol $\mathfrak{D}$ markiert, ihre Anzahl gibt an, wie viele der vorangegangenen Unbestimmten trivial differenziert werden sollen, z. B. folgt aus (20) leicht die Gleichung

$$z_{\mathfrak{D}_1}\{\mathfrak{u}\} = z_{D_1}\{u_1\}'_{D_2}\{u_2\} \cdots {}^{(n-1)}_{D_n}\{u_n\}. \tag{24}$$

3. Es soll die Multidifferentiation $\mathfrak{D}$ in K auf die transzendente Erweiterung $K(t)$ fortgesetzt werden. Nach Voraussetzung ist die Taylorreihe $t_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\}$ als ein Element von $K(t)\{\mathfrak{u}\}$ gegeben. Sie kann nicht über $K\{\mathfrak{u}\}$ algebraisch sein. Angenommen nämlich, es existierte eine algebraische Gleichung

$$\sum_{\nu=0}^{m} (t_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\})^\nu a_{\nu\{\mathfrak{u}\}} = 0, \quad a_{\nu\{\mathfrak{u}\}} \in K\{\mathfrak{u}\}$$

für $t_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\}$ mit Koeffizienten aus $K\{\mathfrak{u}\}$. Es sei w_u die Bewertung, die einer Potenzreihe in u den Anfangsexponenten zuordnet. Man wähle i ($1 \leqq i \leqq n$) derart, daß

$$w_u(a_i\{\bar{\mathfrak{u}}\}) = \operatorname*{Min}_{\nu=0,\ldots,n} w_u(a_\nu\{\bar{\mathfrak{u}}\})$$

wird. Dann gilt auch die algebraische Gleichung

$$(25)\qquad \sum_{\nu=0}^{m} (t_{\mathfrak{D}}\{\bar{\mathfrak{u}}\})^{\nu}\, b_{\nu\{\bar{\mathfrak{u}}\}} = 0, \quad b_{\nu\{\mathfrak{u}\}} = \frac{a_{\nu\{\mathfrak{u}\}}}{a_{i\{\mathfrak{u}\}}} \in K\{\{\mathfrak{u}\}\}$$

für $t_{\mathfrak{D}}\{\bar{\mathfrak{u}}\}$, wobei die $b_{\nu\{\bar{\mathfrak{u}}\}}$ wegen der Wahl von i bereits in $K\{u\}$ liegen. Daher ist in (25) die Ersetzung $u = 0$ erlaubt; sie führt, falls $i = 0$ und $b_{\nu\{0\}} = 0$ ist für $\nu \neq 0$, zu dem Widerspruch $1 = 0$ oder sonst zu einer algebraischen Gleichung für t, was der Voraussetzung widerspricht.

Also ist $t_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\}$ über $K\{\mathfrak{u}\}$ transzendent. Daher kann der Isomorphismus $y \to y_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\}$ von K auf $K_{\mathfrak{u}}$ zu einem Isomorphismus von $K(t)$ auf $K_{\mathfrak{u}}(t_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\})$ in $K(t)\{\mathfrak{u}\}$ fortgesetzt werden. Durch die Bedingung $t \to t_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\}$ ist diese Fortsetzung schon eindeutig bestimmt, denn für ein $r(t) \in K(t)$ muß dann

$$(26)\qquad r(t) = \frac{\sum_{\nu=0}^{h} t^{\nu} a_{\nu}}{\sum_{\nu=0}^{k} t^{\nu} b_{\nu}}, \quad r(t)_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\} = \frac{\sum_{\nu=0}^{h} (t_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\})^{\nu}\, a_{\nu\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\}}{\sum_{\nu=0}^{k} (t_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\})^{\nu}\, b_{\nu\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\}}$$

gelten.

Um $r(t)_{(\mathfrak{D},\mathfrak{D})}\{\mathfrak{u}, \mathfrak{v}\} = r(t)_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\}^{(n)}_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{v}\}$ zu bestimmen, greife man sich zunächst ein $(\mathfrak{D}^{\mathfrak{m}} r(t))_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{v}\}$ heraus. $\mathfrak{D}^{\mathfrak{m}} r(t)$ ist der Koeffizient von $\mathfrak{u}^{\mathfrak{m}}$, wenn man den Quotienten von (26) in $K(t)\{\mathfrak{u}\}$ gebildet hat; dieser Koeffizient ist mittels rationaler Rechenoperationen in *endlich vielen Schritten* aus den Koeffizienten von $\mathfrak{u}$ in der Darstellung (26) als Quotient bestimmbar.

Wegen der Isomorphieeigenschaft von $\mathfrak{D}$ muß man dann aber auch $(\mathfrak{D}^{\mathfrak{m}} r(t))_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{v}\}$ erhalten, wenn man zunächst die Abbildung $a_{\nu} \to a_{\nu\mathfrak{D}}\{\mathfrak{v}\}$, $t \to t_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{v}\}$ vornimmt, dann den Quotienten

$$\frac{\sum_{\nu=0}^{h} (t_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{v}\}^{(n)}{}_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\})^{\nu}\, a_{\nu\mathfrak{D}}\{\mathfrak{v}\}^{(n)}{}_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\}}{\sum_{\nu=0}^{k} (t_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{v}\}^{(n)}{}_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\})^{\nu}\, b_{\nu\mathfrak{D}}\{\mathfrak{v}\}^{(n)}{}_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\}}$$

in $K(t)\{\mathfrak{v}\}\{\mathfrak{u}\}$ bildet und den Koeffizienten von $\mathfrak{u}^{\mathfrak{m}}$ herausgreift. Da dies für alle $\mathfrak{m} > \mathfrak{o}$ gilt, folgt

$$r(t)_{(\mathfrak{D},\mathfrak{D})}\{\mathfrak{u}, \mathfrak{v}\} = \frac{\sum_{\nu=0}^{h} (t_{(\mathfrak{D},\mathfrak{D})}\{\mathfrak{u}, \mathfrak{v}\})^{\nu}\, a_{\nu(\mathfrak{D},\mathfrak{D})}\{\mathfrak{u}, \mathfrak{v}\}}{\sum_{\nu=0}^{k} (t_{(\mathfrak{D},\mathfrak{D})}\{\mathfrak{u}, \mathfrak{v}\})^{\nu}\, b_{\nu(\mathfrak{D},\mathfrak{D})}\{\mathfrak{u}, \mathfrak{v}\}}.$$

Wegen der Gültigkeit von (20c) für die Taylorreihe $t_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\}$ laut Voraussetzung ist $t_{(\mathfrak{D},\mathfrak{D})}\{\mathfrak{u}, \mathfrak{v}\} = t_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\}_{\Delta}\{\mathfrak{v}\}$, und daher wird

$$r(t)_{(\mathfrak{D},\mathfrak{D})}\{\mathfrak{u}, \mathfrak{v}\} = \frac{\sum_{\nu=0}^{h} (t_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\}_{\Delta}\{\mathfrak{v}\})^{\nu}\, a_{\nu\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\}_{\Delta}\{\mathfrak{v}\}}{\sum_{\nu=0}^{k} (t_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\}_{\Delta}\{\mathfrak{v}\})^{\nu}\, b_{\nu\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\}_{\Delta}\{\mathfrak{v}\}} = r(t)_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\}_{\Delta}\{\mathfrak{v}\}$$

wegen der Isomorphieeigenschaft von Δ in $K(t)\{\mathfrak{u}\}$.

4. Es sei L von endlichem Grade m über K, d. h. $L = K(\alpha)$, wo α Nullstelle eines in K irreduziblen separablen Polynoms

$$g(t) = t^{n} + z_1 t^{n-1} + \cdots + z_n$$

ist. $g(t)$ entspricht in $K_{\mathfrak{u}}(t)$ ein in $K_{\mathfrak{u}}$ irreduzibles separables Polynom

$$G(t) = t^{n} + z_{1\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\}\, t^{n-1} + \cdots + z_{n\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\}$$

mit $g_0(t) = g(t)$. Nach einer Verallgemeinerung des Henselschen Lemmas[6]) entspricht α eindeutig eine Nullstelle

$$\alpha_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\} = \sum_{\mathfrak{k}=\mathfrak{o}}^{\infty} \mathfrak{u}^{\mathfrak{k}} \alpha_{\mathfrak{k}}$$

mit $\alpha_{\mathfrak{o}} = \alpha$ in $K(\alpha)\{\mathfrak{u}\}$. Hierdurch ist bereits jedem Element w aus $K(\alpha)$ eine Potenzreihe

$$w_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\} = \sum_{\mathfrak{k}=\mathfrak{o}}^{\infty} \mathfrak{u}^{\mathfrak{k}} w_{\mathfrak{k}} \quad \text{mit} \quad w_{\mathfrak{o}} = w$$

zugeordnet, womit $\mathfrak{D}$ in $K(\alpha)$ eindeutig bestimmt ist.

Weiterhin ist $\alpha_{(\mathfrak{D},\mathfrak{D})}\{\mathfrak{u}, \mathfrak{v}\}$ ebenfalls nach der Verallgemeinerung des Henselschen Lemmas eindeutig als diejenige Nullstelle von

$$\mathfrak{G}(t) = t^n + z_{1(\mathfrak{D},\mathfrak{D})}\{\mathfrak{u}, \mathfrak{v}\}\, t^{n-1} + \cdots + z_{n(\mathfrak{D},\mathfrak{D})}\{\mathfrak{u}, \mathfrak{v}\}$$

mit $\alpha_{(\mathfrak{o},\mathfrak{o})} = \alpha$ in $K(\alpha)\{\mathfrak{u}, \mathfrak{v}\}$ bestimmt. Da auch $\alpha_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u} + \mathfrak{v}\}$ eine Nullstelle des separablen Polynoms $\mathfrak{G}(t)$ mit dem Anfangskoeffizienten α ist, gilt

$$\alpha_{(\mathfrak{D},\mathfrak{D})}\{\mathfrak{u}, \mathfrak{v}\} = \alpha_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u} + \mathfrak{v}\}, \quad \text{d. h.} \quad \alpha_{(\mathfrak{D},\mathfrak{D})}\{\mathfrak{u}, \mathfrak{v}\} = \alpha_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\}_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{v}\}$$

wegen (21). Der Rest des Beweises verläuft wie in 3., womit alles gezeigt ist.

§ 4. Reguläre Multidifferentiationen.

Es sei $\mathfrak{x}$ ein festes n-Tupel aus K. Die Multidifferentiation $\mathfrak{A}$ m-ter Dimension in K heiße von der Multidifferentiation $\mathfrak{D}$ n-ter Dimension in K *$\mathfrak{x}$-ableitbar*, wenn mit m über K unabhängigen Unbestimmten $\mathfrak{u}$

$$z_{\mathfrak{A}}\{\mathfrak{u}\} = z_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{x}_{\mathfrak{A}}\{\mathfrak{u} - \mathfrak{x}\}\} \qquad \text{für jedes } z \in K \tag{27}$$

gilt, d. h. wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$ für jedes $\mathfrak{r}$ die Relation

$$\mathfrak{A}^{\mathfrak{r}} z = \sum_{\mathfrak{a}>\mathfrak{o}} \mathfrak{D}^{\mathfrak{a}} z \sum_{\Sigma \mathfrak{b}_{\mu\nu} = \mathfrak{r}} \mathfrak{A}_{x_1}^{\mathfrak{b}_{11}} \cdots \mathfrak{A}_{x_1}^{\mathfrak{b}_{1a_1}} \cdots \mathfrak{A}_{x_n}^{\mathfrak{b}_{n1}} \cdots \mathfrak{A}_{x_n}^{\mathfrak{b}_{na_n}} \tag{28}$$

erfüllen, wobei $\mathfrak{a}$ wegen $\Sigma \mathfrak{b}_{\mu\nu} = \mathfrak{r}$ für festes $\mathfrak{r}$ nur endlich viele Vektorwerte annehmen kann. Als Analogon zur klassischen Theorie heiße (27) und (28) auch *Kettenregel.*

Satz 2. *Sind die Komponenten einer Multidifferentiation $\mathfrak{A}$ m-ter Dimension in K einzeln aus der Multidifferentiation $\mathfrak{D}$ n-ter Dimension $\mathfrak{x}$-ableitbar, so ist $\mathfrak{A}$ selbst aus $\mathfrak{D}$ $\mathfrak{x}$-ableitbar.*

Beweis. Es genügt offenbar, Folgendes zu zeigen: Wenn $\mathfrak{A}$ von der Dimension m und $A_{m+1} = A$ $(1 \leqq m)$ einzeln aus $\mathfrak{D}$ $\mathfrak{x}$-ableitbar sind:

$$\begin{aligned} z_{\mathfrak{A}}\{\mathfrak{u}\} &= z_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{v}\}, \qquad \mathfrak{v} = \mathfrak{x}_{\mathfrak{A}}\{\mathfrak{u}\} - \mathfrak{x}, \\ z_A\{u\} &= z_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{w}\}, \quad \mathfrak{w} = \mathfrak{x}_A\{u\} - \mathfrak{x}, \end{aligned} \tag{29}$$

wo $(\mathfrak{u}, u)$ ein $(m+1)$-Tupel über K unabhängiger Unbestimmter bedeute, dann ist auch die Multidifferentiation $(\mathfrak{A}, A)$ von $(m+1)$-ter Dimension aus $\mathfrak{D}$ $\mathfrak{x}$-ableitbar.

Nun gilt aber

$$z_{(\mathfrak{A},A)}\{\mathfrak{u}, u\} = z_A\{u\}'_{\mathfrak{A}}\{\mathfrak{u}\} = z_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{w}_{\{u\}}\}'_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{v}\}.$$

Um die Isomorphieeigenschaft der Operation ${}_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{v}\}$ verwerten zu können, rechnen wir zunächst nur mit endlich vielen Summanden $\sum_{\mathfrak{a}=\mathfrak{o}}^{\mathfrak{t}} \mathfrak{w}^{\mathfrak{a}} \mathfrak{D}^{\mathfrak{a}} z$ $(\mathfrak{t} > \mathfrak{o})$ der Taylorreihe $z_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{w}\}$. Dann wird

$$\begin{aligned} z_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{w}_{\{u\}}\}'_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{v}\} &\equiv \left(\sum_{\mathfrak{a}=\mathfrak{o}}^{\mathfrak{t}} (\mathfrak{w}_{\{u\}})^{\mathfrak{a}} \mathfrak{D}^{\mathfrak{a}} z\right)'_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{v}\} \quad (\text{mod } u^{t+1}) \\ &= \sum_{\mathfrak{a}=\mathfrak{o}}^{\mathfrak{t}} ((\mathfrak{w}_{\{u\}})'_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{v}\})^{\mathfrak{a}} (\mathfrak{D}^{\mathfrak{a}} z)_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{v}\}. \end{aligned}$$

---

[6]) Vgl. *B. L. v. d. Waerden*, Über einfache Punkte von algebraischen Mannigfaltigkeiten, Math. Zeitschr. **51** (1948), S. 497: Wenn ein Polynom $F(t, \mathfrak{u})$ für $\mathfrak{u} = \mathfrak{o}$ in zwei teilerfremde Faktoren $g(t) \cdot h(t)$ zerfällt, so zerfällt es für unbestimmte $\mathfrak{u}$ in zwei Faktoren $G(t) \cdot H(t)$, deren Koeffizienten Potenzreihen in $\mathfrak{u}$ sind und die für $\mathfrak{u} = \mathfrak{o}$ in $g(t) \cdot h(t)$ übergehen, wobei $G(t)$ denselben Grad wie $g(t)$ hat.

Unter Verwendung der Abkürzung

$$\mathfrak{y} = (\mathfrak{w}_{\{u\}})'_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{v}\} = \mathfrak{z}_{(\mathfrak{A},A)}\{\mathfrak{u}, u\} - \mathfrak{z}_{\mathfrak{A}}\{\mathfrak{u}\} \tag{30}$$

ist also insgesamt

$$\begin{aligned} z_{(\mathfrak{A},A)}\{\mathfrak{u}, u\} &\equiv \sum_{a=0}^{t} \sum_{b=0}^{\infty} \mathfrak{y}^a \mathfrak{v}^b \mathfrak{D}^a \mathfrak{D}^b z \pmod{u^{t+1}} \\ &\equiv z_{(\mathfrak{D},\mathfrak{D})}\{\mathfrak{y}, \mathfrak{v}\} \pmod{u^{t+1}}, \end{aligned} \tag{31}$$

denn für jede Komponente von $\mathfrak{y}$ ist der u-Anfangsexponent $\geqq 1$.

Mit untereinander über K unabhängigen Unbestimmten $\mathfrak{y}, \mathfrak{v}$ gilt aber

$$z_{(\mathfrak{D},\mathfrak{D})}\{\mathfrak{y}, \mathfrak{v}\} = z_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{y} + \mathfrak{v}\}.$$

Da die Ersetzungen $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_{\{\mathfrak{u}\}}$, $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}_{\{\mathfrak{u}, u\}}$ in (30) erlaubt sind, ergibt sich aus (31)

$$z_{(\mathfrak{A},A)}\{\mathfrak{u}, u\} \equiv z_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{v} + \mathfrak{y}\} \pmod{u^{t+1}}.$$

Wegen $\mathfrak{v} + \mathfrak{y} = \mathfrak{z}_{(\mathfrak{A},A)}\{\mathfrak{u}, u\} - \mathfrak{z}$ folgt hieraus mit $t \to \infty$ die Behauptung.

Eine Multidifferentiation $\mathfrak{D}$ n-ter Dimension in K heiße *regulär*, wenn ein n-Tupel $\mathfrak{z} \in K$ so existiert, daß die Funktionaldeterminante $\| \mathfrak{D}\mathfrak{z} \| \neq 0$ ist; $\mathfrak{z}$ werde dann als *regulär-$\mathfrak{D}$-inkonstant* bezeichnet.

Man nenne nun m Differentiationen D_ν aus K *abhängig*, wenn ein festes $(m-1)$-Tupel $\mathfrak{z} \in K$ und eine Multidifferentiation $\mathfrak{A}$ $(m-1)$-ter Dimension in K so existieren, daß alle D_ν aus $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{z}$-ableitbar sind, und sonst *unabhängig. Dann sind die Komponenten einer regulären Multidifferentiation reduziert und unabhängig.*

Die Reduziertheit ist klar. Seien nun alle Komponenten D_ν aus einer Multidifferentiation $\mathfrak{A}$ $(n-1)$-ter Dimension $\mathfrak{z}$-ableitbar, und sei $\mathfrak{z}$ regulär-$\mathfrak{D}$-inkonstant. Dann ergibt sich für die i-te Zeile der Matrix $\mathfrak{D}\mathfrak{z}$

$$D_i \mathfrak{z} = \sum_{\mu=1}^{n-1} D_i x_\mu A_\mu \mathfrak{z} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

und die Determinante dieser Matrix verschwindet im Widerspruch zur Regularität von $\mathfrak{z}$.

Satz 3. *Ist $\mathfrak{z}$ bei einer regulären Multidifferentiation $\mathfrak{D}$ n-ter Dimension in einem Körper K ein regulär-$\mathfrak{D}$-inkonstantes n-Tupel aus K, so existiert eine und nur eine reguläre Multidifferentiation $\mathfrak{D}_{\mathfrak{z}}$ n-ter Dimension, aus der $\mathfrak{D}$ $\mathfrak{z}$-ableitbar ist. Für sie gilt*

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{D}_{\mathfrak{z}}}\{\mathfrak{u}\} = \mathfrak{z} + \mathfrak{u};$$

ferner hat eine $\mathfrak{D}$-Konstante der Minimalordnung m auch bezüglich $\mathfrak{D}_{\mathfrak{z}}$ die Minimalordnung m und umgekehrt.

$\mathfrak{D}_{\mathfrak{z}}$ heiße *Multidifferentiation nach* $\mathfrak{z}$.

Beweis. Die Potenzreihen

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\} - \mathfrak{z} = \mathfrak{v} \tag{32}$$

lassen sich, da $\mathfrak{v}$ wegen $\| \mathfrak{D}\mathfrak{z} \| \neq 0$ prim in $K\{\mathfrak{u}\}$ ist, eindeutig nach $\mathfrak{u}$ auflösen:

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_{\{\mathfrak{v}\}}. \tag{33}$$

Das Einsetzen von (33) in die Taylorreihe $z_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\}$ ist erlaubt, da dann auch $\mathfrak{u}$ prim in $K\{\mathfrak{v}\}$ ist. Durch Umschreibung von $z_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}_{\{\mathfrak{v}\}}\}$ nach Potenzen von $\mathfrak{v}$ ist $\mathfrak{D}_{\mathfrak{z}}$ eindeutig definiert.

Die Existenz von $\mathfrak{D}_{\mathfrak{z}}$ läßt sich in $K_{\mathfrak{u}}$ zeigen. In $K\{\mathfrak{u}\} = K\{\mathfrak{v}\}$ existieren zwei Multidifferentiationen $\Delta_{\mathfrak{u}}$ und $\Delta_{\mathfrak{v}}$, definiert durch

$$\Delta_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{a}}(c_{\{\mathfrak{u}\}}) = \sum_{\mathfrak{k} \geq \mathfrak{a}} \mathfrak{u}^{\mathfrak{k}-\mathfrak{a}} \binom{\mathfrak{k}}{\mathfrak{a}} c_{\mathfrak{k}},$$

$$\Delta_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{a}}(d_{\{\mathfrak{v}\}}) = \sum_{\mathfrak{k} \geq \mathfrak{a}} \mathfrak{v}^{\mathfrak{k}-\mathfrak{a}} \binom{\mathfrak{k}}{\mathfrak{a}} d_{\mathfrak{k}}.$$

In $K\{\mathfrak{u}\}$ ist aber $\Delta_{\mathfrak{u}}$ aus $\Delta_{\mathfrak{v}}$ $\mathfrak{z}_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\}$-ableitbar, was wegen der Δ-Vollkonstanz der Koeffizienten $d_{\mathfrak{m}}$ nur für $\mathfrak{v}$ bewiesen zu werden braucht. Es ist, wenn $\mathfrak{u}'$ und $\mathfrak{v}'$ je n über

$K\{\mathfrak{u}\}$ unabhängige Unbestimmte sind, $\mathfrak{v}_{\Delta_\mathfrak{v}}\{\mathfrak{v}'\} = \mathfrak{v} + \mathfrak{v}'$; also ist bei der erlaubten Ersetzung $\mathfrak{v}' = \mathfrak{x}_\mathfrak{D}\{\mathfrak{u}\}_{\Delta_\mathfrak{u}}\{\mathfrak{u}'\} - \mathfrak{x}_\mathfrak{D}\{\mathfrak{u}\}$ nach (32)

$$\begin{aligned}\mathfrak{v}_{\Delta_\mathfrak{v}}\{\mathfrak{x}_\mathfrak{D}\{\mathfrak{u}\}_{\Delta_\mathfrak{u}}\{\mathfrak{u}'\}\} - \mathfrak{x}_\mathfrak{D}\{\mathfrak{u}\}\} &= \mathfrak{v} + \mathfrak{x}_\mathfrak{D}\{\mathfrak{u}\}_{\Delta_\mathfrak{u}}\{\mathfrak{u}'\} - \mathfrak{x}_\mathfrak{D}\{\mathfrak{u}\}\\ &= \mathfrak{x}_\mathfrak{D}\{\mathfrak{u}\}_{\Delta_\mathfrak{u}}\{\mathfrak{u}'\} - \mathfrak{x} = (\mathfrak{x}_\mathfrak{D}\{\mathfrak{u}\} - \mathfrak{x})_{\Delta_\mathfrak{u}}\{\mathfrak{u}'\} = \mathfrak{v}_{\Delta_\mathfrak{u}}\{\mathfrak{u}'\}.\end{aligned}$$

Folglich ist $\Delta_\mathfrak{v}$ das Bild von $\mathfrak{D}_\mathfrak{x}$, und da alle $\mathfrak{D}_\mathfrak{x}^n z$ in K liegen, müssen alle $\Delta_\mathfrak{v}^n z_\mathfrak{D}\{\mathfrak{u}\}$ in $K_\mathfrak{u}$ liegen. Da $\Delta_\mathfrak{v}$ eine Multidifferentiation ist, muß auch das Urbild $\mathfrak{D}_\mathfrak{x}$ eine Multidifferentiation sein.

Unter Benutzung von (32) ergibt sich schließlich: $\mathfrak{x}_{\mathfrak{D}_\mathfrak{x}}\{\mathfrak{v}\} = \mathfrak{x}_\mathfrak{D}\{\mathfrak{u}\} = \mathfrak{x} + \mathfrak{v}$.

Es bleibt noch die Aussage über die Minimalordnung zu beweisen. Nun folgt aus

$$z_{\mathfrak{D}_\mathfrak{x}}\{\mathfrak{v}\} \equiv z + \sum_{i=1}^{n} v_i^{p^m} \mathfrak{D}_\mathfrak{x}^{p^m e_i} z \pmod{\mathfrak{v}^{p^m+1}}$$

durch die erlaubte Ersetzung $\mathfrak{v} = \mathfrak{x}_\mathfrak{D}\{\mathfrak{u}\} - \mathfrak{x}$ nach Umschreiben auf $\mathfrak{u}$:

$$z_{\mathfrak{D}_\mathfrak{x}}\{\mathfrak{v}\} = z_\mathfrak{D}\{\mathfrak{u}\} \equiv z + \sum_{i=1}^{n} u_i^{p^m} \sum_{k=1}^{n} (\mathfrak{D}^{e_i} x_k)^{p^m} \mathfrak{D}_\mathfrak{x}^{p^m e_k} z \pmod{\mathfrak{u}^{p^m+1}}.$$

Sind aber nicht alle $\mathfrak{D}_\mathfrak{x}^{p^m e_k} z$ $(k = 1, \ldots, n)$ gleich Null, so können auch die Koeffizienten von $u_i^{p^m}$ $(i = 1, \ldots, n)$, also die $\mathfrak{D}^{p^m e_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ nicht alle gleichzeitig verschwinden, weil die Determinante der Matrix $((\mathfrak{D}^{e_i} x_k)^{p^m})$ gleich der Determinante $\| \mathfrak{D}\mathfrak{x} \|^{p^m} \neq 0$ ist, und umgekehrt.

Folgerung. *Ist die reguläre Multidifferentiation $\mathfrak{D}$ in K aus der Multidifferentiation $\mathfrak{D}_\mathfrak{x}$ $\mathfrak{x}$-ableitbar, so ist $\mathfrak{x}$ regulär $\mathfrak{D}$-inkonstant.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges n-Tupel aus K. Dann folgt aus $\mathfrak{a}_\mathfrak{D}\{\mathfrak{u}\} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{D}_\mathfrak{x}}\{\mathfrak{x}_\mathfrak{D}\{\mathfrak{u}\} - \mathfrak{x}\}$ die Beziehung

$$\mathfrak{D}^{e_i} a_k = \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{D}^{e_i} x_j \mathfrak{D}_\mathfrak{x}^{e_j} a_k \qquad (i, k = 1, \ldots, n),$$

oder kürzer: $\| \mathfrak{D}\mathfrak{a} \| = \| \mathfrak{D}\mathfrak{x} \| \cdot \| \mathfrak{D}_\mathfrak{x}\mathfrak{a} \|$. Wäre nun $\| \mathfrak{D}\mathfrak{x} \| = 0$, so würde für alle $\mathfrak{a}$ aus K auch $\| \mathfrak{D}\mathfrak{a} \| = 0$ folgen, im Widerspruch zur Regularität von $\mathfrak{D}$.

Zwei Multidifferentiationen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ n-ter Dimension in K heißen *abhängig*, wenn ein festes n-Tupel $\mathfrak{x} \in K$ und eine Multidifferentiation $\mathfrak{D}_\mathfrak{x}$ n-ter Dimension in K existieren, so daß $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{D}_\mathfrak{x}$ $\mathfrak{x}$-ableitbar sind.

Also ist speziell jedes aus $\mathfrak{D}_\mathfrak{x}$ $\mathfrak{x}$-ableitbare $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{D}_\mathfrak{x}$ abhängig, weil $\mathfrak{D}_\mathfrak{x}$ selbst aus $\mathfrak{D}_\mathfrak{x}$ $\mathfrak{x}$-ableitbar ist. Weiter gilt: *Ist reguläres $\mathfrak{D}$ sowohl aus $\mathfrak{D}_\mathfrak{x}$ $\mathfrak{x}$-ableitbar als auch aus $\mathfrak{D}_\mathfrak{y}$ $\mathfrak{y}$-ableitbar, so ist $\mathfrak{D}_\mathfrak{x}$ aus $\mathfrak{D}_\mathfrak{y}$ $\mathfrak{y}$-ableitbar.* Denn aus

$$z_\mathfrak{D}\{\mathfrak{u}\} = z_{\mathfrak{D}_\mathfrak{x}}\{\mathfrak{x}_\mathfrak{D}\{\mathfrak{u}\} - \mathfrak{x}\}, \quad z \in K$$

folgt, wenn $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_{\{\mathfrak{v}\}}$ die eindeutig existierende Umkehrung von $\mathfrak{v} = \mathfrak{x}_\mathfrak{D}\{\mathfrak{u}\} - \mathfrak{x}$ ist, $z_\mathfrak{D}\{\mathfrak{u}\} = z_{\mathfrak{D}_\mathfrak{x}}\{\mathfrak{v}\}$, also speziell $\mathfrak{y}_\mathfrak{D}\{\mathfrak{u}\} = \mathfrak{y}_{\mathfrak{D}_\mathfrak{x}}\{\mathfrak{v}\}$; unter Verwendung von $z_\mathfrak{D}\{\mathfrak{u}\} = z_{\mathfrak{D}_\mathfrak{y}}\{\mathfrak{y}_\mathfrak{D}\{\mathfrak{u}\} - \mathfrak{y}\}$ wird somit

$$z_{\mathfrak{D}_\mathfrak{x}}\{\mathfrak{v}\} = z_\mathfrak{D}\{\mathfrak{u}\} = z_{\mathfrak{D}_\mathfrak{y}}\{\mathfrak{y}_{\mathfrak{D}_\mathfrak{x}}\{\mathfrak{v}\} - \mathfrak{y}\}.$$

Folgerung. *Insbesondere ist die $\mathfrak{y}$-Ableitbarkeit von $\mathfrak{D}_\mathfrak{x}$ aus $\mathfrak{D}_\mathfrak{y}$ mit der $\mathfrak{x}$-Ableitbarkeit von $\mathfrak{D}_\mathfrak{y}$ aus $\mathfrak{D}_\mathfrak{x}$ gleichbedeutend.*

Ebenso ergibt sich: *Sind $\mathfrak{D}_\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{D}$ abhängig, so ist $\mathfrak{D}$ aus $\mathfrak{D}_\mathfrak{y}$ $\mathfrak{y}$-ableitbar.* Für ein Element z aus K gilt nämlich nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} z_\mathfrak{D}\{\mathfrak{u}\} &= z_{\mathfrak{D}_\mathfrak{x}}\{\mathfrak{x}_\mathfrak{D}\{\mathfrak{u}\} - \mathfrak{x}\} = z_{\mathfrak{D}_\mathfrak{x}}\{\mathfrak{v}\},\\ z_{\mathfrak{D}_\mathfrak{y}}\{\mathfrak{w}\} &= z_{\mathfrak{D}_\mathfrak{x}}\{\mathfrak{x}_{\mathfrak{D}_\mathfrak{y}}\{\mathfrak{w}\} - \mathfrak{x}\} = z_{\mathfrak{D}_\mathfrak{x}}\{\mathfrak{v}\}. \end{aligned} \tag{34}$$

Wegen der letzten Folgerung ist dann auch $\mathfrak{D}_\mathfrak{x}$ aus $\mathfrak{D}_\mathfrak{y}$ $\mathfrak{y}$-ableitbar:

$$z_{\mathfrak{D}_\mathfrak{x}}\{\mathfrak{v}\} = z_{\mathfrak{D}_\mathfrak{y}}\{\mathfrak{y}_{\mathfrak{D}_\mathfrak{x}}\{\mathfrak{v}\} - \mathfrak{y}\}.$$

Einsetzen in (34) liefert

$$z_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\} = z_{\mathfrak{D}_\mathfrak{y}}\{\mathfrak{y}_{\mathfrak{D}_\mathfrak{x}}\{\mathfrak{v}\} - \mathfrak{y}\} = z_{\mathfrak{D}_\mathfrak{y}}\{\mathfrak{y}_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\} - \mathfrak{y}\}.$$

Schließlich erweist sich die Abhängigkeit regulärer Multidifferentiationen als transitiv. Denn seien von den regulären Multidifferentiationen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ etwa $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{D}_\mathfrak{x}$ $\mathfrak{x}$-ableitbar, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ aus $\mathfrak{D}_\mathfrak{y}$ $\mathfrak{y}$-ableitbar, so folgt wegen der Eigenschaften für $\mathfrak{B}$ aus dem Vorigen die $\mathfrak{y}$-Ableitbarkeit von $\mathfrak{D}_\mathfrak{x}$ aus $\mathfrak{D}_\mathfrak{y}$. Demnach gilt für ein z aus K:

$$z_{\mathfrak{A}}\{\mathfrak{u}\} = z_{\mathfrak{D}_\mathfrak{x}}\{\mathfrak{x}_{\mathfrak{A}}\{\mathfrak{u}\} - \mathfrak{x}\} = z_{\mathfrak{D}_\mathfrak{y}}\{\mathfrak{y}_{\mathfrak{D}_\mathfrak{x}}\{\mathfrak{x}_{\mathfrak{A}}\{\mathfrak{u}\} - \mathfrak{x}\} - \mathfrak{y}\} = z_{\mathfrak{D}_\mathfrak{y}}\{\mathfrak{y}_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\} - \mathfrak{y}\}.$$

Zusammengefaßt ergibt sich also der

Satz 4. *Die regulären Multidifferentiationen eines Körpers K zerfallen in Multiklassen $\mathfrak{K}$ paarweise abhängiger. Die Regularität eines inkonstanten n-Tupels $\mathfrak{x}$ ist eine Multiklasseninvariante. Nur und gerade zu einem regulär inkonstanten n-Tupel $\mathfrak{x}$ existiert in $\mathfrak{K}$ eine und nur eine Multidifferentiation $\mathfrak{D}_\mathfrak{x}$ der Eigenschaft $\mathfrak{x}_{\mathfrak{D}_\mathfrak{x}}\{\mathfrak{u}\} = \mathfrak{x} + \mathfrak{u}$. Aus ihr ist jede und nur jede Multidifferentiation von $\mathfrak{K}$ $\mathfrak{x}$-ableitbar. Eine weitere Multiklasseninvariante ist die Minimalordnung jedes Elementes von K.*

Die hiermit nachgewiesene Multidifferentiation heiße $\mathfrak{K}$-*Multidifferentiation nach* $\mathfrak{x}$.

§ 5. Auflösbarkeit gewisser Differentialgleichungssysteme.

Satz 5. $\mathfrak{D} = (D_1, D_2, \ldots, D_n)$ *sei eine reguläre Multidifferentiation in einem Körper K von Primzahlcharakteristik p. Das Differentialgleichungssystem*

$$D_i^{p^j} y = z_{ij} \qquad (i = 1, \ldots, n;\ j = 0, \ldots, N_i) \tag{35}$$

hat dann und nur dann eine Lösung y in K, wenn die Bedingungen

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad D_\mu^{p^i} z_{\nu j} = D_\nu^{p^j} z_{\mu i} && (\mu, \nu = 1, \ldots, n;\ i = 0, \ldots, N_\mu;\ j = 0, \ldots, N_\nu) \\ &\text{b)}\quad D^{p^{i+1}-p^i} z_{\mu i} = 0 && (\mu = 1, \ldots, n;\ i = 0, \ldots, N_\mu) \end{aligned} \tag{36}$$

erfüllt sind.

Beweis. A. Für $N_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ sei das System (35) zur Vereinfachung mit

$$D_\nu y = w_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{37}$$

bezeichnet. Die Bedingungen (36) nehmen dann die Gestalt

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad D_\nu w_\mu = D_\mu w_\nu && (\mu, \nu = 1, \ldots, n) \\ &\text{b)}\quad D_\nu^{p-1} w_\nu = 0 && (\nu = 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{38}$$

an. Es sei nun $\mathfrak{x}$ ein regulär-$\mathfrak{D}$-inkonstantes n-Tupel aus K. Leitet man $\mathfrak{D}$ aus $\mathfrak{D}_\mathfrak{x}$ ab, so folgt:

$$w_\nu = D_\nu y = \sum_{\mu=1}^{n} D_{x_\mu} y D_\nu x_\mu \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{39}$$

Nach Voraussetzung ist $\| \mathfrak{D}\mathfrak{x} \| \neq 0$, also dieses Gleichungssystem eindeutig nach $D_{x_\mu} y$ auflösbar; die Lösungen seien

$$D_{x_\mu} y = v_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, n). \tag{40}$$

Die Lösbarkeitsbedingungen für dieses Differentialgleichungssystem lauten:

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad D_{x_\mu}^{p} v_\nu = D_{x_\nu} v_\mu && (\nu, \mu = 1, \ldots, n), \\ &\text{b)}\quad D_{x_\mu}^{p-1} v_\mu = 0 && (\mu = 1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{41}$$

Es läßt sich aber die Gleichwertigkeit von (38) und (41) nachweisen, was im folgenden geschehen soll. Aus (39) unter Benutzung von (40) folgt durch Anwendung der Kettenregel:

$$\begin{aligned} D_i w_k &= D_i \sum_{\mu=1}^{n} v_\mu D_k x_\mu = \sum_{\mu=1}^{n} D_i v_\mu D_k x_\mu + \sum_{\mu=1}^{n} v_\mu D_i D_k x_\mu \\ &= \sum_{\mu,\nu=1}^{n} D_{x_\nu} v_\mu D_i x_\nu D_k x_\mu + \sum_{\mu=1}^{n} v_\mu D_i D_k x_\mu, \end{aligned}$$

also wird für $i, k = 1, \ldots, n$

$$(42) \qquad D_i w_k - D_k w_i = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} (D_{x_\nu} v_\mu - D_{x_\mu} v_\nu) D_i x_\mu D_k x_\nu .$$

Aus $D_{x_\nu} v_\mu = D_{x_\mu} v_\nu$ ergibt sich dann sofort $D_i w_k = D_k w_i$ $(i, k = 1, \ldots, n)$. Aber auch das Umgekehrte gilt; man schreibe statt (42):

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(\sum_{\mu=1}^{n} (D_{x_\nu} v_\mu - D_{x_\mu} v_\nu) D_i x_\mu \right) D_k x_\nu = 0 \qquad (i, k = 1, \ldots, n).$$

Dann folgt aus den n Gleichungen $k = 1, \ldots, n$ bei festgehaltenem i wegen $\| \mathfrak{D}\mathfrak{x} \| \neq 0$:

$$\sum_{\mu=1}^{n} (D_{x_\nu} v_\mu - D_{x_\mu} v_\nu) D_i x_\mu = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

und hieraus die Behauptung; also sind (38a) und (41a) äquivalent.

Weiterhin ist mit (39) und (40)

$$D_i^{p-1} w_i = D_i^{p-1} \sum_{\mu=1}^{n} v_\mu D_i x_\mu = \sum_{\alpha+\beta=p-1} \sum_{\mu=1}^{n} D_i^\alpha v_\mu D_i^\beta D_i x_\mu$$
$$= \sum_{\alpha+\beta=p-1} \sum_{\mu=1}^{n} (\beta + 1) D_i^{\beta+1} x_\mu D_i^\alpha v_\mu .$$

Da $\beta + 1 = p$ wird für $\alpha = 0$, ist $\alpha \neq 0$ keine Beschränkung der Allgemeinheit. Für $\alpha > 0$ besagt aber die Kettenregel

$$D_i^\alpha v_\mu = \sum_{a>0} \mathfrak{D}_\mathfrak{x}^a v_\mu \sum_{\substack{\Sigma\beta_{\nu\varkappa}=\alpha \\ \beta_{\nu\varkappa}>0}} \prod_{\varkappa=1}^{n} \prod_{\nu=1}^{a_\varkappa} D_i^{\beta_{\varkappa\nu}} x_\varkappa ,$$

und damit wird

$$(43) \quad D_i^{p-1} w_i = \sum_{\alpha+\beta=p-1} \sum_{\mu=1}^{n} (\beta + 1) D_i^{\beta+1} x_\mu \sum_{a>0} \mathfrak{D}_\mathfrak{x}^a v_\mu \sum_{\substack{\Sigma\beta_{\nu\varkappa}=\alpha \\ \beta_{\nu\varkappa}>0}} \prod_{\varkappa=1}^{n} \prod_{\nu=1}^{a_\varkappa} D_i^{\beta_{\varkappa\nu}} x_\varkappa .$$

Das Glied $D_i^{\beta+1} x_\mu$ in (43) soll später als *Zusatzglied* bezeichnet werden. Man greife nun irgendeinen Summanden in (43) heraus; er hat, abgesehen von den Faktoren $\beta + 1$ und $\mathfrak{D}_\mathfrak{x}^a v_\mu$, die Gestalt

$$(44) \quad A = \prod_{\mu=1}^{m} \prod_{\nu=1}^{b_\mu} (D_i^{\alpha_{\mu\nu}} x_\mu)^{a_{\mu\nu}} \quad \text{mit} \quad 0 < \alpha_{\mu\nu} < \alpha_{\mu,\nu+1}, \quad \sum_{\nu,\mu} \alpha_{\mu\nu} a_{\mu\nu} = p; \quad m \leqq n .$$

M. a. W.: $a_{\mu\nu}$ bezeichnet die Vielfachheit, mit der $D_i^{\alpha_{\mu\nu}} x_\mu$ in dem betrachteten Summanden A vorkommt.

Man nehme zunächst an, daß alle $\alpha_{\mu\nu} \not\equiv 0 \pmod p$ und ebenfalls alle $a_{\mu\nu} \not\equiv 0 \pmod p$ seien. Dieses schließt unter anderem ein, daß nur und gerade Ableitungen von x_1 bis x_m effektiv in (44) vorkommen sollen (andernfalls numeriere man die x_ν geeignet um). Man setze abkürzend

$$r_\mu = \begin{cases} \sum_\nu a_{\mu\nu} & \text{für} \quad \mu = 1, \ldots, m, \\ 0 & \text{für} \quad \mu = m + 1, \ldots, n; \end{cases}$$
$$\mathfrak{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_n); \quad \mathfrak{r}_\lambda = \mathfrak{r} - \mathfrak{e}_\lambda \qquad (\lambda = 1, \ldots, m).$$

Jedes Glied $D_i^{\alpha_{\varkappa\lambda}} x_\varkappa$, das in (44) vorkommt, kann das Zusatzglied sein. So tritt z. B. in der Summe (43) folgender Term der Gestalt (44) auf ($\varkappa$, λ fest):

$$(45) \qquad \mathfrak{D}_\mathfrak{x}^{\mathfrak{r}_\varkappa} v_\varkappa \prod_{\mu=1}^{m} \prod_{\nu=1}^{b_\mu} (D_i^{\alpha_{\mu\nu}} x_\mu)^{a_{\mu\nu} - \delta_{\varkappa\mu} \cdot \delta_{\lambda\nu} \cdot \alpha_{\varkappa\lambda}} \cdot D_i^{\alpha_{\varkappa\lambda}} x_\varkappa .$$

Welches ist aber die Vielfachheit seines Auftretens? Bei festem h haben die $\beta_{h\nu}$ in (43) genau so viel Möglichkeiten, die verlangten Werte in (45) anzunehmen, wie Permu-

tationen von $r_h - \delta_{h\varkappa}$ Elemente existieren, von denen je $a_{h\nu} - \delta_{\varkappa h}\delta_{\lambda\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, b_h)$ untereinander gleich sind, d. h. also mit variablem h insgesamt

$$\prod_{h=1}^{m} \frac{(r_h - \delta_{h\varkappa})!}{\prod\limits_{\nu=1}^{b_h} (a_{h\nu} - \delta_{h\varkappa}\delta_{\lambda\nu})!} = P\frac{a_{\varkappa\lambda}}{r_\varkappa} \quad \text{mit} \quad P = \prod_{h=1}^{m} \frac{(r_h)!}{\prod\limits_{\nu=1}^{b_h} (a_{h\nu})!}$$

Möglichkeiten. Dabei muß natürlich $r_\varkappa \not\equiv 0 \pmod{p}$ vorausgesetzt werden.

Also ist in (43) die Summe aller derjenigen Terme der Gestalt (44), die das Zusatzglied $D_i^{\alpha_{\varkappa\lambda}} x_\varkappa$ haben, gleich

$$A_{\varkappa\lambda} = P\frac{a_{\varkappa\lambda}\,\alpha_{\varkappa\lambda}}{r_\varkappa}\mathfrak{D}_{\mathfrak{x}}^{r_\varkappa} v_\varkappa \cdot A. \tag{46}$$

Nun folgt aber aus der Iterationsregel, falls (41 a) und $r_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$ erfüllt sind:

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{x}}^{r_\varkappa} v_\varkappa = \frac{r_\varkappa}{r_1}\mathfrak{D}_{\mathfrak{x}}^{r_1} v_1. \tag{47}$$

Die Summe sämtlicher Terme der Gestalt (44) überhaupt ergibt sich dann aus (46) durch Summierung über $\varkappa$ und λ; benutzt man (47), so wird

$$\sum_{\varkappa,\lambda} A_{\varkappa\lambda} = \frac{P}{r_1}\mathfrak{D}_{\mathfrak{x}}^{r_1} v_1 \cdot \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\lambda}\,\alpha_{\varkappa\lambda} \cdot A,$$

und das ist nach Voraussetzung (44) durch p teilbar.

Ist jedoch ein $r_\varkappa = p$, so muß es nach unseren Auswahlregeln r_1 sein; in diesem Falle ist die Summe aller Terme der Gestalt (44) dann gleich

$$\frac{(r_1 - 1)!}{\prod\limits_{\nu=1}^{b_1} (a_{1\nu})!} \cdot \sum_{\nu} a_{1\nu}\,\alpha_{1\nu} \cdot A,$$

also ebenfalls durch p teilbar.

Der Fall $\alpha_{\mu\nu} = p$ ist ausgeschlossen, denn nach (43) sind stets mindestens zwei Faktoren in (44) vorhanden.

Ist dagegen ein $a_{\mu\nu} = p$ (nach unseren Auswahlregeln kann es nur a_{11} sein), so versagen diese Schlußweisen, es bleiben also die n möglichen Terme dieser Gestalt übrig; sie haben die Vielfachheit 1, und daher wird schließlich aus (43):

$$D_i^{p-1} w_i = \sum_{\mu=1}^{n} (D_i x_\mu)^p D_{x_\mu}^{p-1} v_\mu \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Die Determinante dieses Gleichungssystems ist $\| (D_i x_\mu)^p \| = \| \mathfrak{D}\mathfrak{x} \|^p \neq 0$, womit die Äquivalenz von (38) und (41) vollständig bewiesen ist.

B. Es sei nun $\alpha_1, \ldots, \alpha_\lambda$ eine Kombination K_λ^n der Zahlen $1, \ldots, n$ zur λ-ten Klasse ohne Wiederholung, und man setze abkürzend

$$v_{\alpha_1 \ldots \alpha_\lambda} = \left(\prod_{\nu \neq \mu}^{\lambda} D_{x_{\alpha_\nu}}\right) v_{\alpha_\mu} \qquad (\mu = 1, \ldots, \lambda) \tag{48}$$

für diese unter der Voraussetzung (41 a) für $\mu = 1, \ldots, \lambda$ gleichen Ausdrücke.

Dann läßt sich für das Differentialgleichungssystem (40) mit den Nebenbedingungen (41) sofort eine partikuläre Lösung durch

$$y = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{K_\lambda^n(\alpha_1,\ldots,\alpha_\lambda)} \sum_{i_1,\ldots,i_\lambda=0}^{p-2} (-1)^{\sum\limits_{\nu=1}^{\lambda} i_\nu + \lambda + 1} \left(\prod_{\nu=1}^{\lambda} \frac{x_{\alpha_\nu}^{i_\nu+1}}{i_\nu + 1}\right)\left(\prod_{\nu=1}^{\lambda} D_{x_{\alpha_\nu}}^{i_\nu}\right) v_{\alpha_1,\ldots,\alpha_\lambda} \tag{49}$$

angeben, wobei die zweite Summe über alle Kombinationen K_λ^n zu erstrecken ist.

Aus Symmetriegründen genügt der Nachweis von $D_{x_n} y = v_n$. Mit der kombinatorischen Relation

$$K_\lambda^n(\alpha_1, \ldots, \alpha_\lambda) = K_\lambda^{n-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_\lambda) + K_{\lambda-1}^{n-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\lambda-1}, n)$$

läßt sich (49) in einem Term A, wo nur über die Kombinationen $K_\lambda^{n-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_\lambda)$, und in einem Term B, wo nur über die Kombinationen $K_{\lambda-1}^{n-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\lambda-1}, n)$ zu summieren ist, aufspalten. Dann wird, wenn man noch zur Vereinfachung $D_{x_\alpha} = D_\alpha$ setzt,

$$D_n A = \sum_{\lambda=1}^{n-1} \sum_{K_\lambda^{n-1}(\alpha_1, \ldots \alpha_\lambda)} \sum_{i_1, \ldots, i_\lambda = 0}^{p-2} (-1)^{\sum_{\nu=1}^{\lambda} i_\nu + \lambda + 1} \left(\prod_{\nu=1}^{\lambda} \frac{x_{\alpha_\nu}^{i_\nu+1}}{i_\nu + 1} \right) \left(\prod_{\nu=1}^{\lambda} D_{\alpha_\nu}^{i_\nu} \right) v_{\alpha_1 \ldots \alpha_\lambda n}$$

wobei natürlich λ nur bis $n-1$ gehen kann, und

$$D_n B = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{K_{\lambda-1}^{n-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\lambda-1}, n)} \sum_{i_1, \ldots, i_\lambda = 0}^{p-2} (-1)^{\sum_{\nu=1}^{\lambda} i_\nu + \lambda + 1} \left(\prod_{\nu=1}^{\lambda-1} \frac{x_{\alpha_\nu}^{i_\nu+1}}{i_\nu + 1} \right) \cdot x_n^{i_\lambda} \left(\prod_{\nu=1}^{\lambda-1} D_{\alpha_\nu}^{i_\nu} \right) D_n^{i_\lambda} v_{\alpha_1 \ldots \alpha_{\lambda-1} n}$$

$$+ \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{K_{\lambda-1}^{n-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\lambda-1}, n)} \sum_{i_1, \ldots, i_\lambda = 0}^{p-2} (-1)^{\sum_{\lambda=1}^{\lambda} i_\nu + \lambda + 1} \left(\prod_{\nu=1}^{\lambda-1} \frac{x_{\alpha_\nu}^{i_\nu+1}}{i_\nu + 1} \right) x_n^{i_\lambda+1} \left(\prod_{\nu=1}^{\lambda-1} D_{\alpha_\nu}^{i_\nu} \right) D_n^{i_\lambda+1} v_{\alpha_1 \ldots \alpha_{\lambda-1} n}$$

$= C + D$, wie wir weiter abkürzen wollen. C wird nun in einen Teil mit $i_\lambda = 0$ und in einen mit $i_\lambda > 0$ aufgespalten:

$$C = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{K_{\lambda-1}^{n-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\lambda-1}, n)} \sum_{i_1, \ldots, i_{\lambda-1} = 0}^{p-2} (-1)^{\sum i_\nu + \lambda + 1} \left(\prod_{\nu=1}^{\lambda-1} \frac{x_{\alpha_\nu}^{i_\nu+1}}{i_\nu + 1} \right) \left(\prod_{\nu=1}^{\lambda-1} D_{\alpha_\nu}^{i_\nu} \right) v_{\alpha_1 \ldots \alpha_{\lambda-1} n}$$

$$+ \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{K_{\lambda-1}^{n-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\lambda-1}, n)} \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_{\lambda-1} = 0 \\ i_\lambda > 0}}^{p-2} (-1)^{\sum i_\nu + \lambda + 1} \left(\prod_{\nu=1}^{\lambda-1} \frac{x_{\alpha_\nu}^{i_\nu+1}}{i_\nu + 1} \right) x_n^{i_\lambda} \left(\prod_{\nu=1}^{\lambda-1} D_{\alpha_\nu}^{i_\nu} \right) D_n^{i_\lambda} v_{\alpha_1 \ldots \alpha_{\lambda-1} n}$$

$= E + F$ mit neuen Abkürzungen.

Ersetzt man $i_\lambda - 1$ in F durch i'_λ (mit den neuen Summationsgrenzen 1 und $p-3$) und bildet $C + F$, so bleiben in C nur die Ausdrücke mit $i_\lambda = p-2$ übrig; diese verschwinden aber sämtlich, weil nach Voraussetzung (41b) $D_n^{p-1} v_{\alpha_1 \ldots \alpha_{\lambda-1} n} = 0$ gilt.

Ersetzt man $\lambda - 1$ in E durch λ' (mit den neuen Summationsgrenzen 0 und $n-1$), so sieht man schließlich, daß in der Summe $D_n A + E$ nur der Ausdruck mit $\lambda' = 0$ übrigbleibt. Es gibt aber für $\lambda' = 0$ nur eine Kombination $K_{\lambda'}^{n-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\lambda'}, n)$, nämlich (n), also ist in der Tat $D_n y = v_n$.

Ferner ist y bis auf ein additives Element aus $K_{\mathfrak{D}^e}$ eindeutig bestimmt.

Wegen A ist damit auch die Lösbarkeit des Systems (35) unter den Voraussetzungen (36) für $N_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$ bewiesen.

C. Das System

$$D_\mu^{p^i} y = 0, \quad i < N_\mu, \quad D_\mu^{p^{N_\mu}} = w_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n) \tag{50}$$

ist unter den (36) entsprechenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad D_\mu^{p^{N_\mu}} w_2 = D_\lambda^{p^{N_\lambda}} w_\mu && (\lambda, \mu = 1, \ldots, n) \\ &\text{b)} \quad D_\mu^{p^{N_\mu+1} - p^{N_\mu}} w_\mu = 0 && (\mu = 1, 2, \ldots, n) \\ &\text{c)} \quad D_\nu^{p^i} w_\mu = 0 && (i < N_\nu;\ \nu, \mu = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned} \tag{51}$$

ebenfalls lösbar, wie durch Übergang zur reduzierten Differentiation $\varepsilon_{-N_\mu} D_\mu$ sofort aus B folgt. Denn w_μ gehört wegen (51c) zu $K_{D_\nu^{N_\nu}}$, und von y wird dieses durch (50) gefordert.

D. Der Beweis der Lösbarkeit von (35) wird nun durch Induktion nach N_1 bei festen N_λ $(\lambda = 2, \ldots, n)$ geführt.

Zunächst ist nach B die Lösbarkeit für $N_\mu = 0$ $(\mu = 1, \ldots, n)$ klar. Mit dem Schluß von N_1 auf $N_1 + 1$ bei festen N_λ $(\lambda = 2, \ldots, n)$ ist der Satz wegen seiner Symmetrie bezüglich der Indizes auch gleichzeitig für $N_i + 1$, $i \neq 1$, N_ν fest $(\nu \neq i)$ beliebig und damit allgemein bewiesen.

Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein y_{I} in K, sodaß

$$D_\mu^{p^i} y_{\mathrm{I}} = z_{\mu i} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n;\ i = 0, 1, \ldots, N_\mu) \tag{52}$$

unter den Bedingungen

$$D_\mu^{p^i} z_{\nu j} = D_\nu^{p^j} z_{\mu i} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n;\ i = 0, \ldots, N_\mu;\ j = 0, \ldots, N_\nu)$$

$$D_\mu^{p^{i+1} - p^i} z_{\mu i} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n;\ i = 0, 1, \ldots, N_\mu)$$

gilt. Nach C gibt es in K ein y_{II} mit der Eigenschaft:

$$D_\mu^{p^i} y_{\mathrm{II}} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n;\ i = 0, 1, \ldots, N_\mu)$$

$$D_1^{p^{N_1+1}} y_{\mathrm{II}} = z_{1, N_1+1} - D_1^{p^{N_1+1}} y_{\mathrm{I}} = w_1^*.$$

Denn die Bedingungen (51) lauten hier, da die (50) entsprechenden w_λ^* $(\lambda = 2, \ldots, n)$ gleich Null zu setzen sind:

$$D_2^{p^{N_2}} w_1^* = 0, \quad D_1^{p^{N_1+2} - p^{N_1+1}} w_1^* = 0,$$

$$D_\nu^{p^i} w_1^* = 0, \quad i < \begin{cases} N_1 + 1 & \text{für } \nu \begin{cases} = 1 \\ > 1 \end{cases} \\ N_\nu \end{cases}.$$

Sie sind aber erfüllt, denn es wird nach (36b)

$$D_1^{p^{N_1+2} - p^{N_1+1}} (z_{1, N_1+1} - D_1^{p^{N_1+1}} y_{\mathrm{I}}) = -\binom{p^{N_1+2}}{p^{N_1+1}} D_1^{p^{N_1+2}} y_{\mathrm{I}} = 0$$

wegen $\binom{p^{\varkappa+1}}{p^\varkappa} \equiv 0 \pmod{p}$, sowie nach (52)

$$D_\nu^{p^i} (z_{1, N_1+1} - D_1^{p^{N_1+1}} y_{\mathrm{I}}) = D_\nu^{p^i} z_{1, N_1+1} - D_1^{p^{N_1+1}} D_\nu^{p^i} y_{\mathrm{I}} = D_\nu^{p^i} z_{1, N_1+1} - D_1^{p^{N_1+1}} z_{\nu i} = 0$$

wegen (36a).

Jetzt erhält man aber eine Lösung y von (35), falls N_1 durch $N_1 + 1$ ersetzt ist, durch Superposition: $y = y_{\mathrm{I}} + y_{\mathrm{II}}$. Damit ist endlich gezeigt, daß die Bedingungen (36) für die Lösbarkeit hinreichen.

E. Die Notwendigkeit ist dagegen leicht einzusehen. Ist y eine Lösung von (35), so gilt:

$$D_\mu^{p^i} z_{\nu j} = D_\mu^{p^i} D_\nu^{p^j} y = D_\nu^{p^j} D_\mu^{p^i} y = D_\nu^{p^j} z_{\mu i} \quad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n;\ i = 0, \ldots, N_\mu;\ j = 0, \ldots, N_\nu).$$

Und schließlich ist

$$D_\mu^{p^{i+1} - p^i} z_{\mu i} = D_\mu^{p^{i+1} - p^i} D_\mu^{p^i} y = \binom{p^{i+1}}{p^i} D_\mu^{p^{i+1}} y = 0$$

wegen $\binom{p^{i+1}}{p^i} \equiv 0 \pmod{p}$.

Aus (49) folgt ein wichtiger Basissatz:

Satz 6. *Ist $\mathfrak{D}$ eine reguläre Multidifferentiation der Dimension n in einem Körper K der Charakteristik p und $\mathfrak{x}$ ein regulär-$\mathfrak{D}$-inkonstantes n-Tupel aus K, so gilt die Basisdarstellung*

$$K = \sum_{i=0}^{\bar{p}-e} K_{\mathfrak{D}^e} \cdot \mathfrak{x}^i, \tag{53}$$

wo $K_{\mathfrak{D}^e}$ der Körper der $\mathfrak{D}$-konstanten Elemente ist.

Beweis. Für $n = 1$ ist zu zeigen:

$$K = K_{D^1} + K_{D^1} x + \cdots + K_{D^1} x^{p-1}.$$

Wegen $D_x(D_x^{p-1} y) = 0$ für jedes y aus K ist $D_x^{p-1} y$ D_x-konstant. Es sei nun schon gezeigt, daß für $m < p$ jedes $D_x^m y$ sich in der Gestalt

$$D_x^m y = \sum_{\nu=0}^{p-1-m} k_\nu x^\nu, \quad k_\nu \in K_{D^1} \tag{54}$$

schreiben läßt. Dann folgt aus $D_x(D_x^{m-1} y) = m D_x^m y$ gemäß (49) für jedes $D_x^{m-1} y$ die Darstellung:

$$\begin{aligned} D_x^{m-1} y &= \sum_{i=0}^{p-2} (-1)^i \frac{m}{i+1} x^{i+1} D^i \sum_{\nu=0}^{p-1-m} k_\nu x^\nu + k \\ &= \sum_{i=0}^{p-2} (-1)^i \frac{m}{i+1} x^{i+1} \sum_{\nu=0}^{p-1-m-i} k_{i+\nu} \binom{\nu+i}{i} x^\nu + k = \sum_{\mu=0}^{p-m} k'_\mu x^\mu, \quad k'_\mu \in K_{D^1}. \end{aligned}$$

Die Darstellung (54) für $m = 0$ ist eindeutig; denn die rechte Summe verschwindet nur, wenn alle k_ν verschwinden, wie man zunächst durch Bildung der $(p-1)$-ten Ableitung für k_{p-1} und dann für die übrigen k_ν induktiv einsieht.

Angenommen nun, man habe bereits gezeigt, daß

$$K = \sum_{i_1, \ldots, i_\lambda = 0}^{p-1} K_{\mathfrak{D}_\mathfrak{x}^{f(\lambda)}} \cdot x_1^{i_1} \cdots x_\lambda^{i_\lambda} \tag{55}$$

mit der Abkürzung $f(\lambda) = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ (die ersten λ Komponenten $= 1$, die übrigen $= 0$) gilt. In $K_{\mathfrak{D}_\mathfrak{x}^{f(\lambda)}}$ ist aber $D_{x_{\lambda+1}}$ eine Differentiation, also gilt

$$K_{\mathfrak{D}_\mathfrak{x}^{f(\lambda)}} = \sum_{i_{\lambda+1}=0}^{p-1} K_{\mathfrak{D}_\mathfrak{x}^{f(\lambda+1)}} - x_{\lambda+1}^{i_{\lambda+1}}.$$

Setzt man dieses in (55) ein, so ergibt sich die Gültigkeit von (55) auch für $\lambda + 1$. Die Existenz der Darstellung (53) folgt dann wegen $K_{\mathfrak{D}_\mathfrak{x}^{f(n)}} = K_{\mathfrak{D}^{f(n)}}$, die Eindeutigkeit ähnlich wie im Falle $n = 1$.

§ 6. $\mathfrak{D}$-erzeugende Folgen.

Satz 7. *Ist $\mathfrak{D}$ eine reguläre Multidifferentiation in einem Körper K der Charakteristik $p \neq 0$, so existiert in der Multiklasse $\mathfrak{K}_\mathfrak{D}$ eine Folge von Elementmultidifferentiationen $\mathfrak{D}_{\mathfrak{x}_0}, \mathfrak{D}_{\mathfrak{x}_1}, \ldots$ derart, daß*

$$\mathfrak{D}^\mathfrak{m} y = \mathfrak{D}_{\mathfrak{x}_N}^\mathfrak{m} y; \quad m_\nu < p^{N+1} \ (\nu = 1, \ldots, n); \quad y \in K$$

gilt. Es ist $\mathfrak{x}_0$ regulär-$\mathfrak{D}$-inkonstant, $\mathfrak{x}_N$ ist bis auf ein additives n-Tupel aus dem $\mathfrak{D}$-Konstanzkörper der Minimalordnung $N + 1$ eindeutig bestimmt, und $\mathfrak{x}_{N+1} - \mathfrak{x}_N$ liegt in $K_{\mathfrak{D}(N+1, \ldots, N+1)}$.

Beweis. Wegen $z_\mathfrak{D}\{\mathfrak{u}\} = z_{\mathfrak{D}_{\mathfrak{x}_N}}\{\mathfrak{x}_{N_\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\} - \mathfrak{x}_N\}$ sind die verlangten Gleichungen erfüllt, sobald

$$\mathfrak{x}_{N_\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\} \equiv \mathfrak{x}_N + \mathfrak{u} \pmod{\mathfrak{u}^{p^{N+1}}}$$

gilt. $\mathfrak{x}_N$ existiert aber als mod $K_{\mathfrak{D}(N+1, \ldots, N+1)}$ eindeutige Lösung des Differentialgleichungssystems

$$D_i x_k = \delta_{ik}, \quad D_i^{p^j} x_k = 0 \ (i, k = 1, \ldots, n; \quad 0 < j < N + 1).$$

Da dieses System auch von $\mathfrak{x}_{N+1}$ gelöst wird, liegt $\mathfrak{x}_{N+1} - \mathfrak{x}_N$ in $K_{\mathfrak{D}(N+1, \ldots, N+1)}$.

Ebenso gilt, wenn $K_{\mathfrak{K}^\mathfrak{m}}$ der Körper der Konstanten der Minimalordnung m in einer Multiklasse $\mathfrak{K}$ ist, die

Umkehrung von Satz 7. *Ist $\mathfrak{D}_{\mathfrak{x}_0}, \mathfrak{D}_{\mathfrak{x}_1}, \ldots$ eine Folge von Elementmultidifferentiationen eines Körpers K der Charakteristik $p \neq 0$ aus einer Multiklasse $\mathfrak{K}$, und liegt $\mathfrak{x}_{N+1} - \mathfrak{x}_N$ jeweils in $K_{\mathfrak{K}(N+1,\ldots,N+1)}$, so ist durch*

$$\mathfrak{D}^{\mathfrak{m}} y = \mathfrak{D}^{\mathfrak{m}}_{\mathfrak{x}_N} y, \quad m_i < p^{N+1} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{56}$$

eine Multidifferentiation in $\mathfrak{K}$ erklärt.

Beweis. Die Gültigkeit von (20) ist bis zur Ordnung $\bar{\mathfrak{p}}^{N+1} - \mathfrak{e}$ gesichert. (56) ist aber eine widerspruchsfreie Forderung, denn nach Voraussetzung gilt für $M < N$:

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{x}_M}(\mathfrak{x}_N - \mathfrak{x}_M) = \mathfrak{O} \qquad \text{oder} \qquad \mathfrak{D}_{\mathfrak{x}_M}\mathfrak{x}_N = \mathfrak{D}_{\mathfrak{x}_M}\mathfrak{x}_M = \mathfrak{E},$$

$$\mathfrak{D}^{p^{\mathfrak{i}}}_{\mathfrak{x}_M}(\mathfrak{x}_N - \mathfrak{x}_M) = \mathfrak{o} \qquad \text{oder} \qquad \mathfrak{D}^{p^{\mathfrak{i}}}_{\mathfrak{x}_M}\mathfrak{x}_N = \mathfrak{D}^{p^{\mathfrak{i}}}_{\mathfrak{x}_M}\mathfrak{x}_M = \mathfrak{o},$$

wobei $p^{\mathfrak{i}} \leqq \bar{\mathfrak{p}}^M$, aber $\mathfrak{i} \neq \mathfrak{o}$ sein möge. Also ist auch

$$\mathfrak{D}^{p^{\mathfrak{i}}}_{\mathfrak{x}_M}\mathfrak{x}_N = \mathfrak{D}^{p^{\mathfrak{i}}}_{\mathfrak{x}_N}\mathfrak{x}_N, \quad p^{\mathfrak{i}} \leqq \bar{\mathfrak{p}}^M$$

oder

$$\mathfrak{x}_N + \mathfrak{u} = \mathfrak{x}_N \mathfrak{D}_{\mathfrak{x}_N}\{\mathfrak{u}\} \equiv \mathfrak{x}_N \mathfrak{D}_{\mathfrak{x}_M}\{\mathfrak{u}\} \pmod{\mathfrak{u}^{\bar{\mathfrak{p}}^{M+1}}}.$$

Nach Definition der $\mathfrak{x}_N$-Ableitbarkeit ist aber dann in der Tat

$$\mathfrak{D}^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{x}_N} y = \mathfrak{D}^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{x}_M} y, \quad \mathfrak{a} \leqq \bar{\mathfrak{p}}^M, \quad M \leqq N, \; y \in K.$$

Eine derartige Folge $\{\mathfrak{x}_N\}$ möge $\mathfrak{D}$-*erzeugend* und, falls sie zu einer Elementmultidifferentiation $\mathfrak{D}_{\mathfrak{x}}$ führt, $\mathfrak{D}$-*konvergent gegen den Grenzwert* $\mathfrak{x}$ heißen.

Satz 8. *Zwei reguläre Multidifferentiationen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ eines Körpers K der Charakteristik $p \neq 0$ mit den zugehörigen $\mathfrak{D}$-Folgen $\{\mathfrak{a}_\mu\}$ und $\{\mathfrak{b}_\mu\}$ gehören dann und nur dann zu einer Multiklasse $\mathfrak{K}$, wenn mit einem n-Tupel $\mathfrak{u}$ von unabhängigen Unbestimmten über K für jedes z aus K*

$$z_{\mathfrak{A}}\{\mathfrak{u}\} = z_{\mathfrak{B}}\{\mathfrak{v}\}$$

gilt. Dabei ist $\mathfrak{v}$ das feste, in $K\{\mathfrak{u}\}$ prime n-Trupel

$$\mathfrak{v} = \lim_{\mu \to \infty} \mathfrak{b}_{\mu\,\mathfrak{A}}\{\mathfrak{u}\} - \mathfrak{b}_\mu. \tag{57}$$

Beweis. $\mathfrak{v}$ ist durch (57) eindeutig bestimmt, weil mit einer andern $\mathfrak{B}$-erzeugenden Folge $\{\mathfrak{b}^*_\mu\}$ stets $\mathfrak{b}_\mu \equiv \mathfrak{b}^*_\mu \pmod{K_{\mathfrak{K}(\mu+1,\ldots,\mu+1)}}$ gilt.

A. Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ abhängig. Man schreibe statt $\mathfrak{B}_{\mathfrak{b}_\mu}$ kurz $\mathfrak{B}_\mu$ und setze $\mathfrak{v}_\mu = \mathfrak{b}_{\mu\,\mathfrak{A}}\{\mathfrak{u}\} - \mathfrak{b}_\mu$. Dann ist $\mathfrak{A}$ aus $\mathfrak{B}_\mu$ $\mathfrak{b}_\mu$-ableitbar, d. h. es gilt $z_{\mathfrak{A}}\{\mathfrak{u}\} = z_{\mathfrak{B}_\mu}\{\mathfrak{v}_\mu\}$ für jedes z aus K oder, da $\mathfrak{v}_\mu$ in $K\{\mathfrak{u}\}$ prim ist, mit (54):

$$z_{\mathfrak{A}}\{\mathfrak{u}\} \equiv z_{\mathfrak{B}}\{\mathfrak{v}_\mu\} \pmod{\mathfrak{u}^{\bar{\mathfrak{p}}^{\mu+1}}}. \tag{58}$$

Aus (57) folgt

$$\mathfrak{v}_\mu \equiv \mathfrak{v} \pmod{\mathfrak{u}^{\bar{\mathfrak{p}}^{\mu+1}}}, \tag{59}$$

also mit (58):

$$z_{\mathfrak{A}}\{\mathfrak{u}\} \equiv z_{\mathfrak{B}}\{\mathfrak{v}\} \pmod{\mathfrak{u}^{\bar{\mathfrak{p}}^{\mu+1}}},$$

woraus für $\mu \to \infty$ die Behauptung $z_{\mathfrak{A}}\{\mathfrak{u}\} = z_{\mathfrak{B}}\{\mathfrak{v}\}$ folgt.

B. Umgekehrt gelte $z_{\mathfrak{A}}\{\mathfrak{u}\} = z_{\mathfrak{B}}\{\mathfrak{v}\}$ für alle z aus K. Zunächst ist $\mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{B}_\mu$ $\mathfrak{b}_\mu$-ableitbar, also folgt

$$z_{\mathfrak{A}}\{\mathfrak{u}\} = z_{\mathfrak{B}_\mu}\{\mathfrak{b}_{\mu\mathfrak{B}}\{\mathfrak{v}\} - \mathfrak{b}_\mu\} \tag{60}$$

und speziell für $\mathfrak{z} = \mathfrak{b}_\mu$:

$$\mathfrak{b}_{\mu\mathfrak{A}}\{\mathfrak{u}\} = \mathfrak{b}_{\mu\mathfrak{B}_\mu}\{\mathfrak{b}_{\mu\mathfrak{B}}\{\mathfrak{v}\} - \mathfrak{b}_\mu\} = \mathfrak{b}_{\mu\mathfrak{B}}\{\mathfrak{v}\}.$$

Hieraus ergibt sich mit (60) sofort $z_{\mathfrak{A}}\{\mathfrak{u}\} = z_{\mathfrak{B}_\mu}\{\mathfrak{v}_\mu\}$, also sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ abhängig.

Folgerung. *Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ abhängige Multidifferentiationen in K und $\{\mathfrak{b}_\nu\}$ eine $\mathfrak{B}$-erzeugende Folge, so ist $\mathfrak{B}$ explizit gegeben, wenn man die Umkehrung $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_{\{\mathfrak{v}\}}$ von* (57) *in $z_{\mathfrak{A}}\{\mathfrak{u}\}$ einsetzt und nach Potenzen von $\mathfrak{v}$ ordnet:*

$$z_{\mathfrak{B}}\{\mathfrak{v}\} = z_{\mathfrak{A}}\{\mathfrak{u}_{\{\mathfrak{v}\}}\}.$$

§ 7. Expansionsreihen.

Zwei Multidifferentiationen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ der Dimensionen m und n heißen *vertauschbar*, wenn $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ eine Multidifferentiation $(m+n)$-ter Dimension bildet.

Wegen (20c) ist damit gleichbedeutend, daß mit $m+n$ über K unabhängigen Unbestimmten $(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})$

$$z_{\mathfrak{A}}\{\mathfrak{u}\}_{\mathfrak{B}}^{(m)}\{\mathfrak{v}\} = z_{\mathfrak{B}}\{\mathfrak{v}\}_{\mathfrak{A}}^{(n)}\{\mathfrak{u}\} \tag{61}$$

gilt.

Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ vertauschbare Multidifferentiationen gleicher Dimension n in K, so ist auch ihre Summe $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, definiert mit n über K unabhängigen Unbestimmten $\mathfrak{u}$ für ein z aus K durch

$$z_{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}\{\mathfrak{u}\} = z_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}\{\mathfrak{u}, \mathfrak{u}\},$$

eine Multidifferentiation, die mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ vertauschbar ist.

Beweis. Die Isomorphieeigenschaft (20a, b) ist klar. Es seien nun $(\mathfrak{u}^{(1)}, \mathfrak{u}^{(2)}, \mathfrak{v}^{(1)}, \mathfrak{v}^{(2)})$ $4n$ über K unabhängige Unbestimmte. Dann ist mit Verwendung von (61):

$$y_{(\mathfrak{A},\mathfrak{B})}\{\mathfrak{u}^{(1)} + \mathfrak{v}^{(1)}, \mathfrak{u}^{(2)} + \mathfrak{v}^{(2)}\} = y_{\mathfrak{A}}\{\mathfrak{u}^{(1)} + \mathfrak{v}^{(1)}\}_{\mathfrak{B}}^{(2n)}\{\mathfrak{u}^{(2)} + \mathfrak{v}^{(2)}\}$$
$$= y_{\mathfrak{A}}\{\mathfrak{u}^{(1)}\}_{\mathfrak{A}}^{(n)}\{\mathfrak{v}^{(1)}\}_{\mathfrak{B}}^{(2n)}\{\mathfrak{u}^{(2)}\}_{\mathfrak{B}}^{(3n)}\{\mathfrak{v}^{(2)}\} = y_{(\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{A},\mathfrak{B})}\{\mathfrak{u}^{(1)}, \mathfrak{u}^{(2)}, \mathfrak{v}^{(1)}, \mathfrak{v}^{(2)}\}.$$

Die Löschung der Indizes ist aber eine erlaubte Ersetzung, sie ergibt (20c).

Wegen (20c) ist jede Differentiation mit sich selbst vertauschbar, und daraus folgt leicht, daß auch $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$ vertauschbar sind.

Das Nullelement dieser Addition ist die triviale Multidifferentiation.

Es seien $[K_{\mathfrak{K}\infty}]$ und $[K_\infty]$ die Ringe der n-reihigen quadratischen Matrizen mit Elementen aus dem Körper $K_{\mathfrak{K}\infty}$ der Vollkonstanten einer Multiklasse $\mathfrak{K}$ oder aus K_∞. Die formalen Reihen

$$\mathsf{A}_{\{\varepsilon\}} = \sum_{\mathfrak{m}=0}^{\infty} \mathsf{A}_{\mathfrak{m}} \varepsilon_{\mathfrak{m}} \tag{62}$$

mit den Rechenregeln

$$\sum_{\mathfrak{m}=0}^{\infty} \mathsf{A}_{\mathfrak{m}} \varepsilon_{\mathfrak{m}} \pm \sum_{\mathfrak{m}=0}^{\infty} \mathsf{B}_{\mathfrak{m}} \varepsilon_{\mathfrak{m}} = \sum_{\mathfrak{m}=0}^{\infty} (\mathsf{A}_{\mathfrak{m}} + \mathsf{B}_{\mathfrak{m}}) \varepsilon_{\mathfrak{m}}, \tag{63}$$

$$\sum_{\mathfrak{m}=0}^{\infty} \mathsf{A}_{\mathfrak{m}} \varepsilon_{\mathfrak{m}} \cdot \sum_{\mathfrak{m}=0}^{\infty} \mathsf{B}_{\mathfrak{m}} \varepsilon_{\mathfrak{m}} = \sum_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}=0}^{\infty} (\mathsf{A}_{\mathfrak{m}} \mathsf{B}_{\mathfrak{n}}) \varepsilon_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}$$

analog den formalen Potenzreihen mögen *$\mathfrak{K}$-Expansionsreihen* oder *absolute Expansionsreihen* heißen, je nachdem ob die $\mathsf{A}_{\mathfrak{m}}$ in $[K_{\mathfrak{K}\infty}]$ oder in $[K_\infty]$ liegen; sie bilden den *$\mathfrak{K}$-Expansionsring* ${}^n\mathsf{E}_{\mathfrak{K}}$ bzw. den *absoluten Expansionsring* ${}^n\mathsf{E}$ *n-ter Dimension.* ($\mathsf{A}\,\mathsf{B}$ ist im Sinne der Matrizenmultiplikation zu verstehen.)

Definiert man mit einer regulären Multidifferentiation $\mathfrak{D}$ in einem Körper von Primzahlcharakteristik p das formale Produkt $\mathsf{A}_{\{\varepsilon\}}\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^*$ durch

$$y_{\mathfrak{D}^*}\{\mathfrak{u}\} = y_{\mathfrak{D}}\left\{\sum_{\mathfrak{m}=0}^{\infty} \mathsf{A}_{\mathfrak{m}}\, \mathfrak{u}^{p^{\mathfrak{m}}}\right\} \tag{64}$$

für beliebiges y aus K, wobei die Produkte $\mathsf{A}\,\mathfrak{u}$ im Sinne der gewöhnlichen Matrizenmultiplikation zu verstehen sind, so ist auch $\mathfrak{D}^*$ *eine Multidifferentiation der Klasse $\mathfrak{K}_{\mathfrak{D}}$, wenn $\mathsf{A}_{\{\varepsilon\}} \in {}^n\mathsf{E}_{\mathfrak{D}}$* oder $\in {}^n\mathsf{E}$ *ist.*

Beweis. Es sei zunächst $\| A_0 \| \neq 0$. Durch

$$y_{\mathfrak{D}} \left\{ \sum_{\mathfrak{m}=0}^{\mathfrak{t}} \mathsf{A}_{\mathfrak{m}} \mathfrak{u}^{p^{\mathfrak{m}}} \right\}$$

ist dann sicher eine Multidifferentiation $\mathfrak{A}_t$ in K definiert mit

$$y_{\mathfrak{A}_t}\{\mathfrak{u}\} = y_{\mathfrak{D}} \left\{ \sum_{\mathfrak{m}=0}^{\mathfrak{t}} \mathsf{A}_{\mathfrak{m}} \mathfrak{u}^{p^{\mathfrak{m}}} \right\} \tag{65}$$

und

$$y_{\mathfrak{A}_t}\{\mathfrak{u}\} \equiv y_{\mathfrak{A}_{t+k}}\{\mathfrak{u}\} \pmod{\mathfrak{u}^{p^{t+1}}}, \quad k \geqq 0.$$

Denn der Umformungsprozeß (65) läßt sich als eine Addition endlich vieler Multidifferentiationen der Gestalt $\mathsf{A}_{\mathfrak{m}} \varepsilon_{\mathfrak{m}} \mathfrak{D}$, die als Verallgemeinerung von (23) nach (64) durch

$$y_{\mathsf{A}_{\mathfrak{m}} \varepsilon_{\mathfrak{m}} \mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\} = y_{\mathfrak{D}}\{\mathsf{A}_{\mathfrak{m}} \mathfrak{u}^{p^{\mathfrak{m}}}\}$$

definiert werden, deuten.

Setzt man

$$\sum_{\mathfrak{m}=0}^{\mathfrak{t}} \mathsf{A}_{\mathfrak{m}} \mathfrak{u}^{p^{\mathfrak{m}}} = \mathfrak{b}_{t-1\,\mathfrak{A}_{t-1}}\{\mathfrak{u}\} - \mathfrak{b}_{t-1}, \tag{66}$$

so sind dies n Differentialgleichungssysteme der Gestalt (35), die ersichtlich die Bedingung (36) erfüllen. Für ihre Lösungen $\mathfrak{b}_t$ ist nach (66)

$$\mathfrak{b}_{t-1+k\,\mathfrak{A}_{t-1}}\{\mathfrak{u}\} - \mathfrak{b}_{t-1+k} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{u}^{p^{t+1}}},$$

also speziell $(\mathfrak{b}_{t+1} - \mathfrak{b}_t)_{\mathfrak{A}_{t+1}}\{\mathfrak{u}\} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{u}^{p^{t+1}}}$, und es gilt: $\| \mathfrak{D}\mathfrak{b}_0 \| = \| \mathsf{A}_0 \| \neq 0$. Also ist $\{\mathfrak{b}_t\}$ eine $\mathfrak{D}$-erzeugende Folge (nach Satz 7), die zu einer regulären Multidifferentiation $\mathfrak{B}$ führt. Es gilt aber $\mathfrak{D}^* = \mathfrak{B}$. Denn aus $\mathfrak{b}_{\mu\mathfrak{B}_\mu}\{\mathfrak{v}\} = \mathfrak{b}_\mu + \mathfrak{v}$ folgt mit der erlaubten Ersetzung $\mathfrak{v} = \mathfrak{b}_{\mu\mathfrak{A}_\mu}\{\mathfrak{u}\} - \mathfrak{b}_\mu$ die Beziehung $\mathfrak{b}_{\mu\mathfrak{B}_\mu}\{\mathfrak{b}_{\mu\mathfrak{A}_\mu}\{\mathfrak{u}\} - \mathfrak{b}_\mu\} = \mathfrak{b}_{\mu\mathfrak{A}_\mu}\{\mathfrak{u}\}$, und demnach wegen $\mathfrak{b}_{\mu\mathfrak{B}_\mu}\{\mathfrak{v}\} \equiv \mathfrak{b}_{\mu\mathfrak{B}}\{\mathfrak{v}\} \pmod{\mathfrak{u}^{p^{\mu-1}}}$ schließlich

$$y_{\mathfrak{B}}\{\mathfrak{u}\} = y_{\mathfrak{B}_\mu}\{\mathfrak{b}_{\mu\mathfrak{B}}\{\mathfrak{u}\} - \mathfrak{b}_\mu\} \equiv y_{\mathfrak{B}_\mu}\{\mathfrak{b}_{\mu\mathfrak{A}_\mu}\{\mathfrak{u}\} - \mathfrak{b}_\mu\} = y_{\mathfrak{A}_\mu}\{\mathfrak{u}\} \pmod{\mathfrak{u}^{p^{\mu+1}}}.$$

Das genügt aber mit (65).

Es ist weiterhin leicht einzusehen, daß alle $\mathsf{A}_{\{\varepsilon\}}\mathfrak{D}$ untereinander paarweise vertauschbar sind.

Nun sei $\| \mathsf{A}_0 \| = 0$. Man wähle $\mathsf{A}_0^{(1)}$ so, daß die Determinanten $\| \mathsf{A}_0^{(1)} \|$ und $\| \mathsf{A}_0 - \mathsf{A}_0^{(1)} \|$ beide $\neq 0$ sind. $(\mathsf{A}_{\{\varepsilon\}} - \mathsf{A}_0^{(1)})\,\mathfrak{D}$ und $\mathsf{A}_0^{(1)}\,\mathfrak{D}$ sind aber Multidifferentiationen und vertauschbar, also ist auch die Summe $\mathsf{A}_{\{\varepsilon\}}\mathfrak{D}$ eine Multidifferentiation.

Die Wichtigkeit der Rechenoperation (64) zeigt der folgende

Satz 9. *Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei reguläre Multidifferentiationen einer Multiklasse $\mathfrak{K}$ in einem Körper der Charakteristik $p \neq 0$, und die Folge $\{\mathfrak{b}_\mu\}$ erzeuge $\mathfrak{B}$. Dann sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ genau dann vertauschbar, wenn in* (57) *alle Koeffizienten von $\mathfrak{v}$ $\mathfrak{K}$-vollkonstant sind, d. h.*

$$\mathfrak{v} = \sum_{\mathfrak{m}=0}^{\infty} \mathsf{A}_{\mathfrak{m}} \mathfrak{u}^{p^{\mathfrak{m}}}, \quad \mathsf{A}_{\mathfrak{m}} \in [K_{\mathfrak{K}\infty}] \tag{67}$$

gilt.

Beweis. Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ vertauschbar und $(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})$ ein $2n$-Tupel über K unabhängiger Unbestimmter. Dann genügt, um die Vollkonstanz aller Koeffizienten in (57) zu zeigen, der Nachweis der $\mathfrak{B}$-Vollkonstanz (die Vollkonstanz ist eine Multiklasseninvariante) von $\mathfrak{A}^{\mathfrak{m}}\mathfrak{b}_i$ für $\mathfrak{o} < \mathfrak{m} \leqq \mathfrak{p}^i$ bei festem i, also die Gültigkeit von

$$(\mathfrak{A}^{\mathfrak{m}}\mathfrak{b}_i)_{\mathfrak{B}}\{\mathfrak{v}\} = \mathfrak{A}^{\mathfrak{m}}\mathfrak{b}_i \qquad (\mathfrak{o} < \mathfrak{m} \leqq \mathfrak{p}^i)$$

oder

$$(\mathfrak{b}_{i\mathfrak{A}}\{\mathfrak{u}\} - \mathfrak{b}_i)^{(n)}_{\mathfrak{B}}\{\mathfrak{v}\} \equiv \mathfrak{b}_{i\mathfrak{A}}\{\mathfrak{u}\} - \mathfrak{b}_i \pmod{\mathfrak{u}^{p^{i+1}}}. \tag{68}$$

Nun gilt aber nach Definition von $\{\mathfrak{b}_i\}$ und wegen der Abhängigkeit von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ für $m \geqq 0$

$$\mathfrak{b}_{i\,\mathfrak{A}}\{\mathfrak{u}\} - \mathfrak{b}_i \equiv \mathfrak{b}_{i+m\,\mathfrak{A}}\{\mathfrak{u}\} - \mathfrak{b}_{i+m} \pmod{\mathfrak{u}^{p^{i+1}}}, \tag{69}$$

also mit Berücksichtigung der Vertauschbarkeit:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{b}_{i\,\mathfrak{A}}\{\mathfrak{u}\} - \mathfrak{b}_i)^{(n)}_{\mathfrak{B}}\{\mathfrak{v}\} &\equiv \mathfrak{b}_{i+m\,\mathfrak{A}}\{\mathfrak{u}\}^{(n)}_{\mathfrak{B}}\{\mathfrak{v}\} - \mathfrak{b}_{i+m\,\mathfrak{B}}\{\mathfrak{v}\} \\ &= \mathfrak{b}_{i+m\,\mathfrak{B}}\{\mathfrak{v}\}^{(n)}_{\mathfrak{A}}\{\mathfrak{u}\} - \mathfrak{b}_{i+m\,\mathfrak{B}}\{\mathfrak{v}\} \pmod{\mathfrak{u}^{p^{i+1}}}.\end{aligned} \tag{70}$$

Durch Einsetzen von $\mathfrak{b}_{i+m\,\mathfrak{B}}\{\mathfrak{v}\} \equiv \mathfrak{b}_{i+m} + \mathfrak{v} \pmod{\mathfrak{v}^{p^{i+m+1}}}$ in (70) folgt:

$$(\mathfrak{b}_{i\,\mathfrak{A}}\{\mathfrak{u}\} - \mathfrak{b}_i)^{(n)}_{\mathfrak{B}}\{\mathfrak{v}\} \equiv (\mathfrak{b}_{i+m} + \mathfrak{v})_{\mathfrak{A}}\{\mathfrak{u}\} - \mathfrak{b}_{i+m} - \mathfrak{v} \equiv \mathfrak{b}_{i+m\,\mathfrak{A}}\{\mathfrak{u}\} - \mathfrak{b}_{i+m} \pmod{\mathfrak{u}^{p^{i+1}}, \mathfrak{v}^{p^{i+m+1}}},$$

oder mit (69)

$$(\mathfrak{b}_{i\,\mathfrak{A}}\{\mathfrak{u}\} - \mathfrak{b}_i)^{(n)}_{\mathfrak{B}}\{\mathfrak{v}\} \equiv \mathfrak{b}_{i\,\mathfrak{A}}\{\mathfrak{u}\} - \mathfrak{b}_i \pmod{\mathfrak{u}^{p^{i+1}}, \mathfrak{v}^{p^{i+m+1}}}.$$

Der Grenzübergang $m \to \infty$ ergibt die Behauptung (68).

Daß aus der Vollkonstanz der Koeffizienten in (57) die Vertauschbarkeit folgt, ist klar.

Aus Satz 9 ergibt sich unmittelbar, daß die Vertauschbarkeit von Multidifferentiationen einer festen Multiklasse eine transitive Eigenschaft ist. Ebenfalls ist die zusätzliche Bedingung, daß die Koeffizienten in (57) sogar in K_∞ liegen sollen, transitiv. Daher läßt sich nun leicht der folgende Satz einsehen:

Satz 10. *Die Multidifferentiationen $\mathfrak{D}$ einer festen Multiklasse zerfallen ihrerseits in Klassen, genannt Normalklassen, paarweise vertauschbarer Multidifferentiationen der Gestalt*

$$\sum_{\mathfrak{n}=0}^{\infty} \mathsf{A}_{\mathfrak{n}}\, \varepsilon_{\mathfrak{n}}^{\nu} \cdot \mathfrak{D}, \quad \| \mathsf{A}_0 \| \neq 0.$$

Sie erzeugen einen Modul $\mathfrak{N}(\mathfrak{D})$, den $\mathfrak{K}$-Normalisator von $\mathfrak{D}$:

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{D}) = \mathsf{E}_{\mathfrak{D}} \cdot \mathfrak{D},$$

und $\mathsf{E}_{\mathfrak{D}}$ ist ein Operatorenring für $\mathfrak{N}(\mathfrak{D})$. Es gilt[7] $\mathfrak{N}(\mathfrak{D}) \overset{(+)}{\cong} \mathsf{E}_{\mathfrak{D}}$.

Die Gesamtheit der Multidifferentiationen in $\mathfrak{N}(\mathfrak{D})$, bei denen die $\mathsf{A}_{\mathfrak{n}}$ bereits in K_∞ liegen, bildet einen Teilmodul $\mathfrak{Z}(\mathfrak{D})$ von $\mathfrak{N}(\mathfrak{D})$, den $\mathfrak{K}$-Zentralisator von $\mathfrak{D}$:

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{D}) = \mathsf{E} \cdot \mathfrak{D},$$

und E ist ein Operatorenring für $\mathfrak{Z}(\mathfrak{D})$. Eine mit $\mathfrak{D}$ vertauschbare beliebige Multidifferentiation beliebiger Dimension ist mit jedem Element von $\mathfrak{Z}(\mathfrak{D})$ vertauschbar. Es gilt $\mathfrak{Z}(\mathfrak{D}) \overset{(+)}{\cong} \mathsf{E}$.

§ 8. Multidifferentiationen in algebraischen Funktionenkörpern.

Es sei ein separabel erzeugbarer algebraischer Funktionenkörper $K = k(\mathfrak{x}, y)$ der n Unbestimmten $\mathfrak{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ mit dem Konstantenkörper k von Primzahlcharakteristik p gegeben.

Sind bei einer Differentiation D in K die Elemente von k D-vollkonstant, so heiße D eine *Differentiation von K/k.*

Eine Elementdifferentiation D von K/k werde *partiell* genannt, wenn es $n-1$ nicht in k liegende, bezüglich k algebraisch unabhängige Elemente $\mathfrak{y} = (y_1, \ldots, y_{n-1})$ aus K so gibt, daß $\mathfrak{y}_D\{u\} = \mathfrak{y}$ gilt.

Ein n-Tupel $\mathfrak{z}$ von Elementen aus K heiße eine *separierende algebraische Basis von K/k*, wenn K über $k(\mathfrak{z})$ separabel algebraisch ist.

Ist z_ν ein separierendes Element von K/k aus dem n-Tupel $\mathfrak{z}$, so läßt sich die Elementdifferentiation D_{z_ν} in $k(z_\nu)$ zunächst trivial auf $k(\mathfrak{z})$ und sodann nach § 1 eindeutig auf K fortsetzen. Diese n Elementdifferentiationen D_{z_ν} sind nach Konstruktion in $k(\mathfrak{z})$ vertauschbar und bilden zusammen in $k(\mathfrak{z})$ eine reguläre Multidifferentiation n-ter Dimension $\mathfrak{D}_{\mathfrak{z}}$.

[7]) Die Multidifferentiation $A_{\{\varepsilon\}} \cdot B_{\{\varepsilon\}} \cdot \mathfrak{D}$ als „Produkt" der Multidifferentationen $A_{\{\varepsilon\}}^{\mathfrak{D}} \cdot \mathfrak{D}$ und $B_{\{\varepsilon\}} \cdot \mathfrak{D}$ zu deuten, ist nicht sinnvoll, denn eine solche Definition ist von der Auswahl von $\mathfrak{D}$ innerhalb von $\mathfrak{N}(\mathfrak{D})$ abhängig.

Jene Multidifferentiation $\mathfrak{D}_{\mathfrak{z}}$ läßt sich eindeutig auf K fortsetzen, sie werde auch in K mit $\mathfrak{D}_{\mathfrak{z}}$ bezeichnet und *Multidifferentiation* $\mathfrak{D}_{\mathfrak{z}}$ *von* K *nach* $\mathfrak{z}$ oder *System partieller Differentiationen nach* $\mathfrak{z}$ *in* K genannt.

Wegen der eindeutigen Fortsetzbarkeit nach § 3 ist die Fortsetzung der Komponenten gleich den Komponenten der Fortsetzung.

Es sei nun $\mathfrak{D}_{\mathfrak{x}}$ ein System partieller Differentiationen nach $\mathfrak{x}$ in K. Dann ist die $\mathfrak{u}$-Taylorreihe nach $\mathfrak{D}_{\mathfrak{x}}$ von $\mathfrak{x}$

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{D}_{\mathfrak{x}}}\{u\} = \mathfrak{x} + \mathfrak{u}.$$

Daher gilt für eine rationale Funktion $R(\mathfrak{x})$ aus $k(\mathfrak{x})$:

$$R(\mathfrak{x})_{\mathfrak{D}_{\mathfrak{x}}}\{\mathfrak{u}\} = R\{\mathfrak{x} + \mathfrak{u}\}, \tag{71}$$

woraus folgt, daß $D_{\mathfrak{x}_\nu} R(\mathfrak{x})$ der Wert der rationalen Funktion

$$\frac{R(\mathfrak{x} + \mathfrak{u}^{(\nu)}) - R(\mathfrak{x})}{u_\nu} \quad \text{bei} \quad \mathfrak{u}^{(\nu)} = u_\nu \mathfrak{e}_\nu \text{ für } u_\nu = 0$$

ist. Dies ist aber die übliche algebraische Definition der partiellen Ableitung.

Ist der Nenner von $R(\mathfrak{x})$ inkongruent 0 (mod $\mathfrak{x}$) und setzt man in (71) $\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$, so erhält man mit

$$R(\mathfrak{u}) = R(\mathfrak{x})_{\mathfrak{D}_{\mathfrak{x}}}\{\mathfrak{u}\}_{[\mathfrak{x}=\mathfrak{o}]} = \sum \mathfrak{u}^{\mathfrak{m}} \mathfrak{D}_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{m}} R(\mathfrak{o})$$

eine explizite Form der $\mathfrak{u}$-adischen Entwicklung von $R(\mathfrak{u})$ im Potenzreihenring $k\{\mathfrak{u}\}$.

Um die Ableitungen eines beliebigen Elementes y von K zu bestimmen, nehme man die irreduzible Gleichung $f(\mathfrak{x}, y) = 0$ für y mit Koeffizienten aus $k(\mathfrak{x})$. Die Taylorreihe $y_{\mathfrak{D}_{\mathfrak{x}}}\{\mathfrak{u}\}$ stellt nach Definition von $\mathfrak{D}_{\mathfrak{x}}$ als Isomorphismus diejenige Potenzreihe in $\mathfrak{u}$ mit dem Anfangsgliede y dar, die

$$f(\mathfrak{x}_{\mathfrak{D}_{\mathfrak{x}}}\{\mathfrak{u}\},\ y_{\mathfrak{D}_{\mathfrak{x}}}\{\mathfrak{u}\}), = f(\mathfrak{x} + \mathfrak{u},\ y_{\mathfrak{D}_{\mathfrak{x}}}\{\mathfrak{u}\}) = 0$$

erfüllt. Die linearen Glieder in $\mathfrak{u}$ liefern den Gradienten $\mathfrak{D}_{\mathfrak{x}} y$ von y:

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{x}} y = -\frac{1}{f_y(\mathfrak{x}, y)} f_{\mathfrak{x}}(\mathfrak{x}, y),$$

wenn $f_{\mathfrak{x}}(\mathfrak{x}, y)$ den Gradienten von $f(\mathfrak{x}, y)$ bedeutet.

Es sei jetzt irgendeine reduzierte Multidifferentiation $\mathfrak{D}$ n-ter Dimension von K/k gegeben. Aus $\| \mathfrak{D}_{\mathfrak{x}} \| = 0$ für eine separierende algebraische Basis $\mathfrak{x}$ von K/k folgt die Irregularität von $\mathfrak{D}$.

Denn $\| \mathfrak{D}\mathfrak{x} \| = 0$ ist mit der Existenz eines festen n-Tupels $\mathfrak{y} \neq \mathfrak{o}$ aus K mit der Eigenschaft

$$\sum_{\nu=1}^{n} D_\nu x_\mu \cdot y_\nu = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n)$$

gleichbedeutend; mit (20a, b) folgt dann leicht für *beliebiges* $z \in k(\mathfrak{x})$:

$$\sum_{\nu=1}^{n} D_\nu z \cdot y_\nu = 0. \tag{72}$$

Es sei

$$f(\alpha) = \sum_{\varkappa=1}^{h} z_\varkappa \alpha^\varkappa = 0, \quad z_\varkappa \in k(\mathfrak{x}), \quad z_h \neq 0, \tag{73}$$

die irreduzible Gleichung für ein Element α aus K mit Koeffizienten aus $k(\mathfrak{x})$; dann wird

$$\sum_{\nu=1}^{n} (D_\nu f(\alpha)) \cdot y_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\varkappa=1}^{h} \varkappa z_\varkappa \alpha^{\varkappa-1} D_\nu \alpha \cdot y_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\varkappa=1}^{h} \alpha^\varkappa D_\nu z_\varkappa y_\nu$$

$$= \sum_{\varkappa=1}^{h} \varkappa z_\varkappa \alpha^{\varkappa-1} \sum_{\nu=1}^{n} D_\nu \alpha \cdot y_\nu = 0.$$

Wegen der Irreduzibilität von (73) muß dann (72) also auch für $z = \alpha$ gelten; das genügt.

Es sei jetzt $\mathfrak{D}$ regulär und $\mathfrak{z}$ ein regulär-$\mathfrak{D}$-inkonstantes n-Tupel aus K. Dann ist nach § 4 die reguläre Multidifferentiation $\mathfrak{D}$ aus einer gewissen regulären Multidifferentiation $\mathfrak{D}_\mathfrak{z}^*$ $\mathfrak{z}$-ableitbar. Da die Elemente von k $\mathfrak{D}_\mathfrak{z}^*$-vollkonstant sind, folgt aus § 4, daß $\mathfrak{D}_\mathfrak{z}^*$ die Multidifferentiation $\mathfrak{D}_\mathfrak{z}$ von K nach $\mathfrak{z}$ ist.

Dann bildet aber $\mathfrak{z}$ eine separierende algebraische Basis für K/k. Denn sei $\bar{K}$ der umfassendste Teilkörper von K, der noch über $k(\mathfrak{z})$ separabel ist. K kann aus $\bar{K}$ durch sukzessive Adjunktion von p^ν-ten Wurzeln w_μ $(\nu > 0)$ erhalten werden. Für w_1 muß also eine über $k(\mathfrak{z})$ irreduzible algebraische Gleichung

$$(74) \qquad \sum_{\lambda=0}^{l} a_\lambda(\mathfrak{z})\, w_1^{\lambda p^\nu} = 0, \quad a_\lambda(\mathfrak{z}) \in k(\mathfrak{z}), \quad a_l(\mathfrak{z}) = 1$$

bestehen. Nicht alle $a_\lambda(\mathfrak{z})$ können in $k(\mathfrak{z}^p)$ liegen; denn dann wäre diese Gleichung (falls $\hat{k}$ ein algebraischer Erweiterungskörper von k ist, der die p-ten Wurzeln aller in (74) vorkommenden Elemente aus k enthält) in $\hat{k}(\mathfrak{z}^p)$ reduzibel, und damit hätte bereits $\bar{K}(w_1)$ (also erst recht K) einen *echten* Erweiterungskörper von k als Konstantenkörper.

Es kommt also ein $z_\varkappa$, etwa in $a_i(\mathfrak{z})$, in einer nicht durch p teilbaren Potenz explizit vor. Differenzieren von (74) nach $D_{z_\varkappa}$ ergibt aber dann entweder eine Gleichung höchstens $(l-1)$-ten Grades für $w_1^{p^\nu}$ oder, es folgt, falls $i = 0$ und $D_{z_\varkappa} a_\lambda(\mathfrak{z}) = 0$ ist für $\lambda \neq i$, $D_{z_\varkappa} a_0(\mathfrak{z}) = 0$. In jedem Falle hätte man einen Widerspruch, solange $\bar{K} \neq K$ ist.

Nun ist $\mathfrak{D}$ aus der Multidifferentiation $\mathfrak{D}_\mathfrak{z}$ nach jeder separierenden algebraischen Basis $\mathfrak{z}$ $\mathfrak{z}$-ableitbar, d. h. alle regulären Multidifferentiationen $\mathfrak{D}$ n-ter Dimension von K/k bilden eine Multiklasse $\mathfrak{K}$.

Jede Differentiation D von K/k ist nach § 1 durch Vorgabe der D-Taylorentwicklungen einer separierenden algebraischen Basis $\mathfrak{x}$ für K/k in K eindeutig bestimmt. Nun läßt sich aber durch

$$y_D\{u\} = y_{\mathfrak{D}_\mathfrak{x}}\{\mathfrak{v}\} \qquad \text{mit} \qquad \mathfrak{v} = \mathfrak{x}_D\{u\} - \mathfrak{x}$$

eine Differentiation D in K erklären, deren $\bar{D}$-Taylorentwicklungen von $\mathfrak{x}$ wegen $\mathfrak{x}_D\{u\} = \mathfrak{x}_{\mathfrak{D}_\mathfrak{x}}\{\mathfrak{v}\} = \mathfrak{x}_D\{u\}$ mit den D-Taylorentwicklungen übereinstimmen und die damit selbst mit D übereinstimmt. Also ist D aus jeder Multidifferentiation $\mathfrak{D}_\mathfrak{z}$ von K nach $\mathfrak{z}$ $\mathfrak{z}$-ableitbar.

Die Komponenten der Multidifferentiation von K nach $\mathfrak{z}$ sind unabhängig. Sonst wäre, wenn $\mathfrak{z}^* = (z_1, \ldots, z_{n-1})$ gesetzt wird, etwa die n-te Komponente aus ${}^{n-1}\mathfrak{K}_{\mathfrak{D}_{\mathfrak{z}^*}}$, also auch aus $\mathfrak{D}_{\mathfrak{z}^*}$ $\mathfrak{z}^*$-ableitbar; das ist aber wegen

$$z_n + u = z_{n D_n}\{u\} \neq z_{n \mathfrak{D}_{\mathfrak{z}^*}}\{\mathfrak{z}^* \bar{D}_{z_\nu}\{u\} - \mathfrak{z}^*\} = z_n$$

unmöglich. Also folgt aus der Regularität einer Multidifferentiation die Unabhängigkeit ihrer Komponenten.

Beachtet man noch, daß jede expandierte Differentiation aus einer reduzierten hervorgeht und die $\mathfrak{z}$-Ableitbarkeit dabei erhalten bleibt, so ergibt sich insgesamt:

Satz 11. *Alle regulären Multidifferentiationen n-ter Dimension von K/k sind abhängig. Je $n+1$ Differentiationen von K/k sind abhängig. Die Begriffe regulär-inkonstantes n-Tupel und separierende algebraische Basis decken sich. Der $\mathfrak{K}$-Normalisator einer regulären Multidifferentiation n-ter Dimension fällt mit seinem $\mathfrak{K}$-Zentralisator zusammen.*

Eingegangen 12. November 1950.

Fabersche Entwicklungen auf geschlossenen Riemannschen Flächen*).

Von *Horst Tietz* in Braunschweig.

Fast alle Sätze über eindeutige Funktionen auf der schlichten Kugel beruhen auf der Theorie der Potenzreihen.

Der Frage, ob und wie sich diese zahlreichen Ergebnisse auf Riemannsche Flächen übertragen lassen, hat also die Lösung der folgenden Aufgabe voranzugehen, die wir für *geschlossene* Riemannsche Flächen spezialisieren:

In einem Teil G einer geschlossenen Riemannschen Fläche $\mathfrak{A}$ soll jede in G reguläre und eindeutige Funktion durch zu $\mathfrak{A}$ gehörige algebraische Funktionen approximiert werden.

Dem genannten Zweck entsprechend werden wir — wie ja auch die Potenzreihen das speziellste, aber handlichste Hilfsmittel darstellen — zu G unter gewissen Voraussetzungen ein Funktionensystem mit einfachsten Eigenschaften konstruieren, nach welchem jede in G reguläre und eindeutige Funktion in eine in G konvergente Reihe entwickelt werden kann[1]).

Der nächstliegende Versuch wäre, die Potenzreihen auf $\mathfrak{A}$ zu übertragen. Er gelingt nur, wenn $\mathfrak{A}$ schlichtartig ist, mittels der einwertigen Uniformisierenden. Ihre Existenz ist gleichbedeutend mit der Definierbarkeit von Kreisen im Großen auf $\mathfrak{A}$. Ohne eine solche metrische Annahme, nur mittels des topologischen Umgebungsbegriffes entwickelt dagegen Herr G. Faber[2]) seine Polynomreihen, denen sich als Spezialfall die Potenzreihen unterordnen.

Wir wollen zeigen, daß die Fabersche Methode hinreichend allgemein ist, um sich direkt auf unser Problem anwenden zu lassen[3]).

Herr Faber setzt von dem schlichten Entwicklungsgebiet G voraus, daß es von einer zusammenhängenden, singularitätenfreien analytischen Kurve C berandet wird, die also die schlichte y-Kugel in zwei Gebiete G und $\overline{G}$ zerlegt. Wesentlich ist, daß $\overline{G}$ einfach zusammenhängend ist, damit es konform auf einen Kreis abgebildet werden kann. Diese Abbildung werde von der Funktion $\eta = \psi(y)$ geleistet, wobei sich $\eta = 0$ und $y = \infty$ entsprechen mögen. Anders ausgedrückt: $\overline{G}$ wird als Umgebung der *Charakterisierungsstelle* $y = \infty$ aufgefaßt und durch die Ortsuniformisierende η dargestellt.

---

*) Als Dissertation von der Philosophischen Fakultät der Universität Marburg angenommen (Marburg 1950).

[1]) Dem gegenüber haben die Herren *H. Behnke* und *F. Stein*, Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen, Math. Ann. **120** (1949), S. 430—461), die genauen Bedingungen aufgestellt für die Gültigkeit des Rungeschen Entwicklungssatzes auf höheren — übrigens nichtgeschlossenen — Riemannschen Flächen.

[2]) *G. Faber*, Über polynomische Entwicklungen, Math. Ann. **57** (1903), S. 389—408.

[3]) Herr *M. Krafft* wies mich schon 1946 auf diese Möglichkeit hin, sowie darauf, daß eine Reihe der folgenden Ergebnisse mit Hilfe der Weierstrass-Königschen Theorie gewonnen werden könnte. Der vorliegenden Arbeit wird hingegen der Riemannsche Standpunkt zugrunde gelegt.

Nun sei $f(y)$ in G und auf C regulär, und z sei ein Punkt in G. In dem Integral $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(y)\frac{dy}{y-z}$ betrachtet Herr Faber den Integrationsweg C als Umlauf einmal um die Polstelle z, zum andern um die Polstelle ∞ des Differentials $\frac{dy}{y-z}$. Er erhält dadurch einmal die Cauchysche Integraldarstellung von $f(z)$ und zum anderen die Entwicklung von $f(z)$ nach *Faberschen Polynomen*, wenn er die noch für y auf C gleichmäßig konvergente Entwicklung $\frac{dy}{y-z}=\frac{d\eta}{\eta}\Sigma P_n(z)\,\eta^n$ in obiges Integral einführt und gliedweise integriert; tatsächlich zeigt die Darstellung $P_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{1}{\eta^n}\frac{dy}{y-z}$, daß die $P_n(z)$ Polynome sind. Erst für diesen Nachweis wird benutzt, daß $\frac{dy}{y-z}$ in z eine analytische Funktion ist.

Die Tatsache, daß $\overline{G}$ einfach zusammenhängend ist, folgt für die schlichte Kugel aus den Voraussetzungen über C. Für eine nicht schlichtartige Fläche $\mathfrak{A}$ werden wir sie dagegen fordern müssen. Jedoch wird später (Satz 8) gezeigt, daß diese Forderung durch Abänderung von $\mathfrak{A}$ stets erfüllt werden kann.

Das einzige Hilfsmittel für die Fabersche Entwicklung ist das Differential $\frac{dy}{y-z}$, das zur Cauchyschen Integralformel führt und die Faberschen Polynome erzeugt. Dasselbe leistet auf einer geschlossenen Riemannschen Fläche $\mathfrak{A}$ ein Differential 3. Gattung $dF(\mathfrak{y},\mathfrak{z})$, das *Elementardifferential in zwei Veränderlichen*, wie es schon von Weierstraß[4]) angegeben worden ist. Wir werden $dF(\mathfrak{y},\mathfrak{z})$ nach den Gedanken der Herren König und Krafft[5]) konstruieren. Es hat als Differential in $\mathfrak{y}$ nur die (einfachen) Pole $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{d}$, wobei $\mathfrak{d}$ die Rolle von $y=\infty$ im Faberschen Falle spielt. Damit $dF(\mathfrak{y},\mathfrak{z})$ als Funktion von $\mathfrak{z}$ analytisch ist, wird es in $\mathfrak{y}$ *algebraisch normiert*, d. h. es wird ein bestimmtes Verhalten an der *Charakterisierungsstelle* $\mathfrak{d}$ gefordert, das die Wahl einer festen Ortsuniformisierenden bei $\mathfrak{d}$ voraussetzt. Als solche wird wie oben diejenige Funktion gewählt, durch die G als Umgebung von $\mathfrak{d}$ konform auf einen Kreis abgebildet wird. Dadurch wird (außer für das Geschlecht Null) $dF(\mathfrak{y},\mathfrak{z})$ selbst schon vom Entwicklungsgebiet G abhängig.

§ 1. Definition und allgemeine Sätze.

$\mathfrak{A}$ ist eine geschlossene Riemannsche Fläche vom Geschlecht p, deren Punkte mit deutschen Buchstaben bezeichnet werden.

Zu jedem Punkt $\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{A}$ gehört eine Ortsuniformisierende, die auf $\mathfrak{A}$ in einer Umgebung von $\mathfrak{p}$ definiert ist und diese Umgebung konform auf ein schlichtes Gebiet abbildet. Die Punkte $\mathfrak{y}$ bzw. $\mathfrak{z}$ der Umgebung von $\mathfrak{p}$ werden also durch die Werte η bzw. ζ dieser Ortsuniformisierenden dargestellt.

Ein Funktionselement ist für die Umgebung eines Punktes $\mathfrak{p}$ definiert durch eine Potenzreihe in der zu $\mathfrak{p}$ gehörenden Ortsuniformisierenden ζ mit höchstens endlich vielen negativen Exponenten. Der kleinste wirklich vorkommende Exponent ist die Ordnung des Elementes. Das Element ist regulär, wenn seine Ordnung nicht negativ ist, andernfalls hat es in $\mathfrak{p}$ einen Pol.

Nun sei $\overline{\mathfrak{p}}$ mit der zugehörigen Ortsuniformisierenden $\overline{\zeta}$ ein Punkt in hinreichender Nähe von $\mathfrak{p}$. Wir bezeichnen die Zuordnung der Elemente $\mathfrak{P}(\zeta)$ und $\mathfrak{Q}(\overline{\zeta})$ als *invariante*

---

[4]) *K. Weierstrass*, Math. Werke 4, Berlin 1902, S. 73 ff., dort bezeichnet mit $H(x, y; x', y')\,dx$.

[5]) *R. König* und *M. Krafft*, Elliptische Funktionen, Berlin 1928, 4. Kap.; dort bezeichnet mit $dF^1(\mathfrak{y}, \mathfrak{z}; 3)$.

analytische Fortsetzung, wenn in allen gemeinsamen Konvergenzpunkten $\mathfrak{Q}(\overline{\zeta}) = \mathfrak{P}(\zeta)$ ist, dagegen als *kovariante analytische Fortsetzung*, wenn statt dessen $\mathfrak{Q}(\overline{\zeta}) = \mathfrak{P}(\zeta)\,\frac{d\zeta}{d\overline{\zeta}}$ gilt. Es ist zweckmäßig, diese Definition auf $\overline{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$, also auf *Transformationen der Ortsuniformisierenden* zu erweitern.

Die Gesamtheit von Funktionselementen, die untereinander durch eine Art analytischer Fortsetzung zusammenhängen, bilden eine *analytische Funktion* $f(\mathfrak{z})$ bzw. ein *analytisches Differential* $dg(\mathfrak{z})$. — Der Quotient zweier Differentiale ist eine Funktion.

Unter der Gruppe von Transformationen der Ortsuniformisierenden eines Punktes $\mathfrak{p}$ bleiben die *Ordnungen* von Funktionen und Differentialen invariant; Invarianten sind weiter für eine Funktion ihr *Wert* in $\mathfrak{p}$ und für ein Differential sein *Residuum* in $\mathfrak{p}$, der Koeffizient von $\frac{1}{\zeta}$ in seinem zu $\mathfrak{p}$ und ζ gehörigen Element. Einem Differential $dg(\mathfrak{z})$ kommt ein Wert in $\mathfrak{p}$ nur bezüglich einer Ortsuniformisierenden ζ zu, der durch $\frac{dg(\mathfrak{z})}{d\zeta}$ bezeichnet wird. Die *Integraldefinition* $\int\limits_C dg(\mathfrak{z}) = \int\limits_C \frac{dg(\mathfrak{z})}{d\zeta}\,d\zeta$ ist sinnvoll, d. h. das Integral ist unabhängig von der Wahl der zu den Punkten des Integrationsweges C gehörigen Ortsuniformisierenden.

Nur für die schlichte Ebene (und die ihr äquivalenten Flächen) fallen Funktionen und Differentiale zusammen, da die Ortsuniformisierende überall so gewählt werden kann, daß auf der ganzen Fläche $\frac{d\zeta}{d\zeta} \equiv 1$ wird; so ist es z. B. nur in diesem Falle sinnvoll, von dem Residuum einer Funktion zu sprechen. Wir werden daher allen Aussagen über Funktionen die entsprechenden über Differentiale gegenüberstellen.

Sind Funktionen oder Differentiale überall auf $\mathfrak{A}$ definiert — sie sind dann bis auf Pole regulär — und sind sie eindeutig, so sagen wir, sie seien *auf* $\mathfrak{A}$ *von rationalem Verhalten* oder *zu* $\mathfrak{A}$ *gehörig*. Für sie gelten die folgenden *Sätze*:

Eine polfreie Funktion ist konstant.

Es gibt genau p linear unabhängige Differentiale 1. Gattung (polfreie Differentiale).

Die Summe der Residuen eines Differentials ist Null; daher hat ein Differential 3. Gattung (bei dem nicht alle Residuen Null sind) mindestens zwei Pole.

Für $p > 0$ gibt es keine genau einpolige Funktion.

Eine Funktion nimmt jeden Wert nur an endlich vielen Punkten an (und zwar alle Werte gleich oft).

Riemann-Rochscher Satz. $k(\mathfrak{z})$ sei eine zahlentheoretische Funktion auf $\mathfrak{A}$, die in fast allen Punkten verschwindet. Es sei $m = \sum\limits_{\mathfrak{z}} k(\mathfrak{z})$. Zwischen der Anzahl Δ der linear unabhängigen Differentiale, die in jedem $\mathfrak{z}$ mindestens die Ordnung $k(\mathfrak{z})$ besitzen, und der Anzahl Φ der linear unabhängigen Funktionen, die dort mindestens von der Ordnung $-k(\mathfrak{z})$ sind, besteht die Beziehung

$$\Phi = \Delta + m + 1 - p.$$

Außer diesen Sätzen wird noch der weitere Satz benutzt, daß man jedes einfach zusammenhängende Gebiet G von $\mathfrak{A}$ konform auf einen Kreis abbilden kann, und daß sich die Abbildungsfunktion auf dem Rand C von G noch regulär verhält, wenn C eine analytische Kurve ist. Dabei definieren wir: Die Kurve C auf $\mathfrak{A}$ heißt *analytisch*, wenn sie geschlossen und einfach ist, und wenn es zu jedem ihrer Punkte $\mathfrak{p}$ eine Orts-

uniformisierende ζ gibt, die einen durch $\mathfrak{p}$ verlaufenden Bogen von C auf ein durch $\zeta = 0$ hindurchgehendes Stück der reellen ζ-Achse eineindeutig abbildet.

Wir setzen noch fest, daß $\mathfrak{P}(\ldots)$ und $\mathfrak{Q}(\ldots)$ für das Folgende *reguläre* Potenzreihen bedeuten sollen.

Das zu einem Gebiet G auf $\mathfrak{A}$ komplementäre Gebiet wird mit $\overline{G}$ bezeichnet.

§ 2. Integralsätze.

Die folgenden Sätze beziehen sich auf ein Gebiet G von $\mathfrak{A}$, das von einer analytischen Kurve C berandet wird.

Satz 1a. *$dh(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ sei in G als Funktion von $\mathfrak{z}$ und längs C als Differential in $\mathfrak{y}$ ebenso wie die Funktion $f(\mathfrak{y})$ regulär und eindeutig. Dann ist $f^*(\mathfrak{z}) = \int\limits_{\mathfrak{y}(C)} f(\mathfrak{y})\, dh(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ in G eine reguläre und eindeutige Funktion.*

Beweis. Die Eindeutigkeit ist klar.

Jedem Punkt $\mathfrak{y}$ von C ist eine endliche η-Umgebung auf C zugeordnet. Nach dem Heine-Borelschen Theorem genügen endlich viele dieser Bögen, um C zu überdecken: $C = C_1 + \cdots + C_N$. Es genügt, die Regularität für jedes $f_i^*(\mathfrak{z}) = \int\limits_{\mathfrak{y}(C_i)} f(\mathfrak{y})\, dh(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ zu beweisen.

Für alle $\mathfrak{y}$ auf C_i und $\mathfrak{z}$ in einer Umgebung eines Punktes $\mathfrak{p}$ von G besitzt die Entwicklung des Integranden nach Potenzen von ζ einen gemeinsamen endlichen Konvergenzradius ϱ, so daß also für $|\zeta| \leqq \varrho$ die Reihe $f(\mathfrak{y}) \dfrac{dh(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})}{d\eta} = \sum a_n(\eta)\, \zeta^n$ konvergiert bei beliebigem $\mathfrak{y}$ auf C_i. Die Koeffizienten $a_n(\eta)$ sind jedenfalls stetige Funktionen. Die Reihe konvergiert aber gleichmäßig in η bei festem ζ, sie darf also gliedweise integriert werden, und das ergibt die Behauptung. Die gleichmäßige Konvergenz folgt aus der Abschätzung

$$|a_n(\eta)| \leqq \frac{1}{\zeta^n}\, \overline{\text{fin}} \left| f(\mathfrak{y})\, \frac{dh(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})}{d\eta} \right|;$$

und daß $\overline{\text{fin}} \left| f(\mathfrak{y})\, \dfrac{dh(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})}{d\eta} \right|$ endlich ist, ist der eigentliche Inhalt des Hartogsschen Fundamentalsatzes[6]).

Ebenso wird bewiesen

Satz 1b. *$dk(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ sei in G als Differential in $\mathfrak{y}$ und längs C als Funktion in $\mathfrak{z}$ ebenso wie das Differential $dg(\mathfrak{z})$ regulär und eindeutig. Dann ist $dg^*(\mathfrak{y}) = \int\limits_{\mathfrak{z}(C)} dg(\mathfrak{z})\, dk(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ in G ein reguläres und eindeutiges Differential.*

Spezieller ist die *Cauchysche Integralformel*:

Satz 2. *In G und auf C sei $dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ als Differential in $\mathfrak{y}$ und als Funktion in $\mathfrak{z}$ eindeutig und regulär außer für $\mathfrak{y} = \mathfrak{z}$; wenn $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ beide in der Umgebung eines Punktes $\mathfrak{p}$ liegen, sei $\dfrac{1}{\eta - \zeta}$ der Hauptteil von $\dfrac{dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})}{d\eta}$. Wenn weiter die Funktion $f(\mathfrak{y})$ und das Differential $dg(\mathfrak{z})$ in G und auf C regulär und eindeutig sind, gelten in G die Darstellungen*[7])

---

[6]) *H. Behnke*, Funktionen zweier komplexer Veränderlicher **1**, Münster 1930/31, S. 115 ff.

[7]) $dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ braucht übrigens für (1) in $\mathfrak{z}$ und für (2) in $\mathfrak{y}$ nicht analytisch zu sein.

$$(1) \qquad f(\mathfrak{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathfrak{y}(C)} f(\mathfrak{y})\, dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$$

und

$$(2) \qquad dg(\mathfrak{y}) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathfrak{z}(C)} dg(\mathfrak{z})\, dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z}).$$

Beweis zu (1) (der Beweis zu (2) verläuft ebenso). $\mathfrak{A}$ wird durch endlich viele Dreiecke trianguliert. Von diesen werden gegebenenfalls wieder diejenigen zu einem einfach zusammenhängenden Gebiet (Dreickspaar oder Dreickstern) vereinigt, die $\mathfrak{z}$ auf dem Rande enthalten. Dadurch wird G in endlich viele einfach zusammenhängende Gebiete zerlegt, auf deren Rändern der Integrand stetig ist.

Da Riemannsche Flächen zweiseitig sind, ist obiges Integral gleich der Summe der Integrale über die einzelnen Ränder. Nach dem Residuensatz verschwinden diese alle bis auf dasjenige, das zu dem $\mathfrak{z}$ enthaltenden Gebiet gehört, welches $f(\mathfrak{z})$ ergibt.

§ 3. Das Elementardifferential $dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$.

Für die Beweise dieses Abschnittes wird $\mathfrak{A}$ als *Überlagerungsfläche der schlichten Kugel* $\mathfrak{K}$ angesehen, deren Punkte mit lateinischen Buchstaben bezeichnet werden.

Nach dem Riemann-Rochschen Satz gibt es genau $p + 1$ linear unabhängige eindeutige Differentiale, die höchstens an zwei vorgegebenen Punkten $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{d}$ einfache Pole haben. Unter diesen befinden sich p linear unabhängige Differentiale 1. Gattung und ein wirklich unstetiges Differential 3. Gattung. Über das willkürliche Differential 1. Gattung verfügen wir durch folgende **algebraische Normierung:**

$dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ sei in $\mathfrak{y}$ ein Differential 3. Gattung mit den Polstellen $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{d}$.

An der *Charakterisierungsstelle* $\mathfrak{d}$ sei die Ortsuniformisierende *fest* vorgegeben. In ihr habe $dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ bei $\mathfrak{d}$ eine Entwicklung $\dfrac{dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})}{d\eta} = -\dfrac{1}{\eta} + \eta^p \mathfrak{P}(\eta)$.

Das Residuum an dem einfachen Pol $\mathfrak{z}$ ist dann $+ 1$.

Behauptung. Bezüglich der Möglichkeit dieser Normierung kann $\mathfrak{d}$ bis auf *endlich viele* — von $\mathfrak{z}$ und der speziellen Wahl der Ortsuniformisierenden bei $\mathfrak{d}$ unabhängige — Ausnahmepunkte (Weierstrasspunkte) beliebig gewählt werden, und $dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ ist eindeutig bestimmt.

Beweis. $d\omega_1, \ldots, d\omega_p$ sei eine Basis für die Differentiale 1. Gattung. Die genaue Bedingung für die Möglichkeit obiger Normierung ist, daß die Determinante

$$\left| \frac{d^i \omega_k}{d\eta^i} \right| \quad (1 \leqq i, k \leqq p)$$

bei $\mathfrak{d}$ nicht verschwindet, oder, was dasselbe ist, daß kein Differential 1. Gattung existiert, das bei $\mathfrak{d}$ eine p-fache Nullstelle besitzt. Diese Bedingung für $\mathfrak{d}$ ist tatsächlich nur von der Struktur der Fläche $\mathfrak{A}$ abhängig. Nun ist

$$\left| \frac{d^i \omega_k}{d\eta^i} \right| = \left| \frac{d^i \omega_k}{dy^i} \right| \cdot \left(\frac{dy}{d\eta} \right)^{\frac{p(p+1)}{2}}.$$

Die Nullstellen der linken Seite finden sich unter den Nullstellen eines der beiden Faktoren der rechten Seite. Der zweite Faktor hat jedenfalls nur endlich viele Nullstellen (Verzweigungspunkte). Der erste Faktor ist einerseits die Wronskische Determinante der

linear-unabhängigen Funktionen $\frac{d\omega_1}{dy}, \ldots, \frac{d\omega_p}{dy}$, verschwindet also nicht identisch, andererseits eine Funktion rationalen Verhaltens auf $\mathfrak{A}$, und hat daher nur endlich viele Nullstellen.

Analytizität in $\mathfrak{z}$. Die Stelle $\mathfrak{d}$ wird für das folgende fest gewählt. Für jedes $\mathfrak{z}$ ist $dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ eindeutig bestimmt, so daß wir die Frage stellen können, wie es von $\mathfrak{z}$ abhängt. Mit beliebigem, aber festem $\mathfrak{z}_0$ wird gesetzt:

$$df(\mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z}) - dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z}_0).$$

Behauptung. $df(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ und damit $dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ ist in $\mathfrak{z}$ auf $\mathfrak{A}$ eine Funktion rationalen Verhaltens.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß $\mathfrak{d}$ nicht im Unendlichen liegt, und daß die Blätterzahl n von $\mathfrak{A}$ nicht kleiner als das Geschlecht p ist[8]).

Als Differential in $\mathfrak{y}$ ist $(y - z)\, df(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ eindeutig, hat im Unendlichen höchstens n Pole, bei $\mathfrak{z}_0$ höchstens einen Pol 1. Ordnung und ist bei $\mathfrak{d}$ mindestens von der Ordnung p und sonst mindestens von der Ordnung 0. Nach dem Riemann-Rochschen Satz gibt es genau n linear-unabhängige Differentiale $d\varphi_i(\mathfrak{y})$ mit diesen Eigenschaften, aus denen sich $(y - z)\, df(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ linear zusammensetzt:

$$(y - z)\, df(\mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = \sum_1^n c_i(\mathfrak{z})\, d\varphi_i(\mathfrak{y}).$$

Nun sei fürs erste der Spurpunkt z von $\mathfrak{z}$ weder ∞ noch ein Verzweigungspunkt, so daß $y - z$ zu jedem der n konjugierten Punkte $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n$ eine Ortsuniformisierende ist. Setzt man dann $\psi_i(\mathfrak{y}) = \frac{d\varphi_i(\mathfrak{y})}{dy}$, so folgt aus den Eigenschaften von $df(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$:

$$(y - z)\, \frac{df(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})}{dy} = \begin{cases} 1 & \text{für } \mathfrak{y} = \mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z} \\ 0 & \text{für } \mathfrak{y} = \mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_n \end{cases}.$$

Also ist

$$\sum_{i=1}^n c_i(\mathfrak{z})\, \psi_i(\mathfrak{z}_k) = \delta_{1k} \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der $\psi_i(\mathfrak{z})$ verschwindet die Determinante dieses Gleichungssystems nicht identisch. Daher sind die $c_i(\mathfrak{z})$ eindeutig bestimmt, und zwar wegen der Symmetrie- und Regularitätseigenschaften des Systems als Funktionen von rationalem Verhalten auf $\mathfrak{A}$. Mit diesen $c_i(\mathfrak{z})$ ist also $df(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ eine Funktion in $\mathfrak{z}$, die sich auf $\mathfrak{A}$ rational verhält. Es ist noch zu zeigen, daß es auch, wenn $\mathfrak{z}$ einen der oben ausgeschlossenen Punkte bedeutet, die Definitionseigenschaften besitzt. Diese besagen aber, daß für gewisse k die Koeffizienten von η^k in den Entwicklungen von $\frac{df(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})}{d\eta}$ für $\mathfrak{y}$ bei $\mathfrak{z}_0$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{z}$ konstant — nämlich — 1, 0 oder + 1 — sein sollen. Durch $\frac{1}{2\pi i} \int \frac{df(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})}{\eta^{k+1}}$ werden diese Koeffizienten nach Satz 1a in Umgebungen beliebiger Punkte von $\mathfrak{A}$ als reguläre Funktionen in $\mathfrak{z}$ dargestellt. Dort sind sie fast überall, also identisch konstant.

Pole in $\mathfrak{z}$. Da $dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ bei festem $\mathfrak{y}$ für jedes von $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{d}$ verschiedene $\mathfrak{z}$ endlich bleibt, kann es als Funktion von $\mathfrak{z}$ höchstens an jenen Punkten Pole aufweisen. Für $\mathfrak{z}$ bei $\mathfrak{y}$ hat $dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ offenbar einen Pol 1. Ordnung. Wenn noch gezeigt ist, daß $dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ für $\mathfrak{z}$ bei $\mathfrak{d}$ einen Pol höchstens p-ter Ordnung hat, gilt

[8]) Durch eine birationale Transformation kann z. B. immer $n = p + 1$ erreicht werden.

Satz 3. *Wenn bei* $\mathfrak{d}$ *die Ortsuniformisierende vorgegeben ist, und wenn kein Differential* 1. *Gattung mit einer p-fachen Nullstelle bei* $\mathfrak{d}$ *existiert, so ist das Elementardifferential* 3. *Gattung* $dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ *eindeutig bestimmt durch seine einzigen und zwar einfachen Pole mit den Residuen* $+1$ *und* -1 *für* $\mathfrak{y}$ *bei* $\mathfrak{z}$ *bzw.* $\mathfrak{d}$ *und durch die algebraische Normierung*

$$\frac{dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})}{d\eta}\Big| = -\frac{1}{\eta} + \eta^p \mathfrak{P}(\eta) \quad \textit{für } \mathfrak{y} \textit{ bei } \mathfrak{d}.$$

Als Funktion von $\mathfrak{z}$ *verhält sich* $dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ *auf* $\mathfrak{A}$ *rational und hat nur die Pole* $\mathfrak{y}$ *und* $\mathfrak{d}$ *von* 1. *bzw. p-ter Ordnung. Insbesondere besteht für* $\mathfrak{y}$ *und* $\mathfrak{z}$ *bei* $\mathfrak{d}$ *eine Entwicklung*

$$\frac{dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})}{d\eta} = -\frac{1}{\eta} + \left(\frac{\eta}{\zeta}\right)^p \frac{1}{\eta - \zeta} + \left(\frac{\eta}{\zeta}\right)^p \mathfrak{P}(\eta, \zeta). \tag{3}$$

Beweis. Der noch ausstehende Nachweis, daß $dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ für $\mathfrak{z}$ bei $\mathfrak{d}$ einen Pol höchstens p-ter Ordnung besitzt, wird am einfachsten mittels der im folgenden Paragraphen angewandten Methode indirekt geführt: Da sich $dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ in $\mathfrak{z}$ rational verhält, handelt es sich bei $\mathfrak{d}$ jedenfalls um einen Pol etwa von der *genauen* Ordnung q. Statt (3) besteht dann eine Entwicklung

$$\begin{aligned} \frac{dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})}{d\eta} &= -\frac{1}{\eta} + \left(\frac{\eta}{\zeta}\right)^p \frac{1}{\eta - \zeta} + \frac{\eta^p}{\zeta^q} \mathfrak{P}(\eta, \zeta) \\ &= \frac{1}{\zeta}\left\{-\frac{\zeta}{\eta} + \sum_{l > -p} \left(\frac{\zeta}{\eta}\right)^l + \eta^p \sum_{l > -q} \zeta^l \mathfrak{Q}_l(\eta)\right\} \end{aligned} \tag{A}$$

mit $|\zeta| < |\eta|$, während für beliebiges $\mathfrak{y} \neq \mathfrak{d}$

$$dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = \frac{1}{\zeta} \sum_{n > -q} d\mathfrak{F}_n(\mathfrak{y})\, \zeta^n$$

sein muß, worin z. B.

$$d\mathfrak{F}_{-(q-1)}(\mathfrak{y}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|} \zeta^{q-1} dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})\, d\zeta \tag{B}$$

nach Satz 1b ein überall auf $\mathfrak{A}$ außer evtl. bei $\mathfrak{d}$ reguläres und eindeutiges Differential ist. Seine Entwicklung bei $\mathfrak{d}$ lautet nach (A) und (B), jetzt $q > p$ angenommen,

$$\frac{d\mathfrak{F}_{-(q-1)}(\mathfrak{y})}{d\eta} = \eta^p \mathfrak{Q}_{-(q-1)}(\eta).$$

Wegen der p-fachen Nullstelle bei $\mathfrak{d}$ ist dann $d\mathfrak{F}_{-(q-1)}(\mathfrak{y}) \equiv 0$, die Ordnung des Poles $\mathfrak{d}$ ist kleiner als q, entgegen der Annahme, q sei die genaue Polordnung. Es folgt $q \leqq p$.

§ 4. $dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ als erzeugender Ausdruck.

Es bestehen Entwicklungen

$$\frac{dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})}{d\eta} = \frac{1}{\eta} \sum_0 \mathfrak{E}_n(\mathfrak{z})\, \eta^n \text{ für } \mathfrak{z} \neq \mathfrak{d} \text{ und } \mathfrak{y} \text{ bei } \mathfrak{d} \tag{4}$$

sowie

$$dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = \frac{1}{\zeta} \sum_{n > -p} d\mathfrak{F}_n(\mathfrak{y})\, \zeta^n \text{ für } \mathfrak{y} \neq \mathfrak{d} \text{ und } \mathfrak{z} \text{ bei } \mathfrak{d}. \tag{5}$$

Die Koeffizienten ergeben sich als

$$\mathfrak{E}_n(\mathfrak{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{y}(C)} \frac{dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})}{\eta^n} \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{6}$$

und

$$d\mathfrak{F}_n(\mathfrak{y}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{z}(C)} \frac{dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})}{\zeta^n}\, d\zeta \qquad (n = -(p-1), \ldots, 0, 1, \ldots), \tag{7}$$

wobei C eine hinreichend kleine Umgebung von $\mathfrak{d}$ beranden möge.

Aus den Sätzen 1a und 1b folgt, daß die $\mathfrak{E}_n(\mathfrak{z})$ und $d\mathfrak{F}_n(\mathfrak{y})$ außer bei $\mathfrak{d}$ auf $\mathfrak{A}$ reguläre und eindeutige Funktionen bzw. Differentiale sind. Ihre Entwicklungen bei $\mathfrak{d}$ ergeben sich, wenn man (3) einmal als Entwicklung nach η und zum anderen nach ζ auffaßt:

$\mathfrak{E}_n(\mathfrak{z})$ ist für $\mathfrak{z}$ bei $\mathfrak{d}$ nach (6) gleich dem Koeffizienten von $\frac{1}{\eta}$ in

$$\frac{1}{\eta^n}\frac{dF(\mathfrak{y},\mathfrak{z})}{d\eta} = \frac{1}{\eta^{n+1}}\left\{-1-\sum_{l>p}\left(\frac{\eta}{\zeta}\right)^l + \frac{1}{\zeta^p}\sum_{l>p}\eta^l\mathfrak{P}_l(\zeta)\right\},$$

also gleich

$$\begin{array}{ll} -1 & \text{für } n=0, \\ 0 & \text{für } 1\leqq n\leqq p, \\ -\frac{1}{\zeta^n}+\frac{1}{\zeta^p}\mathfrak{P}_n(\zeta) & \text{für } n\geqq p+1. \end{array}$$

Da es auf $\mathfrak{A}$ keine nicht konstante polfreie Funktion gibt, folgt

$$\mathfrak{E}_n(\mathfrak{z}) = \begin{cases} -1 & \text{für } n=0, \\ 0 & \text{für } 1\leqq n\leqq p. \end{cases}$$

$\frac{d\mathfrak{F}_n(\mathfrak{y})}{d\eta}$ ist für $\mathfrak{y}$ bei $\mathfrak{d}$ nach (7) gleich dem Koeffizienten von $\frac{1}{\zeta}$ in

$$\frac{1}{\zeta^n}\frac{dF(\mathfrak{y},\mathfrak{z})}{d\eta} = \frac{1}{\zeta^{n+1}}\left\{-\frac{\zeta}{\eta}+\sum_{l>-p}\left(\frac{\zeta}{\eta}\right)^l + \eta^p\sum_{l>p}\zeta^l\mathfrak{Q}_l(\eta)\right\},$$

also gleich

$$\begin{array}{ll} \eta^p\mathfrak{Q}_1(\eta) & \text{für } n=1, \\ \frac{1}{\eta^n}+\eta^p\mathfrak{Q}_n(\eta) & \text{für } -(p-1)\leqq n\leqq 0 \text{ und } n\geqq 2. \end{array}$$

$d\mathfrak{F}_1(\mathfrak{y})$ ist ein Differential 1. Gattung mit einer p-fachen Nullstelle bei $\mathfrak{d}$, also identisch Null.

Da kein Differential 1. Gattung p-fach bei $\mathfrak{d}$ verschwindet, existiert nach dem Riemann-Rochschen Satz außer der Konstanten auch keine zu $\mathfrak{A}$ gehörige Funktion, die nur bei $\mathfrak{d}$ — und zwar höchstens von p-ter Ordnung — polar unstetig ist. Ebenso hat ein zu $\mathfrak{A}$ gehöriges Differential, das nur bei $\mathfrak{d}$ unstetig ist, dort einen Pol von mindestens 2. Ordnung.

Damit erhalten wir

Satz 4. *$dF(\mathfrak{y},\mathfrak{z})$ erzeugt vermöge (4) und (5) je ein vollständiges System zu $\mathfrak{A}$ gehöriger* **Elementarfunktionen** $\mathfrak{E}_n(\mathfrak{z})$ *und* **Elementardifferentiale** $d\mathfrak{F}_n(\mathfrak{y})$. *Sie sind auf $\mathfrak{A}$ eindeutig und überall regulär außer an der Charakterisierungsstelle $\mathfrak{d}$, für die der Index n die genaue Polordnung angibt. Außerdem sind sie bei $\mathfrak{d}$ in der festgewählten Ortsuniformisierenden algebraisch normiert vermöge*

$$\mathfrak{E}_n(\mathfrak{z}) = -\frac{1}{\zeta^n}+\frac{1}{\zeta^p}\mathfrak{P}_n(\zeta) \qquad (n=0 \text{ und } n>p) \tag{8}$$

und

$$\frac{d\mathfrak{F}_n(\mathfrak{y})}{d\eta} = \frac{1}{\eta^n}+\eta^p\mathfrak{Q}_n(\eta) \qquad (n>-p \text{ und } n\neq 1). \tag{9}$$

Während $\mathfrak{E}_0(\mathfrak{z})\equiv -1$ die einzige polfreie Funktion unter den $\mathfrak{E}_n(\mathfrak{z})$ ist, kommen p linear unabhängige Differentiale 1. Gattung für $-p<n\leqq 0$ unter den $d\mathfrak{F}_n(\mathfrak{y})$ vor.

Zwischen den $\mathfrak{E}_n(\mathfrak{z})$ und $d\mathfrak{F}_n(\mathfrak{y})$ einerseits und den Potenzen der Ortsuniformisierenden andererseits besteht eine *Reziprozität*. Aus (8) und (9) ergibt sich nämlich

$$(10) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|} \mathfrak{E}_n(\mathfrak{z})\,\zeta^{k-1}d\zeta = -\,\delta_{nk} \qquad \text{für } n, k \begin{cases} = 0 \\ > p \end{cases}$$

und

$$(11) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta|} d\mathfrak{F}_n(\mathfrak{y})\,\eta^{k-1} = \delta_{nk} \qquad \text{für } n, k \begin{cases} > -p \\ \neq 1 \end{cases}.$$

§ 5. Abschätzungen.

Die bei $\mathfrak{d}$ vorgegebene Ortsuniformisierende $\eta = \psi(\mathfrak{y})$ leistet eine konforme Abbildung einer Umgebung von $\mathfrak{d}$ auf eine Umgebung von $\eta = 0$ in der η-Ebene. Den Kreisen $K_r(|\eta| = r)$ entsprechen dabei Kurven C_r auf $\mathfrak{A}$. Die durch sie gegebenen Umgebungen mögen genau für $r < R$ konform auf einander bezogen sein. Daher sind für $r < R$ die Kurven C_r analytisch und zerlegen $\mathfrak{A}$ in zwei Gebiete G_r und $\overline{G}_r$, von denen $\overline{G}_r$ die Umgebung von $\mathfrak{d}$ sein möge. Die Kurve C_R weist dagegen eine Singularität auf.

Die Potenzreihe in (4) $\eta\dfrac{dF(\mathfrak{y},\mathfrak{z})}{d\eta} = \sum \mathfrak{E}_n(\mathfrak{z})\,\eta^n$ konvergiert genau für $|\eta| < R$, wenn $\mathfrak{z}$ in G_R oder auf C_R liegt, und für $|\eta| < |\zeta|$, wenn $\mathfrak{z}$ mit $\zeta = \psi(\mathfrak{z})$ in $\overline{G}_R$ liegt. Es ist also der reziproke Konvergenzradius

$$(12) \qquad \overline{\lim}\,\sqrt[n]{|\mathfrak{E}_n(\mathfrak{z})|} = \frac{1}{R} \qquad \text{für } \mathfrak{z} \text{ in } G_R \text{ oder auf } C_R$$

und

$$(13\text{a}) \qquad \overline{\lim}\,\sqrt[n]{|\mathfrak{E}_n(\mathfrak{z})|} = \frac{1}{|\zeta|} \qquad \text{für } \mathfrak{z} \text{ in } \overline{G}_R.$$

Statt (13a) gilt schärfer

$$(13) \qquad \lim\,\sqrt[n]{|\mathfrak{E}_n(\mathfrak{z})|} = \frac{1}{|\zeta|} \qquad \text{für } \mathfrak{z} \text{ in } \overline{G}_R.$$

Beweis[9]). Wir zeigen sogar $\lim \zeta^n \mathfrak{E}_n(\mathfrak{z}) = -1$, was nach (8) gleichwertig mit $\lim\limits_{n\to\infty} \zeta^{n-p}\mathfrak{P}_n(\zeta) = 0$ ist. Dies folgt aus der zu (3) äquivalenten Entwicklung

$$\eta\left(\frac{\zeta}{\eta}\right)^p\left(\frac{dF(\mathfrak{y},\mathfrak{z})}{d\eta} + \frac{1}{\eta} - \left(\frac{\eta}{\zeta}\right)^p\frac{1}{\eta-\zeta}\right) = \sum_{n>p}\eta^{n-p}\mathfrak{P}_n(\zeta).$$

Denn sei R' so gewählt, daß $|\zeta| < R' < R$ ist. Bei festem ζ stellt die Reihe für $|\eta| \leqq R'$ eine reguläre Funktion dar, deren absolutes Maximum M sein möge. Dann ist aber $|\mathfrak{P}_n(\zeta)| \leqq \dfrac{M}{R'^{(n-p)}}$, also auch $|\zeta^{n-p}\mathfrak{P}_n(\zeta)| \leqq M\left(\dfrac{|\zeta|}{R'}\right)^{n-p}$ mit $\dfrac{|\zeta|}{R'} < 1$. q. e. d.

Für die Koeffizienten $\dfrac{d\mathfrak{F}_n(\mathfrak{y})}{d\eta}$ in (5) führen dieselben Überlegungen zu analogen Resultaten.

§ 6. Entwicklungssätze.

Die in Satz 4 ausgesprochene Vollständigkeit der Elementarsysteme legt es nahe, Reihenentwicklungen nach diesen Systemen zu untersuchen.

Wir beschränken uns auf Funktionen und fragen genauer *einmal*, wenn durch die Wahl von $\mathfrak{d}$ und seiner Ortsuniformisierenden die $\mathfrak{E}_n(\mathfrak{z})$ gegeben sind, nach dem Konvergenzverhalten einer Reihe $\sum a_n\mathfrak{E}_n(\mathfrak{z})$ und nach den Eigenschaften der dargestellten Funktion, *zum andern*, ob zu einer Funktion ein System von Elementarfunktionen $\mathfrak{E}_n(\mathfrak{z})$

---

[9]) Nach *G. Faber*, Über Tschebyscheffsche Polynome, Journal für reine und angewandte Mathematik 150 (1920), S. 86.

gefunden werden kann, derart, daß die gegebene Funktion in ihrem Regularitätsgebiet durch eine Reihe $\sum a_n \mathfrak{E}_n(\mathfrak{z})$ dargestellt wird.

Für die Konvergenz einer Reihe $\sum a_n \mathfrak{E}_n(\mathfrak{z})$ ist entscheidend, ob $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n \mathfrak{E}_n(\mathfrak{z})|} < 1$ oder > 1 ist. Es sei $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \varrho$; aus (12) und (13) folgt

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n \cdot \mathfrak{E}_n(\mathfrak{z})|} \begin{cases} = \dfrac{\varrho}{|\zeta|} \text{ für } \mathfrak{z} \text{ in } \overline{G}_R, \\ \leqq \dfrac{\varrho}{R} \text{ für } \mathfrak{z} \text{ in } G_R \text{ oder auf } C_R. \end{cases}$$

Während für $\varrho \geqq R$ nur gefolgert werden kann, daß die Reihe jedenfalls nirgends in $\overline{G}_R$ konvergiert, wird der Fall $\varrho < R$ vollständig geklärt durch

Satz 5. *Es sei* $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \varrho < R$. *Die Reihe* $\sum a_n \mathfrak{E}_n(\mathfrak{z})$ *konvergiert für alle* $\mathfrak{z}$ *in* G_ϱ *und divergiert für alle* $\mathfrak{z}$ *in* $\overline{G}_\varrho$; *wie bei Potenzreihen ist für* $\mathfrak{z}$ *auf* C_ϱ *jedes Verhalten möglich. Mit* $\varrho < \varrho' < R$ *ist für* $\mathfrak{z}$ *in* $G_{\varrho'}$ *die Konvergenz absolut und gleichmäßig, so daß die Grenzfunktion in* G_ϱ *regulär (und natürlich eindeutig) ist. Nach* (10) *ist die Grenzfunktion nur dann identisch Null, wenn alle* a_n *verschwinden. Verschiedene Reihen stellen also verschiedene Funktionen dar.*

Nun können wir auch die wichtigste Frage präzisieren und beantworten:

Gegeben sei auf $\mathfrak{A}$ ein Gebiet $\overline{G}$ mit dem analytischen Rand C; das Komplementärgebiet $\overline{G}$ soll einfach zusammenhängend sein. Die Funktion $f(\mathfrak{z})$ sei in G regulär und eindeutig und soll durch eine in G konvergente Reihe nach zu $\mathfrak{A}$ gehörigen Funktionen dargestellt werden.

Wir wählen in $\overline{G}$ einen Nicht-Weierstrasspunkt $\mathfrak{d}$ und bilden $\overline{G}$ durch $\eta = \psi(\mathfrak{y})$ mit $0 = \psi(\mathfrak{d})$ konform ab auf eine Kreisumgebung des Nullpunktes in der η-Ebene. η ist also eine Ortsuniformisierende für $\mathfrak{d}$, so daß wir nach § 3 das für $\mathfrak{d}$ in η algebraisch normierte $dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ bilden können, durch das nach § 4 ein System von Elementarfunktionen $\mathfrak{E}_n(\mathfrak{z})$ bestimmt ist.

Die Kreise $|\eta| = r$ in der η-Ebene bezeichnen wir wieder mit K_r, die ihnen durch $\eta = \psi(\mathfrak{y})$ entsprechenden Kurven auf $\mathfrak{A}$ mit C_r; der C entsprechende Kreis möge den Radius ϱ haben, so daß also $C_\varrho = C$ ist. Da C_ϱ analytisch sein soll, ist $\eta = \psi(\mathfrak{y})$ noch auf C_ϱ regulär, und es gibt daher ein $\varrho' > \varrho$, so daß auf $C_{\varrho'}$ noch dasselbe der Fall ist. Da $C_{\varrho'}$ ganz in G verläuft, ist auch $f(\mathfrak{z})$ auf $C_{\varrho'}$ regulär.

Nun stellen wir für $f(\mathfrak{z})$ die Cauchysche Integraldarstellung (1) auf mit $C_{\varrho'}$ als Integrationsweg[10]); die Darstellung ist gültig für $\mathfrak{z}$ in $G_{\varrho'}$. Für $dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ setzen wir die für $\mathfrak{y}$ auf $C_{\varrho'}$ gleichmäßig konvergente Entwicklung (4) ein und integrieren gliedweise. Das ergibt mit $a_n = -\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{|\eta| = \varrho'} f(\mathfrak{y})\, \eta^{n-1} d\eta$ die in $G_{\varrho'}$ gleichmäßig konvergente und in G_ϱ konvergente Darstellung $f(\mathfrak{z}) = \sum a_n \mathfrak{E}_n(\mathfrak{z})$. Zusammen mit Satz 5 ergibt dies

Satz 6. *Das Äußere* $\overline{G}$ *des Gebietes* G *auf* $\mathfrak{A}$ *sei einfach zusammenhängend und ihr Rand* C *eine analytische Kurve.* $\eta = \psi(\mathfrak{y})$ *bilde* $\overline{G}$ *konform ab auf einen Kreis. Durch* η *sind die Elementarsysteme der* $\mathfrak{E}_n(\mathfrak{z})$ *und* $d\mathfrak{F}_n(\mathfrak{y})$ *bestimmt.*

---

[10]) $C_{\varrho'}$ ist in bezug auf $G_{\varrho'}$ positiv und als Umlauf um $\mathfrak{d}$ negativ orientiert im Gegensatz zu § 4, wo also die Formeln (6) und (7) mit umgekehrten Vorzeichen zu nehmen sind.

Alle in G regulären und eindeutigen Funktionen $f(\mathfrak{z})$ *und Differentiale*[11]) $dg(\mathfrak{y})$ *werden dargestellt durch die in G konvergenten Reihen*

$$f(\mathfrak{z}) = \sum_{\substack{n=0\\ n>p}} a_n \mathfrak{E}_n(\mathfrak{z}) \tag{14}$$

und

$$dg(\mathfrak{y}) = \sum_{\substack{n>-p\\ n\neq 1}} b_n d\mathfrak{F}_n(\mathfrak{y}). \tag{15}$$

Die Koeffizienten sind eindeutig bestimmt durch

$$a_n = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta|=\varrho^*} f(\mathfrak{y})\,\eta^{n-1}d\eta \tag{14a}$$

und

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\varrho'} dg(\mathfrak{z})\,\zeta^{n-1}. \tag{15a}$$

Die Reihen (14) *und* (15) *haben zusammenhängende Konvergenzgebiete, die Konvergenzgrenze ist eine analytische Kurve, und die dargestellten Ausdrücke haben auf ihr mindestens eine singuläre Stelle.*

§ 7. Diskussion der Ergebnisse.

Es entsteht die Frage nach dem Umfang der Klasse aller nach Satz 6 darstellbaren Funktionen und Differentiale. Während in der Ebene die Potenzreihenentwicklung an die darzustellende Funktion nur die Forderung der Regularität in beliebiger Umgebung eines Punktes stellt, gilt hier

Satz 7. *Alle Funktionen und Differentiale, deren Regularitäts- und Eindeutigkeitsgebiet G auf einer gegebenen geschlossenen Riemannschen Fläche* $\mathfrak{A}$ *irgendein kanonisches Schnittsystem von* $\mathfrak{A}$ *enthält, können nach Satz* 6 *durch zu* $\mathfrak{A}$ *gehörige Funktionen bzw. Differentiale approximiert werden. Das gilt insbesondere für solche Funktionen und Differentiale, die in beliebiger Nachbarschaft eines kanonischen Schnittsystems regulär und eindeutig sind.*

Beweis. Durch ein kanonisches Schnittsystem wird $\mathfrak{A}$ in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt, deren Rand dem Schnittsystem entspricht. Nun kann auf der zerschnittenen Fläche in beliebiger Nähe dieses Randes eine analytische Kurve C gezogen werden. Auf $\mathfrak{A}$ ist diese Kurve wieder analytisch und trifft das Schnittsystem nicht, in dessen Nachbarschaft sie verläuft. Auf der zerschnittenen Fläche berandet C ein einfach zusammenhängendes Gebiet $\overline{G}$; dasselbe gilt auf $\mathfrak{A}$, weil C nicht von dem Schnittsystem getroffen wird. — Damit sind die Voraussetzungen von Satz 6 erfüllt.

Während dieser Satz an die Funktionen und Differentiale, die auf einer *vorgegebenen* Fläche $\mathfrak{A}$ durch zu $\mathfrak{A}$ gehörige Funktionen und Differentiale approximiert werden sollen, nicht unerhebliche Bedingungen stellt, behauptet

Satz 8. *Wenn das Gebiet G auf* $\mathfrak{A}$ *von der analytischen Kurve C berandet wird, so kann eine andere geschlossene Riemannsche Fläche* $\mathfrak{A}^*$ *gefunden werden, so daß alle in G eindeutigen und regulären Funktionen und Differentiale durch zu* $\mathfrak{A}^*$ *gehörige Funktionen und Differentiale approximiert werden können.*

Beweis. Wir zeigen, daß es eine geschlossene Riemannsche Fläche $\mathfrak{A}^*$ gibt, die ein zu G konform-äquivalentes Gebiet G^* mit analytischem Rand und einfach zusammenhängendem Außengebiet $\overline{G}^*$ enthält.

---

[11]) Die obigen Überlegungen gelten ungeändert auch für Differentiale.

Die Gebiete G und $\overline{G}$ auf $\mathfrak{A}$ sind selbst Riemannsche Flächen von endlichem Geschlecht; denn ihre Geschlechtersumme ist nicht größer als das Geschlecht p von $\mathfrak{A}$. Es gibt daher in G etwa p_1 und in $\overline{G}$ etwa p_2 Paare konjugierter Rückkehrschnitte, die also C nicht treffen. Die zerschnittenen Gebiete sind topologisch-äquivalent je zu einer Halbkugel mit p_1 bzw. p_2 Löchern; beide Äquatorkreise entsprechen dabei der Kurve C. Indem wir jene in entsprechenden Punkten aneinanderheften, sehen wir, daß $\mathfrak{A}$ durch die $p_1 + p_2$ Rückkehrschnittpaare selbst schlichtartig wird (es ist also $p_1 + p_2 = p$).

Wir können also auf $\mathfrak{A}$ die p Paare konjugierter Rückkehrschnitte so wählen, daß sie die Kurve C nicht treffen. Die zerschnittene Fläche $\mathfrak{A}'$ ist konform-äquivalent[12]) dem Einheitskreis mit $p - 1$ Kreislöchern. Dabei kann[13]) und soll angenommen werden, daß der Einheitskreis einem in G liegenden Rückkehrschnittpaar entspricht. Das Bild von C ist wieder eine analytische Kurve C^*, in deren Äußerem die p_1 und in deren Innerem die p_2 Randkreise verlaufen, die den Rückkehrschnittpaaren von G bzw. von $\overline{G}$ entsprechen. Wir machen nun das Innere von C^* dadurch einfach zusammenhängend, daß wir die p_2 Kreislöcher ausfüllen. Nun identifizieren wir auf jedem einzelnen der im Äußeren von C^* verlaufenden p_1 Randkreise diejenigen Punkte, die sich auf $\mathfrak{A}'$ an den beiden Ufern des entsprechenden Schnittes gegenüberlagen. Dadurch erhalten wir eine neue geschlossene Riemannsche Fläche $\mathfrak{A}^*$, die durch C^* zerlegt wird in ein zu G konform-äquivalentes Gebiet G^* und ein einfach zusammenhängendes Gebiet $\overline{G}^*$.

Die vorliegende Theorie bietet zahlreiche Erweiterungs- und Anwendungsmöglichkeiten. Als Beispiele seien genannt: Entwicklung in Gebieten mit nicht-analytischem Rand[14]), Entwicklung in Gebieten mit mehrfachem Rand, Verhalten auf der Konvergenzgrenze[15]), Abelscher Stetigkeitssatz, Analytische Fortsetzung durch Summation, Überkonvergenz, Theorie der ganzen und der meromorphen Funktionen auf $\mathfrak{A}$.

---

[12]) $p > 0$ vorausgesetzt.

[13]) Außer wenn G schlichtartig ist; in diesem Falle ist der Beweis etwas abzuändern.

[14]) Vgl. etwa *P. Heuser*, Zur Theorie der Faberschen Polynomreihen, Deutsche Math. 4 (1939), S. 451—454.

[15]) Die Reihen $\Sigma\, a_n \mathfrak{E}_n(\mathfrak{z})$ und $\Sigma\, a_n \zeta^{-n}$ haben auf ihren Konvergenzgrenzen gleiches funktionentheoretisches Verhalten; vgl. *G. Faber*, a. a. O.[2]), S. 398.

Eingegangen 20. November 1950.

Integralmittelwerte von Funktionen auf Gruppen und Halbgruppen.

Von *Wilhelm Maak* in München.

In der Theorie der fastperiodischen Funktionen spielt bekanntlich die Tatsache eine fundamentale Rolle, daß diese Funktionen einen Integralmittelwert besitzen. Der erste Beweis für die Existenz solcher Mittelwerte wurde von v. Neumann [8] gegeben. Er ist durch Vorstellungen beeinflußt, welche der vom gleichen Autor geschaffenen Ergodentheorie entstammen. Andere Verfasser haben später die Ergodentheorie so verallgemeinert, daß der betr. Mittelwertsatz für fastperiodische Funktionen als Spezialfall abstrakter Ergodensätze erscheint (siehe z. B. Eberlein [2]). In der Tat besteht ja ein wesentlicher Teil der Ergodentheorie in dem Nachweis, daß gewisse Funktionen *ergodisch* sind, d. h. daß diese Funktionen einen Integralmittelwert besitzen. Jedoch bin ich der Meinung, daß man bei einem solchen Aufbau einer Theorie der Integralmittelwerte i. a. gezwungen wird, Begriffe an die jeweiligen Funktionenklassen heranzutragen, welche ursprünglich nichts mit den Funktionen zu tun haben. Z. B. ist man etwa gezwungen, die betreffenden Funktionen als Punkte eines Hilbertraumes zu deuten, bevor die Integralmittelwerte zur Verfügung stehen, obwohl es doch u. U. das Natürlichste wäre, den Hilbertraum umgekehrt mit Hilfe der Integralmittelwerte zu erklären.

Ein anderer von mir gegebener Beweis des Mittelwertsatzes für fastperiodische Funktionen auf Gruppen [7] beruht im wesentlichen auf Ideen, welche dem Riemannschen Existenzbeweis für das bestimmte Integral stetiger Funktionen zugrunde liegen. Es entsteht die Frage, ob man diesen zunächst nur auf fastperiodische Funktionen zugeschnittenen Existenzbeweis auch auf allgemeinere Funktionen übertragen kann, so ähnlich wie Riemanns Beweis ja auch für die Riemann-integrierbaren Funktionen Gültigkeit hat. Sollte ein Fortschreiten in dieser Richtung möglich sein, so wird man es sogar für wahrscheinlich halten dürfen, daß sich das soeben geschilderte Verhältnis von Ergodentheorie zur Theorie fastperiodischer Funktionen umkehren läßt: Man wird die Mittelwerttheorie der fastperiodischen Funktionen so zu verallgemeinern suchen, daß wesentliche Teile der Ergodentheorie nichts anderes sind als Anwendungen des verallgemeinerten Mittelwertsatzes.

In vorliegender Abhandlung werden die ersten Schritte in der angedeuteten Richtung getan. Es wird der Mittelwertsatz für Funktionenklassen auf Gruppen bewiesen, welche erheblich umfassender als die Klasse der fastperiodischen Funktionen sind (§ 2). Besonders bedeutungsvoll erscheint mir die Tatsache, daß die entwickelte Methode sich auch auf Funktionen auf Halbgruppen anwenden läßt (§ 3). Insbesondere ist es möglich, den Begriff *fastperiodische Funktion* auf den Fall beliebiger Halbgruppen zu übertragen. Wie im Falle der Gruppen bildet auch bei Halbgruppen der Mittelwertsatz das Fundament einer (noch in den Einzelheiten zu entwickelnden) Theorie der fastperiodischen Funk-

tionen[1]). In einem einleitenden Paragraphen 1 sind einige den Mittelwert betreffende Erörterungen aufgenommen, welche man ähnlich schon bei v. Neumann [8] findet. Allerdings beziehen sie sich bei uns auf (ergodische) Funktionen auf beliebigen Halbgruppen, während sie bei v. Neumann bez. fastperiodischer Funktionen auf Gruppen gemeint sind. Über die Anwendung unserer Resultate auf die Ergodentheorie soll an anderer Stelle berichtet werden.

Das wichtigste Hilfsmittel bei unseren Untersuchungen ist folgender

Kombinatorischer Hilfssatz. *Es sei $\mathfrak{M}$ eine Menge und $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ sowie $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$ seien zwei Systeme von Teilmengen von $\mathfrak{M}$. Man wähle irgendwelche Mengen $\mathfrak{A}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{i_r}$ und bestimme alle Mengen $\mathfrak{B}_j$, für die*

$$(\mathfrak{A}_{i_1} \cup \cdots \cup \mathfrak{A}_{i_r}) \cap \mathfrak{B}_j \neq 0$$

gilt. Sind dies etwa s Mengen $\mathfrak{B}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{B}_{j_s}$ und ist stets $s \geqq r$, von welchen Mengen $\mathfrak{A}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{i_r}$ $(r = 1, \ldots, n)$ man auch ausgeht, so kann man in $\mathfrak{M}$ Elemente $h_1, \ldots, h_n$ finden, die sowohl für die $\mathfrak{A}_i$ wie für die $\mathfrak{B}_j$ als Repräsentantensystem dienen können. D. h. es gibt eine Permutation $j_1, \ldots, j_n$ der Zahlen $1, \ldots, n$ so, daß $h_i \in \mathfrak{A}_i \cap \mathfrak{B}_{j_i}$ ist.

Ein Beweis dieses Satzes findet sich z. B. in [7].

§ 1. Integralmittelwert ergodischer Funktionen.

Ist $\mathfrak{H}$ eine Menge von Elementen $a, b, \ldots, x, y, \ldots$, und ist in $\mathfrak{H}$ jedem geordneten Elementepaar (a, b) ein Element c in $\mathfrak{H}$ als Produkt $c = ab$ eindeutig zugeordnet, so soll $\mathfrak{H}$ eine *Halbgruppe* heißen, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

I. (Assoziativgesetz). *Stets gilt für drei Elemente a, b, c*

$$a(bc) = (ab)c.$$

II. (Einheitselement). *Es gibt ein Element 1 in $\mathfrak{H}$, so daß für alle $a \in \mathfrak{H}$*

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

ist.

Wenn stets $ab = ba$ ist, so soll $\mathfrak{H}$ eine *abelsche Halbgruppe* heißen. Wenn eine Menge $\mathfrak{H}$ zwar dem Axiom I genügt, aber ein 1-Element nicht besitzt, so kann man ohne weiteres der Menge $\mathfrak{H}$ ein Element 1 hinzufügen. Man erklärt dann für beliebiges a

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

und außerdem

$$1 \cdot 1 = 1.$$

Die so erweiterte Menge erfüllt die Axiome I und II.

Gelegentlich wird von einer Halbgruppe auch verlangt, daß aus $ab = ac$ folgen soll $b = c$. Eine derartige Halbgruppe kann, jedenfalls wenn sie abelsch ist, als Teilmenge einer Gruppe aufgefaßt werden. Wir wollen diese Forderung *nicht* an eine Halbgruppe stellen. *Beispiele* von Halbgruppen sind demnach:

1. Die reellen Zahlen $\geqq 0$; als Produkt zweier Zahlen a, b wird ihre gewöhnliche Summe erklärt. Auch die reellen Zahlen oberhalb einer beliebigen positiven Zahl erfüllen das Axiom I. Damit auch Axiom II erfüllt wird, adjungiere man zu dieser Menge die Zahl 0.

2. Die natürlichen Zahlen bilden gegenüber der gewöhnlichen Multiplikation eine Halbgruppe.

3. Hat man irgendeine Menge $\mathfrak{M}$ von mindestens zwei Elementen $a, b, \ldots$, so kann man ein willkürliches Element a_0 auswählen und gleich 1 setzen:

$$a_0 = 1.$$

[1]) Zusatz bei der Korrektur: Gleichzeitig mit dieser Abhandlung erscheint eine vollständige Theorie der fast periodischen Funktionen auf Halbgruppen in den Acta mathematica.

Als Produkt von zwei beliebigen Elementen $b, c \in \mathfrak{M}$, die von 1 verschieden sind, erklärt man:

$$bc = b.$$

Außerdem wird für jedes Element $a \in \mathfrak{M}$

$$a1 = 1a = a$$

gesetzt. Auf diese Weise wird $\mathfrak{M}$ zu einer Halbgruppe, in der nicht von linksher gekürzt werden kann.

4. Jede Gruppe ist gleichzeitig Halbgruppe.

Es sei nun $\mathfrak{H}$ eine beliebige Halbgruppe. Wir betrachten Funktionen $f(x)$ der Elemente $x \in \mathfrak{H}$ mit komplexen Werten f. Es soll ein Integralmittelwert solcher Funktionen erklärt werden. Natürlich kann man nicht erwarten, daß jeder Funktion auf „brauchbare" Weise ein Mittelwert zugeordnet werden kann. Deshalb wird aus der Menge aller Funktionen eine kleinere Klasse von „mittelbaren" Funktionen herausgegriffen. Diese Klasse ist, wie sich herausstellen wird, in den meisten Fällen noch sehr umfangreich. Einem neueren Brauch entsprechend (siehe z. B. Godement [6]) sollen diese Funktionen *ergodisch* genannt werden. Damit weisen wir gleichzeitig auf die Anwendungsmöglichkeit unserer Untersuchungen in der Ergodentheorie hin.

Definition 1. Eine Funktion $f(x)$ heißt *linksergodisch*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl A und gewisse Elemente $a_1, \ldots, a_n$ aus $\mathfrak{H}$ existieren, so daß für beliebige $d \in \mathfrak{H}$ gilt

$$\left| A - \frac{1}{n} \sum_i f(a_i d) \right| < \varepsilon. \tag{1}$$

Wenn zu jedem $\varepsilon' > 0$ eine Zahl B und gewisse $b_1, \ldots, b_m$ existieren, so daß für beliebige $c \in \mathfrak{H}$ gilt

$$\left| B - \frac{1}{m} \sum_j f(c b_j) \right| < \varepsilon', \tag{2}$$

so heißt $f(x)$ *rechtsergodisch*. Ist $f(x)$ sowohl links- als auch rechtsergodisch, so wird $f(x)$ *ergodisch* genannt. Die in den Ungleichungen (1) und (2) auftretenden Zahlen A und B heißen linke bzw. rechte *Näherungsmittelwerte* von $f(x)$.

Satz 1. *Ist $f(x)$ ergodisch und sind A ein linkes ε-Näherungsmittel und B ein rechtes ε'-Näherungsmittel von $f(x)$, so gilt*

$$| A - B | < \varepsilon + \varepsilon'. \tag{3}$$

Beweis. Aus (1) und (2) folgt

$$\left| A - \frac{1}{mn} \sum_{i,j} f(a_i b_j) \right| < \varepsilon$$

$$\left| B - \frac{1}{mn} \sum_{i,j} f(a_i b_j) \right| < \varepsilon'$$

und somit die Behauptung.

Läßt man in (3) das ε eine geeignete Folge von Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ durchlaufen, welche gegen Null strebt, so konvergieren die entsprechenden Näherungsmittelwerte A_ν gegen eine Zahl R. Aus

$$| A_\nu - B | < \varepsilon_\nu + \varepsilon'$$

folgt

$$| R - B | \leqq \varepsilon'.$$

Läßt man nun $\varepsilon' \to 0$ streben, so erkennt man, daß B gegen R konvergiert, d. h. die rechten Näherungsmittelwerte streben bei unbegrenzt abnehmenden ε' gegen eine wohlbestimmte Zahl R. Entsprechend zeigt man, daß die linken Näherungsmittelwerte bei unbegrenzt abnehmenden ε gegen eine wohlbestimmte Zahl L konvergieren. Für die Zahl R gilt

$$\left| R - \frac{1}{m} \sum_j f(c b_j) \right| < 2\varepsilon'.$$

Entsprechend haben wir für die Zahl L

$$\left| L - \frac{1}{n} \sum_i f(a_i d) \right| < 2\varepsilon.$$

Aus Satz 1 folgt, daß

$$| L - R | < 2(\varepsilon + \varepsilon').$$

Da ε und ε' beliebig gewählt werden können, ist

$$R = L,$$

und diese Zahl ist durch $f(x)$ eindeutig bestimmt. Wir wollen sie durch den Buchstaben M bezeichnen.

Dies soeben erzielte Ergebnis gibt zu folgender Definition Anlaß.

Definition 2. Ist $f(x)$ eine beliebige Funktion, so nennen wir eine Zahl M dann einen *Mittelwert* von $f(x)$, wenn für beliebige Zahlen $\varepsilon > 0$ und $\varepsilon' > 0$ stets Elemente $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_m$ existieren, so daß für alle c, d

$$\left| M - \frac{1}{n} \sum_i f(a_i d) \right| < \varepsilon \quad \text{und} \quad \left| M - \frac{1}{m} \sum_j f(c b_j) \right| < \varepsilon'$$

gilt.

Wir haben offenbar bewiesen:

Satz 2. *Jede ergodische Funktion $f(x)$ besitzt einen eindeutig durch $f(x)$ bestimmten Mittelwert $M = M_x\{f(x)\} = M(f)$.*

Umgekehrt ist natürlich jede Funktion mit Mittelwert auch ergodisch.

Wir beweisen für den Mittelwert die üblichen Rechenregeln.

Satz 3. *Die Funktion $f(x) \equiv 1$ hat den Mittelwert 1:*

$$M(1) = 1. \tag{4}$$

Sind die reellwertigen Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ ergodisch, und erfüllen sie die Ungleichung $f(x) \leqq g(x)$ für alle $x \in \mathfrak{H}$, so gilt

$$M(f) \leqq M(g). \tag{5}$$

Ist $f(x)$ ergodisch, so ist für beliebiges komplexes α auch $\alpha f(x)$ ergodisch und es gilt

$$M(\alpha f) = \alpha M(f). \tag{6}$$

Beweis. Die Gleichungen (4) und (6) sind trivial. Die Ungleichung (5) beweist man ganz ähnlich wie Satz 1. Es gilt einerseits für jedes $\varepsilon > 0$, entsprechende a_i und alle $d \in \mathfrak{H}$

$$\left| M(f) - \frac{1}{n} \sum_i f(a_i d) \right| < \varepsilon,$$

andererseits für jedes $\varepsilon' > 0$, entsprechende b_j und alle $c \in \mathfrak{H}$

$$\left| M(g) - \frac{1}{m} \sum_j g(c b_j) \right| < \varepsilon'.$$

Also

$$\left| M(f) - \frac{1}{mn} \sum_{i,j} f(a_i b_j) \right| < \varepsilon \quad \text{und} \quad \left| M(g) - \frac{1}{mn} \sum_{i,j} g(a_i b_j) \right| < \varepsilon'.$$

Hierin ist

$$\frac{1}{mn} \sum_{i,j} f(a_i b_j) \leqq \frac{1}{mn} \sum_{i,j} g(a_i b_j).$$

Da $\varepsilon > 0$ und $\varepsilon' > 0$ beliebig klein gewählt werden können, folgt (5).

Satz 4. *Bezeichnet $\mathfrak{M}$ eine Menge von ergodischen Funktionen, welche*

1. *bei beliebigem $c_0 \in \mathfrak{H}$ und beliebigem $f(x) \in \mathfrak{M}$ auch stets $f(c_0 x)$ enthält,*
2. *bei beliebigen komplexen α, β und beliebigen $f(x), g(x) \in \mathfrak{M}$ auch stets $\alpha f(x) + \beta g(x)$ enthält,*

so gilt für beliebige Funktionen $f(x), g(x) \in \mathfrak{M}$, beliebige $c_0 \in \mathfrak{H}$ und beliebige komplexe α, β

$$M_x\{f(c_0 x)\} = M_x\{f(x)\} \tag{7}$$

und

$$M(\alpha f + \beta g) = \alpha M(f) + \beta M(g). \tag{8}$$

Beweis. Offenbar gilt für geeignete $a_1, \ldots, a_n$ und alle $d \in \mathfrak{H}$

$$\left| M_x\{f(c_0 x)\} - \frac{1}{n} \sum_i f(c_0 a_i d) \right| < \varepsilon.$$

Daraus folgt, daß $M_x\{f(c_0 x)\}$ für jedes $\varepsilon > 0$ ein linker ε-Näherungsmittelwert von $f(x)$ ist. Deshalb ergibt sich sofort (7).

Um (8) zu beweisen, genügt es wegen Satz 3,

$$M(f+g) = M(f) + M(g) \tag{9}$$

herzuleiten. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ existieren offenbar Elemente $a_1, \ldots, a_n$ so, daß

$$\left| M_x\{f(x)\} - \frac{1}{n} \sum_i f(a_i d) \right| < \varepsilon. \tag{10}$$

Nach Voraussetzung ist mit $g(x)$ auch $(1/n) \Sigma g(a_i x)$ in $\mathfrak{M}$ enthalten und somit ergodisch. Deshalb existieren für jedes $\varepsilon' > 0$ Elemente $b_1, \ldots, b_m$ so, daß für alle $d \in \mathfrak{H}$

$$\left| M_x\left\{\frac{1}{n} \sum_i g(a_i x)\right\} - \frac{1}{m} \sum_j \frac{1}{n} \sum_i g(a_i b_j d) \right| < \varepsilon'.$$

Da ε' beliebig ist, ergibt sich, daß $M_x\{(1/n) \Sigma g(a_i x)\}$ für jedes $\varepsilon' > 0$ Näherungsmittel von $g(x)$ ist, also

$$M_x\left\{\frac{1}{n} \sum_i g(a_i x)\right\} = M_x\{g(x)\}.$$

Folglich haben wir

$$\left| M_x\{g(x)\} - \frac{1}{mn} \sum_{i,j} g(a_i b_j d) \right| < \varepsilon'. \tag{11}$$

Aus (10) folgt

$$\left| M_x\{f(x)\} - \frac{1}{mn} \sum_{i,j} f(a_i b_j d) \right| < \varepsilon, \tag{12}$$

und somit aus (11) und (12)

$$\left| M_x\{f(x)\} + M_x\{g(x)\} - \frac{1}{mn} \sum_{i,j} (f(a_i b_j d) + g(a_i b_j d)) \right| < \varepsilon + \varepsilon'.$$

Deshalb ist $M_x\{f(x)\} + M_x\{g(x)\}$ für jedes $\varepsilon > 0$ ein linker ε-Näherungsmittelwert von $f + g$. Damit ist (9) bewiesen.

Ob die Menge aller ergodischen Funktionen einer Halbgruppe die in Satz 4 vorausgesetzten zwei Eigenschaften hat, ist i. a. nicht ohne weiteres zu entscheiden. Um so bedeutungsvoller ist es, daß sich in der Menge aller ergodischen Funktionen eine Klasse von etwas spezielleren Funktionen auszeichnen läßt, welche diese Eigenschaften besitzt. Wir nennen eine Funktion $f(x)$ *stark ergodisch*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl A und gewisse Elemente $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{H}$ existieren, so daß für alle c, d

$$\left| A - \frac{1}{n} \sum_i f(c a_i d) \right| < \varepsilon \tag{13}$$

gilt. Offensichtlich ist jede stark ergodische Funktion auch ergodisch. Die Umkehrung hiervon scheint nicht richtig zu sein. Im Hinblick auf Satz 4 beweisen wir den

Satz 5. *Ist $f(x)$ stark ergodisch, so ist für beliebige Elemente $c_0, d_0 \in \mathfrak{H}$ auch $f(c_0 x d_0)$ stark ergodisch. Sind $f(x)$ und $g(x)$ stark ergodische Funktionen, so ist für beliebige komplexe α, β auch $\alpha f(x) + \beta g(x)$ eine stark ergodische Funktion.*

Beweis. Aus (13) folgt unmittelbar für alle $c, d \in \mathfrak{H}$

$$\left| A - \frac{1}{n} \sum_i f(c_0 c a_i d d_0) \right| < \varepsilon.$$

Damit ist bereits die erste Aussage unseres Satzes hergeleitet. Um die zweite zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß mit f und g auch $f + g$ stark ergodisch ist. Ist $\varepsilon > 0$ beliebig

vorgegeben, so kann man Zahlen A, B und Elemente $a_1, \ldots, a_n$; $b_1, \ldots, b_m$ so bestimmen, daß für alle $c, d \in \mathfrak{H}$

$$\left| A - \frac{1}{n} \sum_i f(ca_i d) \right| < \varepsilon \quad \text{und} \quad \left| B - \frac{1}{m} \sum_j g(cb_j d) \right| < \varepsilon$$

gilt. Hieraus ergibt sich

$$\left| A - \frac{1}{mn} \sum_{i,j} f(ca_i b_j d) \right| < \varepsilon \quad \text{und} \quad \left| B - \frac{1}{mn} \sum_{i,j} g(ca_i b_j d) \right| < \varepsilon$$

und folglich

$$\left| A + B - \frac{1}{mn} \sum_{i,j} (f(ca_i b_j d) + g(ca_i b_j d)) \right| < 2\varepsilon,$$

w. z. b. w.

Somit haben wir wegen Satz 3, 4, 5 den

Satz 6. *Sind $f(x)$, $g(x)$ stark ergodische Funktionen und α, β komplexe Zahlen, so ist*

$$M(\alpha f + \beta g) = \alpha M(f) + \beta M(g).$$

Ist $f(x)$ stark ergodisch und sind $c, d \in \mathfrak{H}$ beliebig gewählt, so gilt

$$M_x\{f(cxd)\} = M_x\{f(x)\}.$$

Sind $f(x)$, $g(x)$ reelle stark ergodische Funktionen, so folgt aus $f(x) \leqq g(x)$

$$M(f) \leqq M(g).$$

Ist $f(x) \equiv 1$, so gilt

$$M(1) = 1.$$

D. h. die im Bereich der stark ergodischen Funktionen erklärte „Mittelwertoperation" $f \to M(f)$ ist linear, invariant, monoton und normiert. Durch diese vier Eigenschaften ist sie eindeutig bestimmt. Man kann Satz 6 einfacher beweisen, indem man sich von vornherein auf stark ergodische Funktionen beschränkt.

In den nachfolgenden Paragraphen werden wir unsere Bemühungen darauf konzentrieren, von großen Klassen von Funktionen nachzuweisen, daß sie nur stark ergodische Funktionen enthalten. Dabei wollen wir von nun an der Kürze halber, solange Verwechslungen nicht zu befürchten sind, den Zusatz „stark" beim Worte „ergodisch" fortlassen.

§ 2. Beispiele ergodischer Funktionen auf Gruppen.

Es sei $\mathfrak{G}$ eine beliebige Gruppe. Auf $\mathfrak{G}$ betrachten wir beschränkte komplexwertige Funktionen $f(x), g(x), \ldots, \chi(x), \ldots$.

Definition 1. Ist $\mathfrak{N} < \mathfrak{G}$ eine Menge von Gruppenelementen und

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in \mathfrak{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ihre charakteristische Funktion, so soll

$$\mu(\mathfrak{N}) = \underset{\substack{a_1, \ldots, a_n \\ n \geq 1 \text{ beliebig}}}{\text{unt. Gr.}} \; \underset{c, d \in \mathfrak{G}}{\text{Max}} \frac{1}{n} \sum_i \chi(ca_i d)$$

das *äußere Maß* von $\mathfrak{N}$ heißen. Wenn $\mu(\mathfrak{N}) = 0$ ist, so nennen wir $\mathfrak{N}$ eine *Nullmenge*.

Ist $\mathfrak{N}$ eine Nullmenge, so ist $\chi(x)$ offenbar eine (stark) ergodische Funktion. Aus dieser Bemerkung folgen sofort einige Aussagen über Nullmengen.

Satz 1. *Sind $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ Nullmengen, so ist auch die Vereinigungsmenge $\mathfrak{N}_1 \cup \mathfrak{N}_2$ eine Nullmenge. Ist $\mathfrak{N}$ eine Nullmenge, so ist auch $c\mathfrak{N}d$ für beliebige $c, d \in \mathfrak{G}$ eine Nullmenge*[2]).

[2]) Ist $\mathfrak{M}$ Teilmenge einer Halbgruppe und sind c, d irgendwelche Elemente der Halbgruppe, so bedeutet $c\mathfrak{M}d$ die Menge aller cxd mit $x \in \mathfrak{M}$.

Innerhalb der Menge aller beschränkten Funktionen auf $\mathfrak{G}$ wollen wir nun eine gewisse Teilmenge von Funktionen betrachten, für die wir die Existenz eines Integralmittelwertes werden beweisen können.

Definition 2. Eine (beschränkte komplexwertige) Funktion soll eine *ω-Funktion* genannt werden, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Nullmenge $\mathfrak{N}_\varepsilon$ und gewisse endlichviele weitere Teilmengen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ von $\mathfrak{G}$ existieren, so daß

$$1.\ \mathfrak{A}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{A}_n \cup \mathfrak{N}_\varepsilon = \mathfrak{G},$$

$$2.\ |f(cxd) - f(cyd)| < \varepsilon$$

ist, falls nur x, y aus einem der $\mathfrak{A}_i$ und $cxd, cyd \in \mathfrak{G} - \mathfrak{N}_\varepsilon$ ist. Das System von Mengen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n, \mathfrak{N}_\varepsilon$ soll eine *Teilung* $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$ heißen. Sind bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ die Mengen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n, \mathfrak{N}_\varepsilon$ von $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$ so gewählt, daß n den kleinsten aller in Frage kommenden Werte annimmt, so heiße $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$ eine *Minimalteilung.*

Satz 2. *Bilden die Mengen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n, \mathfrak{N}_\varepsilon$ eine Minimalteilung $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$, so ist keine der Mengen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ eine Nullmenge, d. h. es ist*

$$\mu(\mathfrak{A}_i) = \alpha_i > 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Beweis. Wäre $\mu(\mathfrak{A}_i) = 0$, so wäre auch $\mathfrak{A}_i \cup \mathfrak{N}_\varepsilon = \mathfrak{N}'_\varepsilon$ eine Nullmenge. Die Mengen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{i-1}, \mathfrak{A}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{A}_n, \mathfrak{N}'_\varepsilon$ würden also eine Teilung liefern, welche weniger Teile hat als die Minimalteilung des Satzes.

Satz 3. *Es sei die ω-Funktion $f(x)$ und die Zahl $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Sind dann $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n, \mathfrak{N}_\varepsilon$ und $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n, \mathfrak{M}_\varepsilon$ Minimalteilungen $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$, so besitzen die Mengen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ einerseits und die Mengen $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$ andrerseits ein gemeinsames Repräsentantensystem. D. h. es existiert eine Permutation $j_1, \ldots, j_n$ der Zahlen $1, \ldots, n$ so, daß*

$$\mathfrak{A}_i \cap \mathfrak{B}_{j_i} \neq 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Beweis. Es werden irgendwelche r der Mengen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ betrachtet, etwa $\mathfrak{A}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{i_r}$. Die übrigen $n - r$ Teile $\mathfrak{A}_i$ seien $\mathfrak{A}_{i_{r+1}}, \ldots, \mathfrak{A}_{i_n}$. Wir suchen alle $\mathfrak{B}_j$, für die

$$(\mathfrak{A}_{i_1} \cup \cdots \cup \mathfrak{A}_{i_r}) \cap \mathfrak{B}_j \neq 0$$

ist. Die sämtlichen $\mathfrak{B}_j$ mit dieser Eigenschaft seien etwa $\mathfrak{B}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{B}_{j_s}$. Die Mengen $\mathfrak{B}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{B}_{j_s}, \mathfrak{A}_{i_{r+1}}, \ldots, \mathfrak{A}_{i_n}, \mathfrak{N}_\varepsilon \cup \mathfrak{M}_\varepsilon$ bilden dann eine Teilung $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$. Deshalb ist notwendig

$$s + (n - r) \geqq n$$

und folglich

$$s \geqq r.$$

Es kann also der in der Einleitung formulierte Hilfssatz angewandt werden, und Satz 3 ist bewiesen.

Satz 4. *Es sei die ω-Funktion $f(x)$ und die Zahl $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Ist dann $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n, \mathfrak{N}_\varepsilon$ eine Minimalteilung $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$ und sind $c, d \in \mathfrak{G}$ beliebige Gruppenelemente, so besitzen die Mengen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ einerseits und die Mengen $c\mathfrak{A}_1 d, \ldots, c\mathfrak{A}_n d$ andererseits ein gemeinsames Repräsentantensystem. D. h. es existieren Gruppenelemente $h_1, \ldots, h_n$ und eine Permutation $j_1, \ldots, j_n$ der Zahlen $1, \ldots, n$ so, daß*

$$h_i \in \mathfrak{A}_i, \quad h_i \in c\mathfrak{A}_{j_i} d \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Beweis. Die Mengen

$$\mathfrak{B}_1 = c\mathfrak{A}_1 d, \ldots, \mathfrak{B}_n = c\mathfrak{A}_n d, \quad \mathfrak{M}_\varepsilon = c\mathfrak{N}_\varepsilon d \cup \mathfrak{N}_\varepsilon$$

bilden eine Minimalteilung $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$; z. B. ist $\mathfrak{M}_\varepsilon$ eine Nullmenge wegen Satz 1. Anwendung von Satz 3 liefert die Aussage des Satz 4.

Satz 5. *Ist $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n, \mathfrak{N}_\varepsilon$ eine Minimalteilung $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$ einer ω-Funktion $f(x)$ und wird $\delta > 0$ beliebig vorgegeben, so existiert eine natürliche Zahl N und in jedem der*

Teile $\mathfrak{A}_i (i = 1, \ldots, n)$ *existieren* N *Elemente* $v_1^{(i)}, \ldots, v_N^{(i)}$, *für die bei beliebiger Wahl der* $c, d \in \mathfrak{G}$

$$\frac{1}{N} \sum_{\nu} \chi(c v_\nu^{(i)} d) < \delta$$

gilt. Dabei ist $\chi(x)$ *die charakteristische Funktion von* $\mathfrak{N}_\varepsilon$.

Von den Elementen $v_1^{(i)}, \ldots, v_N^{(i)}$ fallen demnach bei beliebiger Translation stets nur verhältnismäßig wenige in die Ausnahmemenge $\mathfrak{N}_\varepsilon$.

Beweis. Es sei

$$\mu(\mathfrak{A}_i) = \alpha_i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Wegen Satz 2 folgt

$$\operatorname*{Min}_{i=1,\ldots,n} \alpha_i = \alpha > 0.$$

Da $\mathfrak{N}_\varepsilon$ eine Nullmenge ist, gibt es in $\mathfrak{G}$ Elemente $u_1, \ldots, u_L$ so, daß für alle $c, d \in \mathfrak{G}$

$$\frac{1}{L} \sum_{\lambda} \chi(c u_\lambda d) < \alpha\delta$$

gilt. Heißt die charakteristische Funktion von $\mathfrak{A}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ etwa $\chi_i(x)$, so haben wir andererseits (wegen Definition 1)

$$\operatorname*{Max}_{c,d} \frac{1}{L} \sum_{\lambda} \chi_i(c u_\lambda d) \geqq \alpha_i \geqq \alpha > 0.$$

Für jedes i existieren demnach Elemente $c^{(i)}, d^{(i)}$ so, daß einerseits

$$\frac{1}{L} \sum_{\lambda} \chi(c c^{(i)} u_\lambda d^{(i)} d) < \alpha\delta \tag{1}$$

und andererseits

$$\frac{1}{L} \sum_{\lambda} \chi_i(c^{(i)} u_\lambda d^{(i)}) \geqq \alpha > 0 \tag{2}$$

richtig ist. Nun werde die kleinste ganze Zahl $\geqq \alpha L$ mit N bezeichnet. Wegen (2) sind von den Elementen $c^{(i)} u_1 d^{(i)}, \ldots, c^{(i)} u_L d^{(i)}$ mindestens N in $\mathfrak{A}_i$ enthalten. Dies seien etwa die Elemente

$$v_\nu = c^{(i)} u_{\lambda_\nu} d^{(i)} \qquad (\nu = 1, \ldots, N).$$

Für diese Elemente gilt wegen (1)

$$\frac{1}{N} \sum_{\nu} \chi(c v_\nu d) \leqq \frac{1}{N} \sum_{\lambda} \chi(c c^{(i)} u_\lambda d^{(i)} d) < \frac{L}{N} \alpha\delta \leqq \delta.$$

Damit ist Satz 5 bewiesen.

Satz 6 (Mittelwertsatz). *Jede* ω*-Funktion* $f(x)$ *ist ergodisch, d. h. genauer: Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *existieren gewisse Gruppenelemente* $w_1, \ldots, w_m$ *so, daß für alle* $c, d \in \mathfrak{G}$

$$\left| \frac{1}{m} \sum_{\varrho} f(w_\varrho) - \frac{1}{m} \sum_{\varrho} f(c w_\varrho d) \right| < \varepsilon \tag{3}$$

ist.

Nach § 1, Satz 2 besitzt also jede ω-Funktion $f(x)$ einen wohlbestimmten Mittelwert $M_x\{f(x)\}$ und zwar gilt

$$M_x\{f(x)\} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{m} \sum_{\varrho} f(w_\varrho).$$

Aus § 1, Satz 6 folgt, daß auf diesen Mittelwert die üblichen Rechengesetze Anwendung finden können.

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wir bestimmen dann eine minimale Teilung $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$, bestehend aus den Teilen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n, \mathfrak{N}_\varepsilon$. Es darf angenommen werden, daß $(\mathfrak{A}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{A}_n) \cap \mathfrak{N}_\varepsilon = 0$ ist. (Sollte dies nicht von vornherein erfüllt sein, so ersetze man die Teile $\mathfrak{A}_i$ durch $\mathfrak{A}_i - \mathfrak{A}_i \cap \mathfrak{N}_\varepsilon$.) Sind $c, d \in \mathfrak{G}$ willkürliche Ele-

mente, so bestimmen wir gemäß Satz 4 ein gemeinsames Repräsentantensystem $h_1, \ldots, h_n$ der Mengensysteme $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ und $c\mathfrak{A}_1 d, \ldots, c\mathfrak{A}_n d$. Es sei etwa

$$h_i \in \mathfrak{A}_i \quad \text{und} \quad h_i \in c\mathfrak{A}_{j_i} d \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Dabei bedeutet j_i eine Permutation der Zahlen $i = 1, \ldots, n$. Ist ob. Gr. $|f(x)| = \Gamma$, so setzen wir $\delta = \varepsilon/2\Gamma$ und bestimmen die in Satz 5 genannten nN Elemente $v_\nu^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, n;\ \nu = 1, \ldots, N)$. Nun können wir wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{nN} \sum_{i,\nu} f(v_\nu^{(i)}) - \frac{1}{nN} \sum_{i,\nu} f(cv_\nu^{(i)} d) \right| \\
&\qquad \leqq \frac{1}{nN} \sum_{i,\nu} \left| f(v_\nu^{(i)}) - f(cv_\nu^{(j_i)} d) \right| \\
&\qquad \leqq \frac{1}{nN} \sum_{i,\nu} \left| f(v_\nu^{(i)}) - f(h_i) \right| + \left| f(h_i) - f(cv_\nu^{(j_i)} d) \right| \\
&\qquad \leqq 2\varepsilon + \frac{1}{nN} \delta N n 2\Gamma = 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Um (3) zu erhalten, brauchte man offenbar nur statt von ε von $\varepsilon/3$ auszugehen und die sich dann ergebenden $v_\nu^{(i)}$ in irgendeiner Reihenfolge mit $w_1, \ldots, w_m$ zu bezeichnen $(m = nN)$. Damit ist unser Satz bewiesen.

Um *Beispiele* von ω-Funktionen angeben zu können, muß man vor allem Nullmengen kennen. Einige Nullmengen lassen sich auf ziemlich triviale Weise angeben:

1. Ist $\mathfrak{G}$ eine unendliche Gruppe, so ist jede endliche Teilmenge $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ eine Nullmenge.

2. Ist $\mathfrak{N}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ mit unendlichem Index, so ist $\mathfrak{N}$ eine Nullmenge.

3. Ist $\mathfrak{T}$ ein unendlicher Normalteiler von $\mathfrak{G}$ und ist

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{T}h_1 \cup \mathfrak{T}h_2 \cup \cdots$$

eine Aufspaltung von $\mathfrak{G}$ in Nebengruppen, so bilden die Restklassenrepräsentanten h_i eine Nullmenge $\mathfrak{N} = \{h_i\}$. (Bei der Konstruktion von $\mathfrak{N}$ wird offensichtlich das Auswahlaxiom benutzt.)

4. Ist $\mathfrak{G}$ die Gruppe der Drehungen des Einheitskreises in sich, und bedeutet $\mathfrak{T}$ die Gruppe der Drehungen um Vielfache eines festen Winkels φ, für den $\varphi/2\pi$ irrational ist, so ist $\mathfrak{T}$ ein unendlicher Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Unter Benutzung von Beispiel **3** kann man sofort auf $\mathfrak{G}$ eine überall positive, nirgends verschwindende ω-Funktion konstruieren, deren Mittelwert 0 ist. (Eine nichtnegative meßbare Funktion mit verschwindendem Integral muß dagegen bekanntlich fast überall verschwinden; eine nicht negative fastperiodische Funktion mit verschwindendem Mittelwert muß sogar identisch verschwinden.)

5. Setzt man $\mathfrak{G}$ als lokalkompakt, aber nicht kompakt voraus, so ist, falls $\mathfrak{G}$ abelsch ist, jede kompakte Teilmenge $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ eine Nullmenge. Ist $\mathfrak{G}$ nicht-abelsch, so hat jede kompakte Teilmenge immer noch eine ergodische charakteristische Funktion $\chi(x)$ mit Mittelwert $M(\chi) = 0$. Dies läßt sich leicht zeigen; es ist mir aber nicht gelungen, zu beweisen, daß χ stark ergodisch ist, wie es die Definition 1 verlangt. Die in diesem Paragraphen dargestellte Theorie der ω-Funktionen bleibt mit nur geringen Modifikationen aber auch dann durchführbar, wenn man in der Definition 2 der ω-Funktionen (statt der Nullmengen) kompakte Mengen als Ausnahmemengen $\mathfrak{N}_\varepsilon$ zuläßt. Es ergibt sich, daß jede auf solche Weise erklärte ω-Funktion ergodisch (im Sinne der Definition 1 in § 1) ist.

Als Beispiel betrachten wir beschränkte Funktionen $f(x)$, für die eine Zahl α so existiert, daß

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \alpha$$

gilt. Das soll natürlich heißen: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine kompakte Teilmenge $\mathfrak{N}_\varepsilon$ von $\mathfrak{G}$ so, daß für $x \in \mathfrak{G} - \mathfrak{N}_\varepsilon$ die Ungleichung

$$| f(x) - \alpha | < \varepsilon$$

Gültigkeit hat. Setzt man $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{G} - \mathfrak{N}_\varepsilon$, so bilden $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{N}_\varepsilon$ eine Teilung $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$. Deshalb ist $M(f) = \alpha$. [3])

Wir kehren zu unseren ursprünglichen Begriffen (Definition 1 und 2) zurück, und zwar soll versucht werden, nach Möglichkeit einen Überblick über die Menge aller ω-Funktionen einer Gruppe zu gewinnen. Natürlich lassen sich die ω-Funktionen in gewissem Sinne als Verallgemeinerungen der fastperiodischen Funktionen der Gruppe ansehen; denn die fastperiodischen Funktionen sind solche ω-Funktionen, bei denen für jedes $\varepsilon > 0$ die Ausnahmenullmenge $\mathfrak{N}_\varepsilon$ (in Definition 2) als die leere Menge gewählt werden kann. Jedoch ist für Untersuchungen, wie man sie von der Theorie verallgemeinerter fastperiodischer Funktionen her kennt, die Menge der ω-Funktionen zu umfassend. Deshalb geben wir eine kleinere Klasse von Funktionen an, welche leichter zugängig ist. Eine beschränkte Funktion $f(x)$ auf $\mathfrak{G}$ werde dann *ω-fastperiodisch* genannt, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Nullmenge $\mathfrak{N}_\varepsilon$ und Teilmengen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ von $\mathfrak{G}$ existieren, so daß 1. $\mathfrak{A}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{A}_n = \mathfrak{G}$ und 2. für x, y aus einem $\mathfrak{A}_i$ und $cxd, cyd \in \mathfrak{G} - \mathfrak{N}_\varepsilon$

$$| f(cxd) - f(cyd) | < \varepsilon$$

Gültigkeit hat. Offensichtlich ist jede ω-fastperiodische Funktion eine ω-Funktion. Also ist jede ω-fastperiodische Funktion ergodisch und besitzt einen Mittelwert.

Die Menge der ω-fastperiodischen Funktionen läßt sich leicht überblicken. Wir nennen eine Funktion $h(x)$ eine *Nullfunktion*, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Nullmenge $\mathfrak{N}_\varepsilon$ existiert, so daß auf $\mathfrak{G} - \mathfrak{N}_\varepsilon$

$$| h(x) | < \varepsilon$$

gilt. Es läßt sich nun ziemlich leicht zeigen, daß zu jeder ω-fastperiodischen Funktion $f(x)$ eine fastperiodische Funktion $\varphi(x)$ und eine Nullfunktion $h(x)$ existieren, so daß

$$f(x) = \varphi(x) + h(x)$$

gilt. Da die ω-fastperiodischen Funktionen einen Mittelwert besitzen, kann man sich beim Beweise der aus der Theorie der verallgemeinerten fastperiodischen Funktionen bekannten Methoden bedienen [1].

Es fällt auf, daß für positivdefinite Funktionen ein ganz ähnlicher Satz richtig ist. In der Tat läßt sich (im Falle abelscher Gruppen) sofort zeigen, daß jede positivdefinite Funktion eine ω-fastperiodische Funktion ist. (Bei nicht-abelschen Gruppen lassen sich ähnliche Aussagen machen. Vgl. [3]).) Zu Teilen der Theorie von Godement [6] eröffnet sich so ein neuer Zugang. Jedoch möchte ich auf eine genauere Behandlung dieser Fragen hier nicht eingehen. Auch die Erörterung des Zusammenhangs zwischen „ω-fastperiodisch" und „weakly almost periodic" (nur für abelsche Gruppen erklärt, Eberlein [2]) soll an andrer Stelle ihren Platz finden. Schließlich möchte ich noch darauf hinweisen, daß man zu den von Følner [3] eingeführten Weyl-fastperiodischen Funktionen auf Gruppen geführt wird, wenn man in der Definition von ω-fastperiodisch die Nullmengen durch solche Mengen beliebig kleinen äußeren Maßes $\mu(\mathfrak{N})$ ersetzt. Es entsteht so die Möglichkeit, die Theorie dieser Funktionen in ähnlicher Weise durchzuführen wie die der ω-fastperiodischen Funktionen.

---

[3]) Das soeben behandelte Beispiel der lokalkompakten Gruppen zeigt, daß es in mancher Hinsicht von Vorteil gewesen wäre, die Theorie dieses Paragraphen unter geringeren Voraussetzungen durchzuführen. Dieselbe Erfahrung macht man im Falle der positivdefiniten Funktionen. Eine solche allgemeinere Theorie, die ohne Schwierigkeit gegeben werden kann, hat aber den Nachteil, daß sich die betr. Funktionen zwar als ergodisch, aber nicht ohne weiteres als stark ergodisch herausstellen.

§ 3. Fastperiodische Funktionen auf Halbgruppen.

Nullmengen und ω-Funktionen kann man auf Halbgruppen genau so erklären wie auf Gruppen. Will man die Theorie der ω-Funktionen auf Halbgruppen $\mathfrak{H}$ übertragen, so tritt beim Beweis des Satzes 4 in § 2 folgende Schwierigkeit auf. Ist $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n, \mathfrak{R}_\varepsilon$ eine (minimale) Teilung $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$ — eine solche wird bei Halbgruppen genau so definiert wie bei Gruppen — so braucht

$$(1) \qquad c\mathfrak{A}_1 d, \ldots, c\mathfrak{A}_n d, \quad c\mathfrak{R}_\varepsilon d \cup \mathfrak{R}_\varepsilon$$

durchaus nicht wieder eine Teilung zu sein, weil die Vereinigungsmenge dieser Teile nicht notwendig wieder ganz $\mathfrak{H}$ ist. Statt (1) müßte man vielmehr das Mengensystem

$$c\mathfrak{A}_1 d, \ldots, c\mathfrak{A}_n d, \quad (\mathfrak{H} - c\mathfrak{H}d) \cup c\mathfrak{R}_\varepsilon d \cup \mathfrak{R}_\varepsilon$$

betrachten. Dieses aber ist wiederum nicht notwendig eine Teilung, da

$$(2) \qquad \mu(\mathfrak{H} - c\mathfrak{H}d) = 0$$

nicht immer erfüllt ist. Wenn man aber $\mathfrak{H}$ als abelsch voraussetzt, so ist die Gleichung (2) trivialerweise richtig. Deshalb läßt sich die Theorie der ω-Funktionen abgesehen von der angedeuteten Modifikation des Beweises von Satz 4 unverändert auf den Fall abelscher Halbgruppen übertragen.

Satz 1. *Die (wie im Falle der Gruppen erklärten) ω-Funktionen auf einer abelschen Halbgruppe sind ergodisch. Sie besitzen also einen Integralmittelwert.*

Wir haben die ω-Funktionen auf Gruppen als Verallgemeinerung der fastperiodischen Funktionen auf Gruppen erkannt. Da sich der Begriff ω-Funktion auch im Falle abelscher Halbgruppen als brauchbar erwiesen hat, ist die Frage naheliegend, ob man durch Spezialisieren zu einer vernünftigen Definition von „fastperiodisch" auf abelschen Halbgruppen kommen kann. Es stellt sich heraus, daß man die für Gruppen gebräuchliche Definition von fastperiodisch wörtlich auf diesen Fall übertragen kann. Ist nämlich $\mathfrak{H}$ eine abelsche Halbgruppe und wird die Verknüpfung der Elemente durch ein $+$ Zeichen angedeutet, so gilt offensichtlich

Satz 2. *Es sei $f(x)$ eine komplexwertige Funktion der Elemente x einer abelschen Halbgruppe $\mathfrak{H}$. Wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Teilmengen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ von $\mathfrak{H}$ existieren, so daß $\mathfrak{H} = \mathfrak{A}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{A}_n$ und*

$$|f(x + c) - f(y + c)| < \varepsilon$$

ist für $x, y \in \mathfrak{A}_i$ und beliebige $c \in \mathfrak{H}$, so ist $f(x)$ eine ω-Funktion; sie ist also ergodisch und besitzt folglich einen Mittelwert.

Beispiele solcher Funktionen liefern die Koeffizienten $D_{\varrho\sigma}(x)$ der beschränkten Darstellungen $D(x) = (D_{\varrho\sigma}(x))$ der Halbgruppe. Ist $\mathfrak{H}$ etwa die multiplikative Halbgruppe der natürlichen Zahlen n, so ist $\varphi(n) = 1/n$ eine derartige Darstellung und es gilt $M(\varphi) = 0$. Jedoch ist $\varphi(n)$ sicherlich keine Normaldarstellung, d. h. sie läßt keine positivdefinite Hermitesche Form invariant. Hieraus ersieht man, daß abgesehen von dem Mittelwertsatz die Theoreme der Theorie fastperiodischer Funktionen für die Funktionen des Satzes 2 nicht allgemeingültig sind. Man muß die Definition von „fastperiodisch" anders fassen. Erst das Studium nicht-abelscher Gruppen wird uns auf den richtigen Weg führen (siehe die Definition in diesem Paragraphen).

Fréchet hat für den Fall der additiven Halbgruppe der nichtnegativen reellen Zahlen den Begriff „asymptotisch fastperiodisch" eingeführt [4]. Dieser Begriff läßt sich ohne weiteres auf beliebige abelsche Halbgruppen übertragen. Wir nennen eine Funktion $f(x)$ der Elemente einer abelschen Halbgruppe dann *asymptotisch fastperiodisch*, wenn

zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Teilmengen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ von $\mathfrak{H}$ und ein Element $a \in \mathfrak{H}$ existieren, so daß

$$\mathfrak{A}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{A}_n = \mathfrak{H}$$

und

$$| f(x + c) - f(y + c) | < \varepsilon$$

falls $x, y \in \mathfrak{A}_i$ und $x + c, y + c \in \mathfrak{H} + a$. Offensichtlich handelt es sich bei asymptotisch fastperiodischen Funktionen wieder um spezielle ω-Funktionen. Sie besitzen also einen Integralmittelwert. Ist $\mathfrak{H}$ die additive Halbgruppe der nichtnegativen reellen Zahlen, so sind die Definition von Fréchet und die soeben gegebene Definition gleichbedeutend. Da wir bei asymptotisch fastperiodischen Funktionen auf beliebigen abelschen Halbgruppen einen Mittelwert bereits zur Verfügung haben, läßt sich die Theorie dieser Funktionen wie bei Fréchet zu Ende führen. Selbstverständlich sind auch Anwendungen auf die Ergodentheorie, welche Fréchet in einer anderen Abhandlung macht, im allgemeinen Falle möglich [5].

Wir wenden uns nun beliebigen, also nicht notwendig abelschen Halbgruppen zu. Daß die Theorie der ω-Funktionen auf diesen Fall nicht ohne weiteres übertragen werden kann, haben wir bereits eingesehen. Trotzdem kann die Idee, welche den Untersuchungen des Paragraphen 2 zugrunde liegt, auch bei nicht-abelschen Halbgruppen nutzbringend angewandt werden. Man muß nur versuchen, die bereits erwähnte Schwierigkeit, welche darin liegt, daß i. a.

$$\mu(\mathfrak{H} - c\mathfrak{H}d) > 0$$

ist, irdendwie zu beseitigen. Dies wird uns im folgenden dadurch gelingen, daß wir nicht mehr beliebige, sondern nur solche c, d zulassen, welche sich in der Gestalt $c = \tilde{c}a_0$, $d = b_0\tilde{d}$ (mit geeignet ausgewählten a_0, b_0 und beliebigen $\tilde{c}, \tilde{d}$) schreiben lassen. Wir beschränken uns bei der Durchführung dieses Gedankens auf Funktionen, welche als die richtige Verallgemeinerung der fastperiodischen Funktionen auf den Fall der Halbgruppen angesehen werden können.

Definition. Es sei $\mathfrak{H}$ eine beliebige Halbgruppe mit 1-Element und $f(x)$ eine komplexwertige Funktion der Elemente $x \in \mathfrak{H}$. Wir nennen $f(x)$ dann *fastperiodisch*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Teilmengen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ von $\mathfrak{H}$ existieren, so daß

$$\mathfrak{A}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{A}_n = \mathfrak{H} \tag{3}$$

und

$$| f(cxd) - f(cyd) | < \varepsilon \qquad \text{für alle } c, d \in \mathfrak{H}, \tag{4}$$

falls nur $c'xd', c'yd' \in \mathfrak{A}_i$ für ein geeignetes $\mathfrak{A}_i$ und gewisse $c', d' \in \mathfrak{H}$ gilt.

Beispiele. 1. Es sei $\mathfrak{H}$ eine Gruppe und $f(x)$ fastperiodisch im Sinne der soeben gegebenen Definition. Dann ist $f(x)$ auch im üblichen Sinne fastperiodisch, denn aus $x, y \in \mathfrak{A}_i$ folgt $| f(cxd) - f(cyd) | < \varepsilon$ für alle $c, d \in \mathfrak{H}$. Wenn aber $f(x)$ im üblichen Sinne fastperiodisch ist, so existieren zu jedem $\varepsilon > 0$ Teilmengen $\mathfrak{A}_i$ von $\mathfrak{H}$ so, daß

$$\mathfrak{A}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{A}_n = \mathfrak{H}$$

und

$$| f(cxd) - f(cyd) | < \varepsilon \qquad \text{für alle } c, d \in \mathfrak{H}.$$

Nehmen wir an, daß $c'xd', c'yd' \in \mathfrak{A}_i$, so folgt

$$| f(cc'xd'd) - f(cc'yd'd | < \varepsilon \qquad \text{für alle } c, d \in \mathfrak{H},$$

und weil $\mathfrak{H}$ eine Gruppe ist, ergibt sich (4), d. h. $f(x)$ ist fastperiodisch im Sinne unsrer neuen Definition.

2. Die Funktion $\varphi(n) = 1/n$ auf S. 44 ist nicht fastperiodisch. Ist nämlich $0 < \varepsilon < 1/2$, und sind $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ Mengen, wie sie in (3) auftreten, so müßten die Zahlen $n!$ mit $n = 1, 2, \ldots$ sämtlich in verschiedenen Teilen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ liegen. Man kann also die Menge der natürlichen Zahlen nicht, wie es in der Definition verlangt wird, als Vereinigungsmenge von endlich vielen solchen Mengen $\mathfrak{A}_i$ auffassen. Also liefern „beschränkte" Darstellungen nicht notwendig fastperiodische Funktionen.

3. Wir nennen eine Darstellung der Elemente $x \in \mathfrak{H}$ durch Matrizen $D(x) = (D_{\varrho\sigma}(x))$ dann beschränkt, wenn nicht nur $D(x)$ beschränkte Funktion von x ist, vielmehr fordern wir, daß auch $D^{-1}(x)$ beschränkt sein soll. Dann sind die $D_{\varrho\sigma}(x)$, wie man leicht sieht, fastperiodische Funktionen von x.

Mittelwertsatz. *Jede fastperiodische Funktion auf einer Halbgruppe $\mathfrak{H}$ ist ergodisch, d. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existieren in $\mathfrak{H}$ endlich viele Elemente $v_1, \ldots, v_n$ so, daß für alle $c, d \in \mathfrak{H}$*

$$\left| \frac{1}{n} \sum_i f(v_i) - \frac{1}{n} \sum_i f(cv_i d) \right| < 4\varepsilon$$

gilt.

Man kann also jeder fastperiodischen Funktion auf eine und nur eine Weise einen Integralmittelwert

$$M_x\{f(x)\} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{n} \sum_i f(cv_i d)$$

so zuordnen, daß die bekannten Rechenregeln (Linearität, Invarianz, Monotonie, Normierung) für den Mittelwert erfüllt sind.

Beweis. Die Zahl $\varepsilon > 0$ sei beliebig vorgegeben. Wir wählen dann in $\mathfrak{H}$ zwei Elemente a_0, b_0 aus und bestimmen endlich viele Teilmengen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ von $\mathfrak{H}$ so, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Es ist

$$\mathfrak{A}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{A}_n = \mathfrak{H}.$$

2. Für beliebige $c, d \in \mathfrak{H}$ und beliebige x, y, welche beide in dem gleichen $\mathfrak{A}_i$ liegen, gilt

$$| f(ca_0 x b_0 d) - f(ca_0 y b_0 d) | < \varepsilon.$$

3. Falls für gewisse $c, d, x, y \in \mathfrak{H}$ und für gewisses $\mathfrak{A}_i$ gilt $cxd, cyd \in \mathfrak{A}_i$, so soll daraus

$$| f(x) - f(y) | < \varepsilon$$

folgen.

4. Sind a_0', b_0' und $\mathfrak{A}_1', \ldots, \mathfrak{A}_{n'}'$ irgendwelche Elemente bzw. Teilmengen von $\mathfrak{H}$, welche, an Stelle von $a_0, b_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ gesetzt, die Bedingungen 1 bis 3 erfüllen, so soll $n' \geqq n$ sein. D. h. es soll n möglichst klein sein.

Daß Mengen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ und Elemente a_0, b_0 existieren, welche die Bedingungen 1 bis 3 erfüllen, folgt unmittelbar aus der Definition von fastperiodisch: Man setze z. B. $a_0 = b_0 = 1$. Indem man a_0 und b_0 geeignet anders wählt, kann man u. U. n verkleinern und kommt so schließlich zu einem System $a_0, b_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, welches auch noch die Bedingung 4 erfüllt. Wir wollen, ähnlich wie in § 2, das System $a_0, b_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ eine *Minimalteilung* nennen. Wenn wir zwei Elemente a_0, b_0 und gewisse Mengen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ haben, die zwar die Bedingungen 1 bis 3, aber nicht notwendig 4 erfüllen, so sprechen wir von einer *Teilung* $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$.

Ausgehend von unsrer Minimalteilung $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$, die aus den Mengen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ und den Elementen a_0, b_0 besteht, konstruieren wir jetzt eine neue Teilung $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$.

Es seien $\tilde{c}, \tilde{d}$ ganz willkürliche Elemente in $\mathfrak{H}$, die wir aber zunächst festhalten. Wir bilden

$$\mathfrak{B}_1 = \tilde{c}a_0\mathfrak{A}_1 b_0 d, \ldots, \mathfrak{B}_n = ca_0\mathfrak{A}_n b_0 d. \tag{5}$$

Irgendwelche Mengen $\mathfrak{B}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{B}_{i_r}$ wählen wir aus. Die übrigen Mengen (5) seien $\mathfrak{B}_{i_{r+1}}, \ldots, \mathfrak{B}_{i_n}$. Jetzt suchen wir alle $\mathfrak{A}_j$ auf, für die

$$(\mathfrak{B}_{i_1} \cup \cdots \cup \mathfrak{B}_{i_r}) \cap \mathfrak{A}_j \neq 0$$

ist. Wir finden etwa $\mathfrak{A}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{j_s}$. Dann ist offenbar wegen der Bedingung 1 auf S. 46

$$(\mathfrak{B}_{i_1} \cup \cdots \cup \mathfrak{B}_{i_r}) < \mathfrak{A}_{j_1} \cup \cdots \cup \mathfrak{A}_{j_s}. \tag{6}$$

Nun erkläre ich Teilmengen $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_s$ von $\mathfrak{H}$ durch folgende Festsetzung: Es soll sein

$$x \in \mathfrak{C}_\nu \text{ dann und nur dann, wenn } \tilde{c}a_0 x b_0 \tilde{d} \in \mathfrak{A}_{j_\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, s). \tag{7}$$

Ich behaupte nun, daß das System (von Elementen und Mengen)

$$a_0\tilde{c}a_0,\ b_0\tilde{d}b_0,\ \mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_s,\ \mathfrak{A}_{i_{r+1}}, \ldots, \mathfrak{A}_{i_n} \tag{8}$$

eine Teilung $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$ *bildet.* Wir prüfen nacheinander die drei Bedingungen.

Ad 1. Wegen

$$(\mathfrak{A}_{i_1} \cup \cdots \cup \mathfrak{A}_{i_r}) \cup (\mathfrak{A}_{i_{r+1}} \cup \cdots \cup \mathfrak{A}_{i_n}) = \mathfrak{H},$$

genügt es zu zeigen, daß jedes Element $x \in \mathfrak{A}_{i_1} \cup \cdots \cup \mathfrak{A}_{i_r}$ in einer der Mengen $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_s$ enthalten ist. Sei also

$$x \in \mathfrak{A}_{i_\mu} \qquad (\mu = 1, \ldots, r).$$

Dann folgt

$$\tilde{c}a_0 x b_0 \tilde{d} \in \mathfrak{B}_{i_\mu} \qquad (\mu = 1, \ldots, r).$$

Wegen (6) ist demnach für geeignetes ν

$$\tilde{c}a_0 x b_0 \tilde{d} \in \mathfrak{A}_{j_\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, s).$$

Aus (7) folgt somit

$$x \in \mathfrak{C}_\nu.$$

Ad 2. Es seien c und d ganz willkürliche Elemente aus $\mathfrak{H}$. Wenn dann für gewisses ν $(\nu = 1, \ldots, s)$ und irgendwelche $x, y \in \mathfrak{H}$

$$x, y \in \mathfrak{C}_\nu$$

gilt, so folgt aus (7)

$$\tilde{c}a_0 x b_0 \tilde{d}, \quad \tilde{c}a_0 y b_0 \tilde{d} \in \mathfrak{A}_{j_\nu},$$

und somit ergibt sich aus der Bedingung 2

$$|f(ca_0\tilde{c}a_0 x b_0 \tilde{d} b_0 d) - f(ca_0\tilde{c}a_0 y b_0 \tilde{d} b_0 d)| < \varepsilon. \tag{9}$$

Ist aber für gewisses μ $(\mu = r+1, \ldots, n)$ und irgendwelche $x, y \in \mathfrak{H}$

$$x, y \in \mathfrak{A}_{i_\mu}$$

erfüllt, so folgt wieder aus der Bedingung 2

$$|f(ca_0 x b_0 d) - f(ca_0 y b_0 d)| < \varepsilon.$$

Indem man die willkürlichen c, d durch die spezielleren $ca_0\tilde{c}$ bzw. $\tilde{d}b_0 d$ ersetzt, erhält man abermals die Ungleichung (9).

Ad 3. Für gewisse Elemente $c', d', x, y \in \mathfrak{H}$ gelte

$$c'xd',\ c'yd' \in \mathfrak{C}_\nu \qquad (\nu = 1 \text{ oder} \cdots \text{oder} = s).$$

Aus (7) folgt dann für dasselbe ν

$$\tilde{c}a_0 c' x d' b_0 \tilde{d}, \quad \tilde{c}a_0 c' y d' b_0 \tilde{d} \in \mathfrak{A}_{j_\nu}.$$

Also gilt wegen Bedingung 3

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{10}$$

Wenn aber

$$c'xd',\ c'yd' \in \mathfrak{A}_{i_\mu} \qquad (\mu = r+1 \text{ oder} \cdots \text{oder} = n),$$

so ist dieselbe Ungleichung (10) trivialerweise erfüllt, ebenfalls wegen Bedingung 3.

Weil demnach tatsächlich (8) eine Teilung $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$ ist und weil $a_0, b_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ eine Minimalteilung war, so folgt

$$(n - r) + s \geqq n, \quad \text{also} \quad s \geqq r.$$

Aus dieser Tatsache entnehmen wir sofort mit Hilfe des kombinatorischen Hilfssatzes der Einleitung, daß die Mengen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ und $\tilde{c}a_0\mathfrak{A}_1 b_0\tilde{d}, \ldots, \tilde{c}a_0\mathfrak{A}_n b_0\tilde{d}$ für jede Wahl von $\tilde{c}$ und $\tilde{d}$ ein gemeinsames Repräsentantensystem besitzen. Wir dürfen jetzt ruhig statt $\tilde{c}, \tilde{d}$ wieder c, d schreiben, und unser Ergebnis kann so formuliert werden:

Zu willkürlichen $c, d \in \mathfrak{H}$ gibt es Elemente $h_1, \ldots, h_n$ und eine Permutation $j_1, \ldots, j_n$ der Zahlen $1, \ldots, n$ so, daß

$$h_i \in \mathfrak{A}_i, \quad h_i \in ca_0\mathfrak{A}_{j_i}b_0 d.$$

Nun läßt sich der Beweis des Mittelwertsatzes rasch zu Ende führen: Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $a_0, b_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ sei eine Minimalteilung $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$. In jedem der Teile $\mathfrak{A}_i$ wählen wir ein Element a_i aus und können dann für alle $c, d \in \mathfrak{H}$ schließen

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{n} \sum_i f(a_i) - \frac{1}{n} \sum_i f(ca_0 a_i b_0 d) \right| \\
&\qquad \leqq \frac{1}{n} \sum_i | f(a_i) - f(ca_0 a_{j_i} b_0 d) | \\
&\qquad \leqq \frac{1}{n} \sum_i | f(a_i) - f(h_i) | + | f(h_i) - f(ca_0 a_{j_i} b_0 d) | \\
&\qquad \leqq \varepsilon + \frac{1}{n} \sum_i | f(h_i) - f(ca_0 a_{j_i} b_0 d) | .
\end{aligned}$$

Hierin ist für geeignetes $\tilde{h}_{j_i} \in \mathfrak{A}_{j_i}$

$$h_i = ca_0 \tilde{h}_{j_i} b_0 d.$$

Weil auch $a_{j_i} \in \mathfrak{A}_{j_i}$ ist, so folgt

$$\frac{1}{n} \sum_i | f(ca_0 \tilde{h}_{j_i} b_0 d) - f(ca_0 a_{j_i} b_0 d) | < \varepsilon$$

und also

$$\left| \frac{1}{n} \sum_i f(a_i) - \frac{1}{n} \sum_i f(ca_0 a_i b_0 d) \right| < 2\varepsilon.$$

Indem wir $a_0 a_i b_0 = v_i$ setzen, erhalten wir für alle $c, d \in \mathfrak{H}$

$$\left| \frac{1}{n} \sum_i f(v_i) - \frac{1}{n} \sum_i f(cv_i d) \right| < 4\varepsilon.$$

Damit ist der Mittelwertsatz bewiesen.

Literaturangaben.

1. *A. Besicovitch* und *H. Bohr*, Almost periodicity and general trigonometric series. Acta math. **57** (1931), S. 203—292
2. *W. F. Eberlein*, Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions. Trans. Amer. Math. Soc. **67** (1949), S. 217—240.
3. *E. Følner*, W-almost periodic functions on arbitrary groups. Mat. Tidskr. B (1946), S. 153—162.
4. *M. Fréchet*, Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques. Revue scientifique. **79** (1941), S. 341—354.
5. *M. Fréchet*, Une application des fonctions asymptotiquement presque-périodiques à l'étude des familles de transformations ponctuelles et au probleme ergodique. Revue scientifique. **79** (1941), S. 407—417.
6. *R. Godement*, Les fonctions de type positif et la théorie des groupes. Trans. Amer. Math. Soc. **63** (1948), S. 1—84.
7. *W. Maak*, Fastperiodische Funktionen. Berlin (1950).
8. *J. v. Neumann*, Almost periodic functions in a group. I. Trans. Amer. Math. Soc. **36** (1934), S. 445—492.

Eingegangen 14. Januar 1951.

Bemerkung zu den Primquotienten eines distributiven Verbandes.

Von *H. F. J. Löwig* in Hobart (Tasmania).

Es sei R ein distributiver Verband. Wenn a und b Elemente von R sind, welche einen Primquotienten a/b bilden, dann ist nach (I)[1], § 8, die Menge P aller Elemente x von R, welche der Gleichung

$$(b \cup x) \cap a = b$$

genügen, ein Primideal von R. In diesem Falle möge gesagt werden, daß der Primquotient a/b das Primideal P bestimmt. Im folgenden soll bewiesen werden, daß *zwei Primquotienten a/b und a'/b'* (von Elementen von R) *dann und nur dann dasselbe Primideal von R bestimmen, wenn die Beziehung*

$$a/b \sim a'/b'$$

gilt, d. h. dann und nur dann, wenn a/b und a'/b' ähnlich (im Sinne des 3. Kapitels der Arbeit (II)) *sind.*

Es seien P und P' die Primideale, welche beziehentlich durch a/b und a'/b' bestimmt werden. Es möge erstens vorausgesetzt werden, daß

$$a/b \sim a'/b'$$

ist. Außerdem möge angenommen werden, daß

$$b \cup a' = a$$

und

$$b \cap a' = b'$$

ist. Diese Annahme bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit. Sie hat zur Folge, daß

$$(b \cup b') \cap a = b \cap a = b$$

und

$$(b \cup a') \cap a = a$$

ist. Also ist $b' \in P$, $a' \in R - P$ und $P = P'$.

Es möge zweitens von der Voraussetzung ausgegangen werden, daß

$$P = P'$$

ist. Dann ist

$$a' \in R - P,$$
$$(b \cup a') \cap a = a$$

und

$$b \cup (a \cap a') = a.$$

Außerdem ist

$$b \cap (a \cap a') = b \cap a'.$$

Also ist

(1) $$a/b \sim a \cap a'/b \cap a'.$$

[1]) Siehe Literaturverzeichnis am Schluß der vorliegenden Note.

Durch entsprechende Schlüsse findet man, daß

$$a'/b' \sim a \cap a'/a \cap b' \tag{2}$$

ist. Also sind $a \cap a'/b \cap a'$ und $a \cap a'/a \cap b'$ Primquotienten,

$$a \cap a' \in R - P,$$
$$b \cap a' \in P$$

und

$$a \cap b' \in P.$$

Also ist

$$b \cap a' = a \cap b'; \tag{3}$$

denn andernfalls würde die Gleichung

$$(b \cap a') \cup (a \cap b') = a \cap a'$$

gelten und $a \cap a'$ wäre ein Element von P. Aus (1), (2) und (3) folgt, daß

$$a/b \sim a'/b'$$

ist. Damit ist unser Beweis vollendet.

Man beachte, daß aus (3) die Gleichung

$$b \cap a' = b \cap b'$$

folgt. Also ist

$$a/b \sim a \cap a'/b \cap b'.$$

Aus Dualitätsgründen ist daher auch

$$a/b \sim a \cup a'/b \cup b'.$$

Somit dürfen wir den folgenden weiteren Satz aussprechen:

Wenn a/b und a'/b' dasselbe Primideal P bestimmen, so sind $a \cap a'/b \cap b'$ und $a \cup a'/b \cup b'$ Primquotienten, welche ebenfalls P bestimmen.

Insbesondere bilden die Zähler und die Nenner der Primquotienten, welche P bestimmen, je einen Unterverband von R.

Literaturverzeichnis.

(I) *Garrett Birkhoff*, Rings of sets. Duke Mathematical Journal **3** (1937), S. 443—454.
(II) *Øystein Ore*, On the foundation of abstract algebra. I. Annals of Mathematics **36** (1935), S. 406—437.

Eingegangen 13. Februar 1951.

Die stabilen Lagen eines ebenen n-fachen Pendels mit vertikal periodisch erschüttertem Aufhängepunkt[1].

Von *Wolfhart Haacke* in Braunschweig.

1. Einleitung.

Die Frage nach der kinetischen Stabilität schwingender mechanischer Systeme ist in den letzten Jahrzehnten mehrfach an Einzelbeispielen untersucht worden. Dabei hat das im Aufhängepunkt erschütterte ebene Pendel als verhältnismäßig einfaches und charakteristisches Musterbeispiel eine Sonderstellung eingenommen. Seitdem Lord Rayleigh und Stephenson [18] bis [21][2]) auf die an ihm zu beobachtenden Stabilisierungserscheinungen aufmerksam gemacht und die ersten Theorien zu ihrer Erklärung aufgestellt hatten, wurde immer wieder versucht, auf theoretischem Wege genauere Aussagen über dieses merkwürdige Phänomen zu machen [4], [10], [14], [15] und [22]. Die Bedeutung dieser Untersuchungen ging dabei über den Rahmen der Mechanik weit hinaus, da an einem elektromagnetischen Schwingungskreis mit periodisch veränderlichen Parametern, wie im wesentlichen Erdélyi zeigte [5] bis [8], ganz ähnliche Erscheinungen auftreten. Mit Rücksicht auf die wünschenswerte Behandlung mehrerer gekoppelter Schwingungskreise dieser Art lag es nahe, die vorliegenden Untersuchungen auf mehrfache ebene Pendel auszudehnen. Den ersten Vorstoß in dieser Richtung hat Bernhardt [1] während des zweiten Weltkrieges unternommen, doch blieb seine Arbeit unvollendet, da er kurz nach dem Kriege starb. Er begnügte sich mit der Untersuchung der Instabilitätserscheinungen eines ebenen Doppelpendels in der natürlichen Gleichgewichtslage bei vertikaler Erschütterung des Aufhängepunktes, wobei er bedenkenlos die Hauptschen Sätze aus der Theorie der Mathieuschen Differentialgleichung[3]) auf ein System solcher Differentialgleichungen übertrug, was sich nach Mettler [17] als unzulässig erwiesen hat. Trotzdem sind merkwürdigerweise, wie sich aus der vorliegenden Arbeit ergibt, die Bernhardtschen Ergebnisse im wesentlichen richtig. Daneben hat der Verfasser [9] versucht, die von Erdélyi auf das einfache Pendel angewendete Methode auf das Doppelpendel zu übertragen, doch wurde dabei nur in Näherungsaussagen ein Spezialfall unserer jetzigen Untersuchungen behandelt.

In einem gewissen, allerdings sehr losen Zusammenhang mit diesen Untersuchungen stehen die von Bradistilov [2] über das n-fache ebene Pendel, bei denen indessen der

---

[1]) Auszug aus einer Dissertation der Naturwissenschaftlich-Philosophischen Fakultät der Technischen Hochschule Braunschweig. Referenten: Prof. Dr. *R. Weyrich* und Prof. Dr. *R. Iglisch*.

[2]) [ ] bezieht sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

[3]) Für die Theorie der Mathieuschen Differentialgleichung verweisen wir auf *McLachlan* [16]. Dieses für Ingenieure geschriebene Buch enthält alle wesentlichen Sätze der Theorie dieser Differentialgleichung.

Aufhängepunkt grundsätzlich als fest angenommen wird. Für dieses werden große Schwingungen zugelassen und Aussagen über die Stabilität mit Hilfe der Perronschen Sätze über asymptotische Lösungen von allgemeinen gewöhnlichen Differentialgleichungssystemen gemacht. Wir wollen uns aber in unserer Betrachtung eines n-fachen Pendels mit erschüttertem Aufhängepunkt auf kleine Schwingungen um mögliche „Mittellagen" beschränken. Es wird untersucht, welche Lagen für Stabilität überhaupt in Frage kommen und dann, unter welchen Umständen sich diese Lagen wirklich als stabil erweisen. Wir werden erkennen, daß Stabilität höchstens dann eintreten kann, wenn alle n Arme des Pendels parallel zur Schwerkraftrichtung liegen und um solche Lagen kleine Schwingungen ausführen. Führt man die Abweichungen von solch einer Mittellage als abhängige Veränderliche ein, so läßt sich das Differentialgleichungssystem linearisieren und dann durch eine lineare Transformation entkoppeln. Diese einzelnen n entkoppelten Mathieuschen Differentialgleichungen werden nach den für das einfache Pendel aufgestellten Methoden [10] behandelt. Da es für ein gegebenes n-faches Pendel 2^n mögliche Mittellagen gibt, sind im allgemeinen $n \cdot 2^n$ Stabilisierungsuntersuchungen notwendig. Zur Durchführung dieser Untersuchungen ist eine algebraische Gleichung n-ten Grades zu lösen.

2. Die Bewegungsgleichungen eines erschütterten n-fachen ebenen Pendels.

Wir betrachten ein mechanisches System von n Körpern, deren Schwerpunkte in einer ξ, η-Ebene liegen. Der ν-te Körper und der $(\nu+1)$-te Körper seien durch eine Drehachse senkrecht zu dieser Ebene verbunden. Der Durchstoßpunkt der Achse durch diese Ebene heiße O_ν. Der erste Körper sei drehbar auf einer Achse befestigt, die senkrecht zur ξ, η-Ebene diese in O_0 durchstoße. S_ν sei der Schwerpunkt des ν-ten Körpers, m_ν seine Masse. S_ν liege auf der Geraden $O_{\nu-1}O_\nu$ so, daß $O_{\nu-1}$ nicht zwischen S_ν und O_ν liegt. Es sei $s_\nu = O_{\nu-1}S_\nu$ und $l_\nu = O_{\nu-1}O_\nu$. Die ξ, η-Ebene liege so, daß die Schwerkraft $g \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu$ in negativer η-Richtung wirke. O_0 liege auf der η-Achse und werde harmonisch um den Nullpunkt der ξ, η-Ebene bewegt: $\eta = p \cos \omega t$, wo mit t die Zeit bezeichnet sei. Das Trägheitsmoment des ν-ten Körpers um $O_{\nu-1}$ sei $m_\nu q_\nu^2$, dasjenige um S_ν sei ϑ_ν. Die Strecke $O_{\nu-1}O_\nu$ bilde mit der positiven η-Achse den Winkel φ_ν. Hat S_ν die Koordinaten ξ_ν, η_ν, so ergibt sich

$$\xi_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{\nu-1} l_\varkappa \sin \varphi_\varkappa + s_\nu \sin \varphi_\nu,$$

$$\eta_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{\nu-1} l_\varkappa \cos \varphi_\varkappa + s_\nu \cos \varphi_\nu + p \cos \omega t \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Daraus folgt

$$\dot{\xi}_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{\nu-1} l_\varkappa \dot{\varphi}_\varkappa \cos \varphi_\varkappa + s_\nu \dot{\varphi}_\nu \cos \varphi_\nu,$$

$$\dot{\eta}_\nu = -\sum_{\varkappa=1}^{\nu-1} l_\varkappa \dot{\varphi}_\varkappa \sin \varphi_\varkappa - s_\nu \dot{\varphi}_\nu \sin \varphi_\nu - \omega p \sin \omega t.$$

Die kinetische Energie T ist

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \{\vartheta_\nu \dot{\varphi}_\nu^2 + m_\nu (\dot{\xi}_\nu^2 + \dot{\eta}_\nu^2)\}$$

oder nach Einsetzen von $\dot{\xi}_\nu$, $\dot{\eta}_\nu$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\{\vartheta_\nu\dot\varphi_\nu^2 + m_\nu[\sum_{\lambda,\mu=1}^{\nu-1} l_\lambda l_\mu\dot\varphi_\lambda\dot\varphi_\mu\cos\varphi_\lambda\cos\varphi_\mu$$

$$+ 2s_\nu\dot\varphi_\nu\cos\varphi_\nu\sum_{\lambda=1}^{\nu-1} l_\lambda\dot\varphi_\lambda\cos\varphi_\lambda + s_\nu^2\dot\varphi_\nu^2\cos^2\varphi_\nu + \sum_{\lambda,\mu=1}^{\nu-1} l_\lambda l_\mu\dot\varphi_\lambda\dot\varphi_\mu\sin\varphi_\lambda\sin\varphi_\mu$$

$$+ 2s_\nu\dot\varphi_\nu\sin\varphi_\nu\sum_{\lambda=1}^{\nu-1} l_\lambda\dot\varphi_\lambda\sin\varphi_\lambda + s_\nu^2\dot\varphi_\nu^2\sin^2\varphi_\nu + 2\omega p\sin\omega t\sum_{\lambda=1}^{\nu-1} l_\lambda\dot\varphi_\lambda\sin\varphi_\lambda$$

$$+ 2\omega p\, s_\nu\dot\varphi_\nu\sin\varphi_\nu\sin\omega t + \omega^2 p^2\sin^2\omega t]\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu\Big\{q_\nu^2\dot\varphi_\nu^2 + \sum_{\lambda,\mu=1}^{\nu-1} l_\lambda l_\mu\dot\varphi_\lambda\dot\varphi_\mu\cos(\varphi_\lambda-\varphi_\mu) + 2s_\nu\dot\varphi_\nu\sum_{\lambda=1}^{\nu-1} l_\lambda\dot\varphi_\lambda\cos(\varphi_\nu-\varphi_\lambda)$$

$$+ 2\omega p\sin\omega t\Big[\sum_{\lambda=1}^{\nu-1} l_\lambda\dot\varphi_\lambda\sin\varphi_\lambda + s_\nu\dot\varphi_\nu\sin\varphi_\nu + \frac{\omega}{2}p\sin\omega t\Big]\Big\}.$$

Zufolge

$$\sum_{\sigma=1}^{n}\sum_{\tau=1}^{\sigma-1}\alpha_\sigma\beta_\tau = \sum_{\sigma=2}^{n}\sum_{\tau=1}^{\sigma-1}\alpha_\sigma\beta_\tau = \sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{\tau=\sigma+1}^{n}\alpha_\tau\beta_\sigma = \sum_{\sigma=1}^{n}\sum_{\tau=\sigma+1}^{n}\alpha_\tau\beta_\sigma$$

läßt sich mit den Abkürzungen

$$(1)\qquad \begin{aligned} A_\nu &= m_\nu q_\nu^2 + l_\nu^2\sum_{\varkappa=\nu+1}^{n} m_\varkappa \\ B_\nu &= m_\nu s_\nu + l_\nu\sum_{\varkappa=\nu+1}^{n} m_\varkappa \end{aligned}\qquad (\nu = 1,\ldots,n)$$

T in der Gestalt

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\Big\{A_\nu\dot\varphi_\nu^2 + 2B_\nu\dot\varphi_\nu\sum_{\lambda=1}^{\nu-1} l_\lambda\dot\varphi_\lambda\cos(\varphi_\nu-\varphi_\lambda)$$

$$+ 2\omega p\, m_\nu\sin\omega t\Big(\sum_{\lambda=1}^{\nu-1} l_\lambda\dot\varphi_\lambda\sin\varphi_\lambda + s_\nu\dot\varphi_\nu\sin\varphi_\nu + \frac{\omega}{2}p\sin\omega t\Big)\Big\}$$

schreiben, während mit denselben Abkürzungen für die potentielle Energie

$$U = g\sum_{\nu=1}^{n}(B_\nu\cos\varphi_\nu + m_\nu p\cos\omega t)$$

gilt. Dabei ist benutzt, daß

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu\sum_{\lambda=1}^{\nu-1}\sum_{\mu=1}^{\nu-1} l_\lambda l_\mu\dot\varphi_\lambda\dot\varphi_\mu\cos(\varphi_\lambda-\varphi_\mu) = 2\sum_{\nu=2}^{n} m_\nu\sum_{\lambda=1}^{\nu-1}\sum_{\mu=1}^{\lambda-1} l_\lambda l_\mu\dot\varphi_\lambda\dot\varphi_\mu\cos(\varphi_\lambda-\varphi_\mu) + \sum_{\nu=2}^{n} m_\nu\sum_{\lambda=1}^{\nu-1} l_\lambda^2\dot\varphi_\lambda^2$$

$$= 2\sum_{\nu=2}^{n} m_\nu\sum_{\lambda=1}^{\nu-1} k_\lambda + \sum_{\nu=2}^{n} m_\nu\sum_{\lambda=1}^{\nu-1} l_\lambda^2\dot\varphi_\lambda^2$$

$$= 2\sum_{\nu=1}^{n-1} k_\nu\sum_{\varkappa=\nu+1}^{n} m_\varkappa + \sum_{\nu=1}^{n-1} l_\nu^2\dot\varphi_\nu^2\sum_{\varkappa=\nu+1}^{n} m_\varkappa$$

mit $k_\lambda = \sum_{\mu=1}^{\lambda-1} l_\lambda l_\mu\dot\varphi_\lambda\dot\varphi_\mu\cos(\varphi_\lambda-\varphi_\mu)$ ist. Nun berechnen wir

$$\frac{\partial U}{\delta\varphi_\varrho} = -g B_\varrho\sin\varphi_\varrho,$$

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi_\varrho} = \sum_{\nu=\varrho+1}^{n}\dot\varphi_\nu B_\nu l_\varrho\dot\varphi_\varrho\sin(\varphi_\nu-\varphi_\varrho) - \dot\varphi_\varrho B_\varrho\sum_{\varkappa=1}^{\varrho-1} l_\varkappa\dot\varphi_\varkappa\sin(\varphi_\varrho-\varphi_\varkappa) + \omega p B_\varrho\dot\varphi_\varrho\cos\varphi_\varrho\sin\omega t,$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi_\varrho} = \dot\varphi_\varrho A_\varrho + l_\varrho\sum_{\nu=\varrho+1}^{n}\dot\varphi_\nu B_\nu\cos(\varphi_\nu-\varphi_\varrho) + B_\varrho\sum_{\varkappa=1}^{\varrho-1} l_\varkappa\dot\varphi_\varkappa\cos(\varphi_\varrho-\varphi_\varkappa) + \omega p B_\varrho\sin\varphi_\varrho\sin\omega t,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi_\varrho} = A_\varrho\ddot\varphi_\varrho + l_\varrho\sum_{\nu=\varrho+1}^{n} B_\nu[\ddot\varphi_\nu\cos(\varphi_\nu-\varphi_\varrho) - \dot\varphi_\nu(\dot\varphi_\nu-\dot\varphi_\varrho)\sin(\varphi_\nu-\varphi_\varrho)]$$

$$+ B_\varrho\sum_{\varkappa=1}^{\varrho-1} l_\varkappa[\ddot\varphi_\varkappa\cos(\varphi_\varrho-\varphi_\varkappa) + \dot\varphi_\varkappa(\dot\varphi_\varrho-\dot\varphi_\varkappa)\sin(\varphi_\varkappa-\varphi_\varrho)]$$

$$+ \omega p B_\varrho\dot\varphi_\varrho\cos\varphi_\varrho\sin\omega t + \omega^2 p B_\varrho\sin\varphi_\varrho\cos\omega t.$$

Die Lagrangeschen Gleichungen lauten dann bei uns:

$$A_\varrho \ddot{\varphi}_\varrho + B_\varrho \sum_{\varkappa=1}^{\varrho-1} l_\varkappa \cos(\varphi_\varrho - \varphi_\varkappa)\, \ddot{\varphi}_\varkappa + l_\varrho \sum_{\nu=\varrho+1}^{n} B_\nu \cos(\varphi_\varrho - \varphi_\nu)\, \ddot{\varphi}_\nu + B_\varrho \sum_{\varkappa=1}^{\varrho-1} l_\varkappa \dot{\varphi}_\varkappa^2 \sin(\varphi_\varrho - \varphi_\varkappa)$$

$$+ l_\varrho \sum_{\nu=\varrho+1}^{n} B_\nu \dot{\varphi}_\nu^2 \sin(\varphi_\varrho - \varphi_\nu) - B_\varrho(g - \omega^2 p \cos \omega t) \sin \varphi_\varrho = 0 \qquad (\varrho = 1, \ldots, n).$$

Wir wählen jetzt als neue unabhängige Veränderliche $u = \omega t$. Dann ergibt sich mit $h = \frac{g}{\omega^2}$

$$(2) \qquad A_\varrho \varphi_\varrho'' + B_\varrho \sum_{\varkappa=1}^{\varrho-1} l_\varkappa \cos(\varphi_\varrho - \varphi_\varkappa)\, \varphi_\varkappa'' + l_\varrho \sum_{\nu=\varrho+1}^{n} B_\nu \cos(\varphi_\varrho - \varphi_\nu)\, \varphi_\nu''$$

$$+ B_\varrho \sum_{\varkappa=1}^{\varrho-1} l_\varkappa \sin(\varphi_\varrho - \varphi_\varkappa)\, \varphi_\varkappa'^2 + l_\varrho \sum_{\nu=\varrho+1}^{n} B_\nu \sin(\varphi_\varrho - \varphi_\nu)\, \varphi_\nu'^2$$

$$- B_\varrho (h - p \cos u) \sin \varphi_\varrho = 0 \qquad (\varrho = 1, \ldots, n).$$

Wir wollen nun den Begriff der *Mittellagen* einführen. Diese Einführung ist nicht frei von einer gewissen Willkür. Doch auch bei den wesentlichen Untersuchungen über das einfache Pendel von Erdélyi [4] und Klotter [14], [15] wird die Definition wie folgt gewählt: Es sollen die Grenzwerte

$$(3) \qquad \alpha_\nu = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \varphi_\nu(\tau)\, d\tau,$$

falls sie existieren, die *Mittellagen der Pendelarme* genannt werden.

Dann wollen wir kleine Schwingungen der Pendelarme um diese Mittellagen betrachten. Dazu muß einmal untersucht werden, welche Lagen als Mittellagen überhaupt möglich sind (*mögliche Mittellagen*), und weiter, wann um mögliche Mittellagen kleine Schwingungen ausgeführt werden können.

Nun wählen wir als neue abhängige Veränderliche $\psi_\nu = \varphi_\nu - \alpha_\nu$. Für kleine Schwingungen um die Mittellagen α_ν kann $|\psi_\nu| \ll \frac{\pi}{2}$ angenommen werden. Damit ergibt sich aus (2)

$$(4) \qquad A_\varrho \psi_\varrho'' + B_\varrho \sum_{\varkappa=1}^{\varrho-1} l_\varkappa \cos(\alpha_\varrho - \alpha_\varkappa)\, \psi_\varkappa'' + l_\varrho \sum_{\nu=\varrho+1}^{n} B_\nu \cos(\alpha_\varrho - \alpha_\nu)\, \psi_\nu''$$

$$- B_\varrho (h - p \cos u) \cos \alpha_\varrho \cdot \psi_\varrho = B_\varrho (h - p \cos u) \sin \alpha_\varrho \qquad (\varrho = 1, \ldots, n).$$

Dieses lineare System hat die Partikularlösung

$$\psi_\varrho = - \operatorname{tg} \alpha_\varrho \qquad (\varrho = 1, \ldots, n).$$

Wir brauchen daher nur noch das zugehörige homogene System $(4)_h$ zu betrachten. $\psi_{h_\varrho} (\varrho = 1, \ldots, n)$ sei eine Partikularlösung dieses homogenen Systems.

3. Die Entkoppelung des Differentialgleichungssystems.

Im folgenden werden wir mit großen deutschen Buchstaben quadratische Matrizen n-ter Ordnung bezeichnen, mit kleinen deutschen Buchstaben Spalten n-ter Ordnung.

Wir wollen das System

$$(5) \qquad \mathfrak{C}\mathfrak{x}'' = f(u)\, \mathfrak{D}\mathfrak{x}$$

untersuchen. Dabei sei

$$\mathfrak{C} = \begin{Bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{1n} & \cdots & c_{11n} \end{Bmatrix}, \quad \mathfrak{D} = \begin{Bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{Bmatrix}$$

und $\mathfrak{C}$ konstant und symmetrisch, $\mathfrak{D}$ konstant.

Für unser Pendelproblem ist (vgl. (4))

$$c_{\varkappa\lambda} = \begin{cases} B_\varkappa l_\lambda \cos(\alpha_\varkappa - \alpha_\lambda) \\ A_\varkappa \\ B_\lambda l_\varkappa \cos(\alpha_\varkappa - \alpha_\lambda) \end{cases} \quad \text{für} \quad \begin{cases} \varkappa > \lambda \\ \varkappa = \lambda \\ \varkappa < \lambda, \end{cases}$$

$d_\varrho = B_\varrho \cos\alpha_\varrho$, $f(u) = h - p\cos u$ und $x_\varrho = \psi_{h_\varrho}$. Der Matrix $\mathfrak{C}$ ist die quadratische Form

$$F(\zeta) = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \zeta_\nu^2 + 2\sum_{\varkappa<\nu} B_\nu l_\varkappa \cos(\alpha_\varkappa - \alpha_\nu)\,\zeta_\varkappa\zeta_\nu$$

zugeordnet. Setzen wir (1) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} F(\zeta) &= \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu q_\nu^2 \zeta_\nu^2 + \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \sum_{\varkappa=1}^{\nu-1} l_\varkappa^2 \zeta_\varkappa^2 + 2\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu s_\nu \sum_{\varkappa=1}^{\nu-1} l_\varkappa \cos(\alpha_\varkappa - \alpha_\nu)\,\zeta_\varkappa\zeta_\nu \\ &\quad + 2\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \sum_{\varkappa=1}^{\nu-1}\sum_{\lambda=1}^{\varkappa-1} l_\varkappa l_\lambda \cos(\alpha_\varkappa - \alpha_\lambda)\,\zeta_\varkappa\zeta_\lambda \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (q_\nu^2 - s_\nu^2)\,\zeta_\nu^2 + \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \sum_{\varkappa=1}^{\nu-1} l_\varkappa^2 \zeta_\varkappa^2 + \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu s_\nu^2 \zeta_\nu^2 \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \left\{ 2 s_\nu \sum_{\varkappa=1}^{\nu-1} l_\varkappa \cos(\alpha_\varkappa - \alpha_\nu)\,\zeta_\varkappa\zeta_\nu + \sum_{\varkappa=1}^{\nu-1}\sum_{\lambda=1}^{\nu-1} l_\varkappa l_\lambda \cos(\alpha_\varkappa - \alpha_\lambda)\,\zeta_\varkappa\zeta_\lambda - \sum_{\varkappa=1}^{\nu-1} l_\varkappa^2 \zeta_\varkappa^2 \right\} \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (q_\nu^2 - s_\nu^2)\,\zeta_\nu^2 + \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \left\{ \left[\sum_{\varkappa=1}^{\nu-1} l_\varkappa \sin\alpha_\varkappa \zeta_\varkappa + s_\nu \sin\alpha_\nu \zeta_\nu \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[\sum_{\varkappa=1}^{\nu-1} l_\varkappa \cos\alpha_\varkappa \zeta_\varkappa + s_\nu \cos\alpha_\nu \zeta_\nu \right]^2 \right\} > 0, \end{aligned}$$

da $q_\nu \geqq s_\nu$ ist. Wir transformieren jetzt das System (5) mit Hilfe des Ansatzes $\mathfrak{x} = \mathfrak{F}\mathfrak{y}$, wobei $\mathfrak{F}$ eine konstante Matrix mit nichtverschwindender Determinante sein soll. Dann ergibt (5)

$$\mathfrak{C}\mathfrak{F}\mathfrak{y}'' = f(u)\,\mathfrak{D}\mathfrak{F}\mathfrak{y} \quad \text{oder auch} \quad \mathfrak{F}'\mathfrak{C}\mathfrak{F}\mathfrak{y}'' = f(u)\,\mathfrak{F}'\mathfrak{D}\mathfrak{F}\mathfrak{y},$$

wobei $\mathfrak{F}'$ die Transponierte von $\mathfrak{F}$ sein soll. $\mathfrak{D}$ ist eine Diagonalmatrix, also sicher symmetrisch, $\mathfrak{C}$ ist symmetrisch und — wie oben gezeigt — positiv. Daher gibt es eine Transformationsmatrix $\mathfrak{F}$ mit nichtverschwindender Determinante derart, daß $\mathfrak{F}'\mathfrak{C}\mathfrak{F} = \mathfrak{E}$ die Einheitsmatrix und zugleich $\mathfrak{F}'\mathfrak{D}\mathfrak{F} = \mathfrak{D}^*$ eine Diagonalmatrix ergibt, deren Diagonalelemente die (sicher reellen) Wurzeln der Gleichung

$$\det(\varepsilon\mathfrak{C} - \mathfrak{D}) = 0 \tag{6}$$

sind (verallgemeinerte Hauptachsentransformation [3])[4]).

Durch die Transformation $\mathfrak{x} = \mathfrak{F}\mathfrak{y}$ erhalten wir aus $(4)_h$ ein entkoppeltes Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} &y_1'' - (h - p\cos u)\,\varepsilon_1 y_1 = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &y_n'' - (h - p\cos u)\,\varepsilon_n y_n = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Dabei sind $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ die Wurzeln von (6). Diese n Gleichungen haben je zwei unabhängige Lösungen $y_{\varrho 1}$ und $y_{\varrho 2}$. Die zu (7) gehörige Lösungsmatrix $\mathfrak{Y}$ hat folgende Gestalt:

$$\mathfrak{Y} = \begin{Bmatrix} y_{11} & y_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{21} & y_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & y_{n1} & y_{n2} \end{Bmatrix}.$$

Durch $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}\mathfrak{Y}$ ergibt sich wegen der Regularität von $\mathfrak{F}$ ein Fundamentalsystem $\mathfrak{X}$ von $(4)_h$.

---

[4]) Diesen Beweis verdanke ich Herrn Dipl. Math. *D. Morgenstern*, Berlin.

4. Die möglichen Mittellagen.

Nach dem Floquetschen Theorem [16, S. 57] haben die Lösungen von (7) folgende Gestalt

$$y_\varrho = d_{1\varrho} e^{i\mu_\varrho u} f_\varrho(u) + d_{2\varrho} e^{-i\mu_\varrho u} f_\varrho(-u) \qquad (\varrho = 1, \ldots, n) \tag{8}$$

mit

$$f_\varrho(u) = f_\varrho(u + 2\pi) = \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} a_{\varrho\varkappa} e^{i\varkappa u}.$$

Aus der Regularität der Lösungen der Mathieuschen Differentialgleichung folgt, daß die vorstehenden Fourierreihen absolut und gleichmäßig konvergieren. Nun ist wegen $\mathfrak{x} = \mathfrak{F}\mathfrak{y}$ für $\sigma = 1, \ldots, n$

$$x_\sigma = \sum_{\nu=1}^{n} f_{\sigma\nu} y_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} f_{\sigma\nu} \left\{ d_{1\nu} e^{i\mu_\nu u} \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} a_{\nu\varkappa} e^{i\varkappa u} + d_{2\nu} e^{-i\mu_\nu u} \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} a_{\nu\varkappa} e^{-i\varkappa u} \right\}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} f_{\sigma\nu} \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} e^{i\varkappa u} \{ d_{1\nu} a_{\nu\varkappa} e^{i\mu_\nu u} + d_{2\nu} a_{\nu(-\varkappa)} e^{-i\mu_\nu u} \}.$$

Unsere Frage lautet jetzt: Für welche Parameter der Differentialgleichung ergeben sich stabile Bewegungen? Bei stabilen Bewegungen müssen die in (3) definierten Mittellagen vorhanden sein. Mit $\mathfrak{y}$ ist offensichtlich auch $\mathfrak{x}$ stabil. Es genügt daher, die Stabilität von $\mathfrak{y}$ zu untersuchen. Die Grenzwerte (3) sind aber mit

$$\lim_{u \to \infty} \frac{1}{u} \int_0^u \psi_\nu(\tau)\, d\tau = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{9}$$

äquivalent. Die μ_ϱ sind Funktionen der Parameter. Wäre nur ein einziges dieser μ_ϱ nicht reell, so kann die damit gebildete Funktion ψ_{h_ϱ} sicher nicht (9) zum Verschwinden bringen. Hätten einige der μ_ϱ einen Wert $\frac{1}{2} m$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$), so wäre die nach (8) zugehörigen Funktionen $y_{\varrho 1}$ in 2π bzw. 4π periodische Lösungen der Mathieuschen Differentialgleichung, je nachdem μ_ϱ ganzzahlig oder halbganzzahlig ist. Eine zweite unabhängige Lösung hat dann die Gestalt $y_{\varrho 2}(u) = f(u) + u \cdot g(u)$, wobei $f(u)$ und $g(u)$ beide in 2π bzw. 4π periodisch sind, wieder je nachdem ob $\frac{1}{2} m$ ganzzahlig oder halbganzzahlig ist [16, S. 141], [14].

Wir beweisen in einem Hilfssatz am Ende des Abschnitts, daß $\frac{1}{u} \int_0^u \xi g(\xi)\, d\xi$ für $u \to \infty$ nie einen Grenzwert besitzt, also für $\mu_\varrho = \frac{1}{2} m$ keine Mittellage existieren kann. Damit wäre gezeigt, daß höchstens für reelle μ_ϱ mit $\mu_\varrho \neq \frac{1}{2} m$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$) Mittellagen existieren können. Dann folgt wegen $\psi_\nu = -\operatorname{tg} \alpha_\nu + \psi_{h_\nu}$ aus (8) und (9)

$$\operatorname{tg} \alpha_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Denn alle Integrale über die Summanden von x_ν ergeben Exponentialfunktionen mit imaginären Exponenten. Für diese ist aber der Grenzwert (9) gleich Null. Da die in (8) auftretenden Reihen absolut und gleichmäßig konvergieren, ist die Vertauschung der Grenzübergänge statthaft. Die möglichen Mittellagen erhält man also, wenn man s Größen α_ν gleich Null und t Größen α_ν gleich π setzt bei $s + t = n$. Es gibt also insgesamt 2^n mögliche Mittellagen.

Hilfssatz. *Es sei* $g(u) = g(u + 2\pi)$. *Dann existiert für* $u \to \infty$ *kein (endlicher) Grenzwert für den Ausdruck*

$$\frac{1}{u}\int_0^u \xi g(\xi)\, d\xi.$$

Beweis. Es sei $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\xi)\, d\xi = a$. Wir setzen $g(u) = a + h(u)$. Dann ist $\int_0^{2\pi} h(\xi)\, d\xi = 0$ und $H(u) = \int_0^u h(\xi)\, d\xi = H(u + 2\pi)$. Damit ergibt sich

$$\frac{1}{u}\int_0^u \xi g(\xi)\, d\xi = \frac{ua}{2} + \frac{1}{u}\int_0^u \xi h(\xi)\, d\xi$$

$$= \frac{ua}{2} + H(u) - \frac{1}{u}\int_0^u H(\xi)\, d\xi.$$

Nun ist

$$\lim_{u\to\infty} \frac{1}{u}\int_0^u H(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(\xi)\, d\xi = \text{const.}$$

als Fourierkoeffizient der periodischen Funktion $H(u)$. Für $a \neq 0$ wächst daher der zu untersuchende Ausdruck unbeschränkt; für $a = 0$ ergibt sich ebenfalls kein Grenzwert, da $H(u)$ eine periodische nichtkonstante Funktion ist.

5. Die Stabilitätsverhältnisse in den Parameterebenen.

Die Stabilitätsverhältnisse der Lösungen der Mathieuschen Differentialgleichung $y'' + (\lambda + \gamma \cos u)\, y = 0$ diskutiert man zweckmäßig an Hand der *Struttschen Karte* [16, S. 40]; siehe Figur 1 und 2. Die Struttsche Karte stellt die λ, γ-Ebene dar und gibt

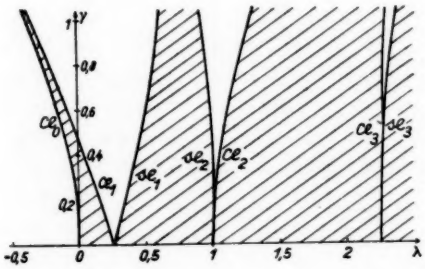

Fig. 1.

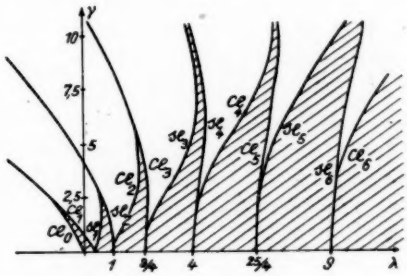

Fig. 2.

an, ob die zu einem Punkte dieser Ebene gehörigen beiden Lösungen der Differentialgleichung stabil sind oder ob dies nicht der Fall ist. Die schraffierten Bereiche in den Figuren stellen die zu nur stabilen Lösungen gehörigen Parameterwerte dar. In den unschraffierten Bereichen gibt es immer eine instabile Lösung der Differentialgleichung. Zu den den Grenzkurven zugeordneten Parameterwerten gibt es eine periodische Lösung, doch die zweite linear unabhängige Lösung ist unbeschränkt, da sie ein Glied mit u als Faktor vor einer periodischen Funktion enthält. Also gehören die Grenzkurven noch zu den instabilen Bereichen. Zu den Grenzkurven ce_ν gehören gerade, zu den se_ν ungerade

periodische Lösungen. Die ce_{2r} und die se_{2r} sind in 2π periodischen, die ce_{2r+1} und se_{2r+1} in 4π periodischen Lösungen zugehörig.

Die im folgenden benutzte Methode ist schon auf das einfache Pendel angewendet worden [10]. Jede der 2^n Möglichkeiten für eine Mittellage muß gesondert untersucht werden. Für jede Mittellage erhält man nun Werte für $c_{\varkappa\lambda}$ und $d_\varkappa$, die sich für die einzelnen Lagen höchstens durch Vorzeichen voneinander unterscheiden. Damit sind auch die n Größen ε_ϱ bekannte Konstante. Damit (7) ein allgemeines stabiles Lösungssystem hat, muß jede Gleichung von (7) einzeln nur stabile Lösungen besitzen. Für eine gewisse Mittellage setze man $\lambda = h\varepsilon_\nu$, $\gamma = p\varepsilon_\nu$ und untersuche, ob diese n Wertepaare alle in schraffierten Bereichen der Struttschen Karte liegen. Im allgemeinen sind also $n \cdot 2^n$ solche Parameterpaare zu untersuchen, wenn man sämtliche möglichen Mittellagen betrachten will[5]). Zur Herstellung der Struttschen Karte benötigt man eine analytische Darstellung der Grenzkurven. Eine Darstellung für kleine γ, die wir nur benötigen, findet man bei McLachlan [16, S. 13ff.] und Jahnke-Emde [13]. Nach Umrechnung auf unsere Normierung ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\lambda_{ce_0} &= -\frac{\gamma^2}{2} + \frac{7}{32}\gamma^4 - \frac{29}{144}\gamma^6 + \cdots \\
\lambda_{ce_1} &= \frac{1}{4} - \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma^2}{8} + \frac{\gamma^3}{32} - \frac{\gamma^4}{384} + \cdots \\
\lambda_{se_1} &= \frac{1}{4} + \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma^2}{8} - \frac{\gamma^3}{32} - \frac{\gamma^4}{384} - \cdots \\
\lambda_{se_2} &= 1 - \frac{\gamma^2}{12} + \frac{5}{3456}\gamma^4 - \cdots
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Außerdem liegen Tabellen von Ince [11], [12] vor, die weit über den γ-Bereich hinausgehen, der für uns in Frage kommt. Nach Umrechnung auf unsere Bezeichnungen ergibt sich aus den Inceschen Tabellen:

γ	ce_0	ce_1	se_1	se_2	ce_2	ce_3	se_3
0	0,0000	0,2500	0,2500	1,0000	1,0000	2,2500	2,2500
0,4	−0,0751	0,0319	0,4280	0,9867	1,0617		
0,5	−0,1138	−0,0276	0,4648	0,9793	1,0928	2,2619	2,2696
0,8	−0,2615	−0,2156	0,5541	0,9472	1,2073		
1,0	−0,3785	−0,3477	0,5948	0,9181	1,2932	2,2852	2,3426

Aus der Differentialgleichung der Mathieuschen Funktionen erkennt man, daß die Struttsche Karte zur λ-Achse symmetrisch ist. Wir werden daher grundsätzlich nur die Beträge von γ untersuchen.

6. Das Doppelpendel ($n = 2$).

Am Beispiel des Doppelpendels wollen wir uns diese Stabilisierungsphänomene veranschaulichen. Zunächst sollen die zur Betrachtung benötigten Größen berechnet werden.

$$
\begin{aligned}
A_1 &= m_1 q_1^2 + m_2 l_1^2, & B_1 &= m_1 s_1 + m_2 l_1, & d_1 &= B_1 \cos\alpha_1, \\
A_2 &= m_2 q_2^2, & B_2 &= m_2 s_2, & d_2 &= B_2 \cos\alpha_2, \\
c_{11} &= A_1, & c_{12} &= c_{21} = B_2 l_1 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) & c_{22} &= A_2.
\end{aligned}
$$

[5]) Hat die verallgemeinerte Säkulargleichung (6) mehrfache Wurzeln, so sind Gleichungen im System (7) identisch. Daher kommt man mit der Untersuchung von weniger Parameterpaaren aus. Aus mechanischen Überlegungen heraus ist dieser Fall jedoch nicht zu erwarten.

Dann geht (6) über in

$$\varepsilon^2 [A_1 A_2 - B_2^2 l_1^2 \cos^2(\alpha_1 - \alpha_2)] - \varepsilon (A_1 B_2 \cos\alpha_2 + A_2 B_1 \cos\alpha_1) + B_1 B_2 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 = 0.$$

Es wird also mit $c_\nu = \frac{B_\nu}{A_\nu}$ und $k = \frac{B_2 l_1^2}{A_1}$

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{c_1 \cos\alpha_1 + c_2 \cos\alpha_2 \pm \sqrt{(c_1 \cos\alpha_1 - c_2 \cos\alpha_2)^2 + 4c_1 c_2^2 k \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos^2(\alpha_1 - \alpha_2)}}{2[1 - c_2 k \cos^2(\alpha_1 - \alpha_2)]}.$$

Für das Weitere sei $\omega = 2n\pi$ gesetzt. Eine Verwechslung mit dem allgemeinen Freiheitsgrad n ist wohl nicht zu befürchten.

I. *Die Lage* $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Es ist

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{c_1 + c_2 \pm \sqrt{(c_1 - c_2)^2 + 4c_1 c_2^2 k}}{2(1 - c_2 k)}.$$

Wir setzen

$$D_1 = \frac{c_1 + c_2}{2(1 - c_2 k)}, \qquad E_1 = \frac{\sqrt{(c_1 - c_2)^2 + 4c_1 c_2^2 k}}{2(1 - c_2 k)},$$

Dann ist

$$\lambda_{11} = -\frac{g}{4\pi^2 n^2}(D_1 + E_1) \qquad \gamma_{11} = p(D_1 + E_1)$$

$$\lambda_{12} = -\frac{g}{4\pi^2 n^2}(D_1 - E_1) \qquad \gamma_{12} = p(D_1 - E_1).$$

Es ist sicher $D_1 > 0$, $E_1 > 0$. Wir wollen zeigen, daß $D_1 > E_1$ gilt. Dazu genügt es, die Quadrate der Zähler zu betrachten: Es muß

$$c_1^2 + 2c_1 c_2 + c_2^2 > c_1^2 - 2c_1 c_2 + c_2^2 + 4c_1 c_2^2 k, \text{ d. h. } 4c_1 c_2 (1 - c_2 k) > 0$$

sein, was sich leicht aus dem Steinerschen Satz ergibt. Daher ist $\lambda_{11} < \lambda_{12} < 0$ und $0 < \gamma_{12} < \gamma_{11}$. Wir müssen den zweiten Quadranten der λ, γ-Ebene der Struttschen Karte betrachten (Figur 1). Für kleines n und festes p ist λ sicher negativ und von großem Betrage. Dann ist das Pendel instabil, da das Vorhandensein einer einzigen instabilen Lösung einer der beiden Gleichungen (7) Instabilität des ganzen Pendels zur Folge hat.

Mit wachsenden n bewegen wir uns in der Parameterebene der Struttschen Karte auf zwei verschiedenen Geraden $\gamma_{1\nu} = \text{const.}$ nach rechts (bei $\nu = 1, 2$). Ist auf beiden Horizontalen die Grenzkurve ce_0 überschritten, die Grenzkurve ce_1 jedoch noch nicht, so ist das Pendel stabil. Da die Kurve ce_1 die γ-Achse in $\gamma = 0{,}449$ schneidet [10], kommen wir, falls beide Werte $\gamma < 0{,}449$ sind, nach Überschreiten der Kurve ce_0 nicht wieder in instabiles Gebiet.

Aus (10) ergibt sich als Bedingung dafür, daß sich beide Punkte rechts von ce_0 befinden:

$$\frac{g}{\pi^2 p}\frac{1}{n^2} < 2p(D_1 + E_1) - \frac{7}{8}[p(D_1 + E_1)]^3 + \frac{29}{36}[p(D_1 + E_1)]^5 - \cdots$$

$$\frac{g}{\pi^2 p}\frac{1}{n^2} < 2p(D_1 - E_1) - \frac{7}{8}[p(D_1 - E_1)]^3 + \frac{29}{36}[p(D_1 - E_1)]^5 - \cdots$$

Die zweite Ungleichung ist dabei immer schärfer als die erste. Ist $\gamma_{11} = p(D_1 + E_1) < 0{,}449$, was infolge der im allgemeinen kleinen Erschütterungsamplitude meist erfüllt sein wird, so können wir die Reihen auf der rechten Seite nach dem zweiten Glied abbrechen[6]. Wir erhalten dann

$$(11) \qquad n > n_0 = \frac{\sqrt{2g}}{2\pi p}\frac{1}{\sqrt{D_1 - E_1}}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{7}{16}p^2(D_1 - E_1)^2}}.$$

[6]) In den meisten Fällen wird γ_{11} so klein sein, daß ein Abbrechen nach dem ersten Gliede berechtigt ist. Dann ist der letzte Faktor in (11) gleich eins zu setzen.

Für alle $n > n_0$, der kritischen Frequenz, ist im Falle $\gamma_{1\nu} < 0{,}449$ die Lage $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ stabil. Um diese Lage kann das Doppelpendel dann kleine Schwingungen ausführen.

Ist $\gamma_{11} = p(D_1 + E_1) > 0{,}449$, so ergibt sich eine zweite kritische Frequenz n_1 derart, daß oberhalb dieser Frequenz das Pendel wieder instabil wird, wenn nämlich der Punkt $(\lambda_{11}, \gamma_{11})$ die Kurve ce_1 überschreitet. Ein zweiter Stabilitätsbereich könnte sich höchstens erst für $\gamma_{11} \approx 3{,}9$ ergeben, falls der zweite Punkt $(\lambda_{12}, \gamma_{12})$ gleichzeitig in einem stabilen Bereich der Struttschen Karte liegt. Dieser zweite Stabilitätsbereich für γ_{11} ist aber sehr schmal, so daß er experimentell kaum bestätigt werden könnte [7]).

Für größere γ ist eine graphische Lösung mit Hilfe der Figuren 1 und 2 zweckmäßig.

II. *Die Lage* $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \pi$. Jetzt ist

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{c_1 - c_2 \pm \sqrt{(c_1 + c_2)^2 - 4c_1c_2^2k}}{2(1 - c_2k)}.$$

Wir setzen diesmal

$$D_2 = \frac{c_1 - c_2}{2(1 - c_2k)}, \quad E_2 = \frac{\sqrt{(c_1 + c_2)^2 - 4c_1c_2^2k}}{2(1 - c_2k)}.$$

Es ist $D_2 \gtreqless 0, E_2 > 0$. Wir zeigen jetzt $E_2 > |D_2|$. Das folgt sofort aus

$$c_1^2 + 2c_1c_2 + c_2^2 - 4c_1c_2^2k > c_1^2 - 2c_1c_2 + c_2^2 \text{ oder } 4c_1c_2(1 - c_2k) > 0.$$

Dann ist

$$\lambda_{21} = -\frac{g}{4\pi^2n^2}(E_2 + D_2), \quad \gamma_{21} = p(E_2 + D_2),$$

$$\lambda_{22} = \frac{g}{4\pi^2n^2}(E_2 - D_2), \quad |\gamma_{22}| = p(E_2 - D_2).$$

Der erste Punkt $(\lambda_{21}, \gamma_{21})$ liegt nun im zweiten Quadranten der Struttschen Karte, der zweite $(\lambda_{22}, |\gamma_{22}|)$ im ersten Quadranten. Zur Untersuchung der Stabilität stellt man zunächst die zum ersten Punkt gehörige kritische Frequenz

$$n_0 = \frac{\sqrt{2g}}{2\pi p} \frac{1}{\sqrt{E_2 + D_2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{7}{16}p^2(D_2 + E_2)^2}}$$

fest. Für hinreichend kleines $|\gamma_{22}|$ wird dann der zweite Punkt sicher im stabilen Bereich liegen, da $|\gamma_{22}|(1 + \frac{g}{2\pi^2n^2p}) < \frac{1}{2}$ die Bedingung dafür ist, daß der zweite Punkt links von ce_1 liegt (vgl. (10)). Ist $|\gamma_{2\nu}| > 0{,}449$, so wird es keine Stabilisierung für hohe Erschütterungsfrequenzen geben, da beiderseits der γ-Achse instabile Bereiche liegen.

III. *Die Lage* $\alpha_1 = \pi, \alpha_2 = 0$. Da

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{-c_1 + c_2 \pm \sqrt{(c_1 + c_2)^2 - 4c_1c_2^2k}}{2(1 - c_2k)}$$

ist, ergibt sich bei

$$D_3 = \frac{-c_1 + c_2}{2(1 - c_2k)} \quad \text{und} \quad E_3 = \frac{\sqrt{(c_1 + c_2)^2 - 4c_1c_2^2k}}{2(1 - c_2k)}$$

$D_3 = -D_2$ und $E_2 = E_3$. Also ist auch $E_3 > |D_3|$. Damit ist

$$\lambda_{31} = -\frac{g}{4\pi^2n^2}(E_3 + D_3), \quad \gamma_{31} = p(E_3 + D_3),$$

$$\lambda_{32} = \frac{g}{4\pi^2n^2}(E_3 - D_3), \quad |\gamma_{32}| = p(E_3 - D_3),$$

also

$$\lambda_{31} = -\lambda_{22}, \quad \lambda_{32} = -\lambda_{21}, \quad \gamma_{31} = |\gamma_{22}|, \quad |\gamma_{32}| = \gamma_{21}.$$

---

[7]) Höhere Stabilitätsbereiche haben physikalisch keine Bedeutung mehr. Außerdem sind sie noch schmaler.

Die Stabilitätsverhältnisse im Fall II und III wollen wir zur γ-Achse symmetrisch nennen: Die an der γ-Achse gespiegelten Punkte des Falles II ergeben die Punkte des Falles III. Also gilt für III ebenfalls das zu Fall II Gesagte.

IV. *Die Lage* $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi$. Es ist

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{-c_1 - c_2 \pm \sqrt{(c_1 - c_2)^2 + 4c_1c_2^2k}}{2(1 - c_2k)}.$$

Wir setzen $D_4 = D_1$ und $E_4 = E_1$. Dann ist $D_4 > E_4 > 0$. Die Parameterwerte lauten jetzt

$$\lambda_{41} = \frac{g}{4\pi^2n^2}(D_4 - E_4), \quad |\gamma_{41}| = p(D_4 - E_4),$$

$$\lambda_{42} = \frac{g}{4\pi^2n^2}(D_4 + E_4), \quad |\gamma_{42}| = p(D_4 + E_4).$$

Also ist

$$\lambda_{41} = -\lambda_{12}, \lambda_{42} = -\lambda_{11}, |\gamma_{41}| = \gamma_{12}, |\gamma_{42}| = \gamma_{11}.$$

Die Fälle I und IV sind zur γ-Achse symmetrisch. Beide Punkte liegen jetzt im ersten Quadranten. Ist $|\gamma_{42}| < 0{,}449$, so ist die natürliche Gleichgewichtslage oberhalb einer gewissen Gleichgewichtslage stabil. Diese Frequenz ist diejenige, die der Abszisse des Schnittpunktes von $\gamma = \text{const.}$ mit ce_1 zugeordnet ist. Mit abnehmender Frequenz gibt es immer wieder Bereiche, in denen das Doppelpendel in der natürlichen Gleichgewichtslage instabil ist. Dazwischen liegen, wie ein Blick auf Figur 1 zeigt, mit fallender Frequenz immer „größere" Stabilitätsbereiche.

Ist p genügend klein, so wird eine stabile Bewegung bei Verkleinerung von p stabil bleiben. Dies gilt nicht mehr allgemein für große Ausgangswerte von p, da z. B. bei kleinem $\delta > 0$ eine Gerade $\lambda = \frac{1}{4} + \delta$ die Kurve se_1 zweimal schneidet.

Allgemein sei noch folgendes bemerkt: Durch zwei geeignete Transformationen könnte man es erreichen, daß in zwei zur Deckung zu bringenden Ebenen (die in *eine* Figur zu zeichnen sich empfehlen würde) übereinander dieselben Werte für $\frac{1}{n^2}$ und p zu liegen kommen, d. h. daß die Achsen mit p und $\frac{1}{n^2}$ zu beschriften sind. Doch diese Transformation

$$p = \frac{\gamma_\nu}{\varepsilon_\nu}, \quad \frac{1}{n^2} = \frac{4\pi^2 p \lambda_\nu}{g\gamma_\nu}$$

hängt von E_ν und D_ν ab. Man müßte sich also für jedes Pendel die Kurven in beiden Ebenen neu zeichnen, während wir hier ein für allemal die Figur 1 angefertigt haben. Daher erscheint uns die in dieser Arbeit benutzte Methode wesentlich zweckmäßiger. Bei einem n-fachen Pendel müßten n solche Ebenen zur Deckung gebracht werden. Mit der eben geschilderten „Deckungsmethode" hat Bernhardt [1] gearbeitet.

7. Ein Zahlenbeispiel zum Doppelpendel.

Das Doppelpendel bestehe aus zwei zylindrischen Stäben der Länge $l = 25$ cm und vom Radius $r = 1$ cm. Dann ist

$$V_1 = V_2 = l\pi r^2 = 25\pi = 78{,}540 \text{ cm}^3, \; m_1 = m_2 = 785{,}40 \text{ g}, \; s_1 = s_2 = 12{,}5 \text{ cm und}$$

$$q_1^2 = q_2^2 = \frac{l^2}{3} + \frac{r^2}{4} = 208{,}58 \text{ cm}^2.$$

Daraus ergibt sich

$$k = 9{,}3722,\ c_1 = 0{,}044986,\ c_2 = 0{,}059930 \text{ und } h = \frac{24{,}849}{n^2}.$$

Weiter sei $p = 0{,}5$ cm. Daraus berechnen wir

$$D_1 = 0{,}11968,\quad E_1 = 0{,}090398,\quad D_2 = -0{,}017047 \text{ und } E_2 = 0{,}080254.$$

Jetzt können wir die λ und γ bestimmen:

$$\lambda_{11} = -\frac{5{,}2202}{n^2},\quad \lambda_{12} = -\frac{0{,}72763}{n^2},\quad \lambda_{21} = -\frac{1{,}5707}{n^2},\quad \lambda_{22} = \frac{2{,}4179}{n^2},$$

$$\gamma_{11} = 0{,}10504,\quad \gamma_{12} = 0{,}014641,\quad \gamma_{21} = 0{,}031603,\quad |\gamma_{22}| = 0{,}04865,$$

$$\lambda_{31} = -\frac{2{,}4179}{n^2},\quad \lambda_{32} = \frac{1{,}5707}{n^2},\quad \lambda_{41} = \frac{0{,}72763}{n^2},\quad \lambda_{42} = \frac{5{,}2202}{n^2},$$

$$\gamma_{31} = 0{,}04865,\quad |\gamma_{32}| = 0{,}031603,\quad |\gamma_{41}| = 0{,}014641,\quad |\gamma_{42}| = 0{,}10504.$$

Wir benutzen die in § 6 angegebenen Methoden. Je nach der Größe der γ-Werte lösen wir die Stabilitätsfrage rechnerisch oder graphisch.

Lage I. $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\max(\gamma_{11}, \gamma_{12}) = 0{,}105$. Wir kommen daher mit (11) auf

$$n > n_0 = \frac{\sqrt{2g}}{2\pi p}\frac{1}{\sqrt{D_1 - E_1}} = 82{,}4 \text{ sec}^{-1}\ ^{8)}.$$

Ist $n > n_0$, so ist das Pendel in dieser Lage stabil.

Lage II. $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi$. Der Punkt (2, 1) liegt im zweiten Quadranten, es herrscht in dieser Lage also höchstens dann Stabilität, wenn

$$n > n_0 = \frac{\sqrt{2g}}{2\pi p}\frac{1}{\sqrt{E_2 + D_2}} = 56{,}1 \text{ sec}^{-1}$$

ist. Der zweite Punkt ist $\lambda_{22} = \frac{2{,}4179}{n^2}$, $|\gamma_{22}| = 0{,}04865$. Nun ist

$$\lambda_{22}(n_0) = \frac{2.4179}{56{,}08^2} < 0{,}01.$$

Dann zeigt Figur 1, daß $n > n_0$ für die Stabilität auch hinreicht.

Lage III. $\alpha_1 = \pi$, $\alpha_2 = 0$. Punkt (3, 1) liegt im zweiten Quadranten. Also ist notwendige Stabilitätsbedingung:

$$n > n_0 = \frac{\sqrt{2g}}{2\pi p}\frac{1}{\sqrt{E_3 + D_3}} = 45{,}2 \text{ sec}^{-1}.$$

Wie im Fall II liegt der andere Punkt $\lambda_{32} = \frac{1{,}5707}{n^2}$, $|\gamma_{32}| = 0{,}03$ dann sicher im stabilen Bereich.

Lage IV. $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi$. Jetzt liegen beide Punkte im ersten Quadranten. Für hinreichend große n ist die natürliche Lage wegen der Größenordnung von γ sicher stabil. Wir müssen jetzt die kritischen Bereiche bestimmen. Zunächst wollen wir den Punkt (4, 1) betrachten, da dessen Lage wegen der Kleinheit von $|\gamma|$ besonders gut zu überblicken ist. Zunächst der kritische Bereich um $\lambda = 0{,}25$: Hier können wir in den Formeln (10) die in γ quadratischen Glieder vernachlässigen. λ liegt im instabilen Bereich, wenn

---

[8]) Der Zusatzfaktor nach (11) hat die Größenordnung $1 + 10^{-4}$. Bei den Lagen II und III bleiben diese Faktoren ebenfalls unterhalb $1 + 10^{-3}$.

$$\frac{1}{4} - \frac{|\gamma|}{2} < \lambda_k < \frac{1}{4} + \frac{|\gamma|}{2}, \quad 0{,}2427 < \frac{0{,}7276}{n_k^2} < 0{,}2573,$$

$$\frac{0{,}7276}{0{,}2573} < n_k^2 < \frac{0{,}7276}{0{,}2427} \text{ oder } 1{,}682 < n_k < 1{,}732$$

ist. Für die nächsten kritischen Bereiche zeigt Figur 1, daß es ausreicht, n_k für diese kritischen Punkte allein zu bestimmen:

$$\lambda_k = \frac{0{,}7276}{n_k^2} = 1, \quad n_k^2 = 0{,}7276, \quad n_k = 0{,}8530\, sec^{-1},$$

$$\lambda_k = \frac{0{,}7276}{n_k^2} = 2{,}25, \quad n_k^2 = \frac{0{,}7276}{2{,}25}, \quad n_k = 0{,}5687\, sec^{-1}.$$

Die höheren kritischen Werte liegen bei noch geringeren Erschütterungsfrequenzen und machen sich daher noch weniger bemerkbar.

Jetzt muß der Punkt (4, 2) untersucht werden. Es ist $|\gamma| = 0{,}1050$. Daher setzen wir

$$\frac{1}{4} - \frac{|\gamma|}{2} - \frac{\gamma^2}{8} < \lambda_k < \frac{1}{4} + \frac{|\gamma|}{2} - \frac{\gamma^2}{8},$$

$$0{,}19610 < \frac{5{,}2202}{n_k^2} < 0{,}30114, \quad 4{,}1635 < n_k < 5{,}1595.$$

Weitere kritische Werte sind

$$\frac{5{,}2202}{n_k^2} = 1, \qquad n_k = 2{,}285\, sec^{-1},$$

$$\frac{5{,}2202}{n_k^2} = 2{,}25, \qquad n_k = 1{,}523\, sec^{-1},$$

$$\frac{5{,}2202}{n_k^2} = 4, \qquad n_k = 1{,}142\, sec^{-1},$$

$$\frac{5{,}2202}{n_k^2} = 6{,}25, \qquad n_k = 0{,}9139\, sec^{-1}.$$

Wir erhalten also für die Lage IV folgendes Ergebnis: Im allgemeinen ist das Doppelpendel in der natürlichen Lage stabil. Es gibt aber zwei Folgen von kritischen Frequenzintervallen, in denen Instabilität herrscht. Die Intervalle innerhalb der Folgen werden schnell sehr klein. Die ersten Glieder dieser Folgen lauten:

(sec^{-1})	(sec^{-1})
$1{,}68 < n < 1{,}73$	$4{,}16 < n < 5{,}16$
0,85	2,28
0,57	1,52
...	...

Für $n > 5{,}2$ herrscht also Stabilität in der natürlichen Gleichgewichtslage.

Wir erkennen, daß mit wachsender Erschütterungsfrequenz zuerst bei Lage III Stabilität eintritt, dann bei Lage II und zuletzt bei Lage I. Dies ist mechanisch auch zu erwarten, da die Schwerpunktslage des Gesamtpendels sich sukzessive nach oben verschiebt.

Literaturverzeichnis.

1. *W. Bernhardt*, Untersuchungen über das Verhalten des Doppelpendels mit senkrecht erschüttertem Aufhängepunkt.
2. *G. Bradistilov*, Über periodische und asymptotische Lösungen beim n-fachen Pendel in der Ebene. Math. Ann. **116** (1939), 181—203.
3. *R. Courant* und *D. Hilbert*, Methoden der mathematischen Physik. Berlin 1924. I. Bd. S. 25.

4. *A. Erdélyi*, Über kleine Schwingungen eines Pendels mit oszillierendem Aufhängepunkt. I. II. ZaMM. **14** (1934), 235–247. ZaMM. **16** (1936), 172–182.
5. *A. Erdélyi*, Freie Schwingungen in Kondensatorkreisen mit periodisch veränderlicher Kapazität. Ann. Physik (5) **19** (1934), 585–622, und **20** (1934), 232.
6. *A. Erdélyi*, Über Schwingungen mit langsam pulsierender Dämpfung. Ann. Physik (5) **23** (1935), 21–43 und 380.
7. *A. Erdélyi*, Über freie Schwingungen in Schwingungskreisen mit periodisch veränderlicher Selbstinduktion. Hochfreq. Elektroakustik **46** (1935), 73–77.
8. *A. Erdélyi*, Über die rechnerische Ermittlung von Schwingungsvorgängen in Kreisen mit periodisch schwankenden Parametern. Arch. Elektrotechn. **29** (1935), 473–489.
9. *W. Haacke*, Untersuchungen über die Möglichkeit der Stabilisierung eines Doppelpendels. Diplomarbeit 1949, TH. Braunschweig. 39 S. — Auszug: ZaMM. **50** (1950), 233–234.
10. *W. Haacke*, Bemerkungen zur Stabilisierung eines physikalischen Pendels. ZaMM. **51** (1951), 161–169; 333–338.
11. *E. L. Ince*, Researches into the characteristic numbers of the Mathieu equation. Proc. Roy. Soc. Edinburgh **46** (1926), 20–29.
12. *E. L. Ince*, Tables of the elliptic cylinder functions. Proc. Roy. Soc. Edinburgh **52** (1932), 355–375.
13. *E. Jahnke* und *F. Emde*, Tafeln höherer Funktionen. 4. Aufl. Leipzig (1948), S. 281.
14. *K. Klotter*, Stabilisierung und Labilisierung durch Schwingungen. Forsch. Ing. Wes. **12** (1941), 209–225.
15. *K. Klotter* und *G. Kotowski*, Über die Stabilität der Bewegungen eines Pendels mit oszillierendem Aufhängepunkt. ZaMM. **19** (1939), 289–296.
16. *N. W. McLachlan*, Theory and application of Mathieu functions. Oxford 1947. 401 S.
17. *E. Mettler*, Allgemeine Theorie der Stabilität erzwungener Schwingungen elastischer Körper. Ing. Arch. **17** (1949), 418–449.
18. *J. W. Rayleigh*, On the maintenance of vibrations. Sci. Papers **3** (1887), 1–14.
19. *J. W. Rayleigh*, Theory of sound. London 1926. Bd. I, S. 81.
20. *A. Stephenson*, A class of forced oscillations. Quart. Journ. of Math. Oxford **37** (1906), 353–360.
21. *A. Stephenson*, A new type of dynamical stability. Manchester Phil. Soc. **8** (1908), 10 S.
22. *M. I. O. Strutt*, Stabiliseering en labiliseering door trillingen. Physica **7** (1927), 265–271.

Eingegangen 19. März 1951.

On the properties of freely generated algebras.

By *Henry F. J. Löwig* in Hobart (Australia).

In the beginning of § 9 of his paper (I) *) G. Birkhoff states that the definition of functions and laws within a species of algebras is connected with some difficulties. The author of the present paper wishes to give a definition (the following Definition 2. 1) of a "freely generated algebra" which avoids the logical difficulties connected with Definition 2 of (I). Starting from the new definition, some properties of freely generated algebras will be discussed.

§ 1. Introduction.

Definition 1. 1. *If A and T are sets, by a T-operator over A is meant an element of $A^{(A^T)}$* [1].

Hence if f is a T-operator over A and $a \in A^T$, then $fa \in A$.

Throughout this paper we shall assume that a set S and an S-system σ of sets (i. e., a function of proper domain S the values of which are sets) are given. It follows that if $s \in S$, then σs is a set.

Definition 1. 2. *By an operator system of species σ over a set A, we mean an element of $\Pi\{A^{(A^{\sigma s})};\ s \in S\}$* [2].

Hence if $\mathfrak{A}$ is an operator system of species σ over A, $s \in S$, and $a \in A^{\sigma s}$, then $\mathfrak{A}s$ is an element of $A^{(A^{\sigma s})}$ or a σs-operator over A, and $(\mathfrak{A}s)a$ is an element of A.

Theorem 1. 1. *If σ_1 and σ_2 are S-systems of non-void sets, and A is the void set, then there exists exactly one operator system $\mathfrak{A}_1$ of species σ_1 over A and exactly one operator system $\mathfrak{A}_2$ of species σ_2 over A, and $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2$ even if $\sigma_1 \neq \sigma_2$.*

Proof. If $s \in S$, then $A^{\sigma_1 s}$ and $A^{\sigma_2 s}$ are void, and $A^{(A^{\sigma_1 s})}$ as well as $A^{(A^{\sigma_2 s})}$ has exactly one element, namely the void function [3]. Hence $\Pi\{A^{(A^{\sigma_\nu s})};\ s \in S\}$ has, for $\nu = 1,2$, exactly one element, namely the function of proper domain S whose value at any element of S is the void function.

---

*) See list of references at the end of the present paper.

[1]) If A and B are sets, by an A-system of elements of B is meant a (single-valued) function of proper domain A and values in B. B^A is the set of all A-systems of elements of B (see (III), lst chapter, § 4, p. 24); if $f \in B^A$ and $a \in A$, fa is the value of f at a.

[2]) If A is a set, and b_a is a thing for $a \in A$, $[b_a;\ a \in A]$ is the set of these things, and $\{b_a;\ a \in A\}$ is the function of proper domain A taking the value b_a at a for $a \in A$. $[b_1]$, $[b_1, b_2]$ and $[b_1, b_2, b_3]$ are the sets of the elements indicated, while $\{b_1\}$, $\{b_1, b_2\}$ and $\{b_1, b_2, b_3\}$ are abbreviations for $\{b_a; a \in [1]\}$, $\{b_a; a \in [1, 2]\}$ and $\{b_a;\ a \in [1, 2, 3]\}$, respectively. If B is a set of sets, $\mathfrak{S}B$ is their union, and $\mathfrak{P}B$ is their intersection if B is not void. If T is a set, and G is a T-system of sets, by $\mathfrak{S}G$ is meant $\mathfrak{S}[Gt;\ t \in T]$, by ΠG is meant the set of all elements g of $(\mathfrak{S}G)^T$ such that $gt \in Gt$ for $t \in T$, and by $\mathfrak{P}G$ is meant $\mathfrak{P}[Gt;\ t \in T]$ if T is not void.

[3]) We postulate the existence of one and only one function the proper domain of which is void. We call it the void function or the void system. Hence if B is a set, and A is the void set, then B^A has exactly one element, namely the void function.

Theorem 1. 2. *If A_1 and A_2 are sets the intersection of which is not void if S is not void, and σs is void for $s \in S$, then there exists an operator system of species σ over A_1 which is, at the same time, an operator system of species σ over A_2, even if $A_1 \neq A_2$.*

Proof. Let b be an element of $(\mathfrak{P}[A_1, A_2])^S$. Then we define a common element $\mathfrak{A}$ of $\Pi\{A_1^{(A_s^{\sigma s})};\ s \in S\}$ and $\Pi\{A_2^{(A_s^{\sigma s})};\ s \in S\}$ by requiring that

$$(\mathfrak{A}s)a = bs$$

if $s \in S$ and a is the void function.

It is easily shown that if, for $\nu = 1, 2$, A_ν and S_ν are sets, σ_ν is an S_ν-system of sets, and $\mathfrak{A}_\nu$ is an operator system of species σ_ν over A_ν, it can occur that $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2$ but $\sigma_1 \neq \sigma_2$ or $A_1 \neq A_2$ only in cases stated in Theorems 1. 1 and 1. 2.

Definition 1. 3. *By an algebra of species σ over a set A, we mean an element of* $(\Pi\{A^{(A^{\sigma s})};\ s \in S\})^{[\{\sigma, A\}]}$.

An element of $(\Pi\{A^{(A^{\sigma s})};\ s \in S\})^{[\{\sigma, A\}]}$ is a function the proper domain of which has exactly one element, namely $\{\sigma, A\}$. If $\mathfrak{A}$ is such a function or an algebra of species σ over A, then $\mathfrak{A}\{\sigma, A\}$ is an operator system of species σ over A. If, in addition, s is an element of S and a is an element of $A^{\sigma s}$, then $(\mathfrak{A}\{\sigma, A\})s$ is a σs-operator over A, and $((\mathfrak{A}\{\sigma, A\})s)a$ is an element of A.

It readily follows from Definition 1. 3 that if, for $\nu = 1, 2$, A_ν and S_ν are sets, σ_ν is an S_ν-system of sets, and $\mathfrak{A}_\nu$ is an algebra of species σ_ν over A_ν, and $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2$, then $A_1 = A_2$, $S_1 = S_2$, and $\sigma_1 = \sigma_2$.

Definition 1. 4. *If A is a set and $\mathfrak{A}$ is an algebra of species σ over A (so that $\mathfrak{A}\{\sigma, A\}$ is an operator system of species σ over A), $\mathfrak{A}\{\sigma, A\}$ is called the operator system of $\mathfrak{A}$ and denoted by $\langle\mathfrak{A}\rangle$.*

It follows that if, in addition, s is an element of S, and a is an element of $A^{\sigma s}$, then $\langle\mathfrak{A}\rangle s$ is a σs-operator over A, and $(\langle\mathfrak{A}\rangle s)a$ is an element of A.

In (I), G. Birkhoff considers a set $\mathfrak{C}$, an ordinal s, ordinals $k_1, \ldots, k_s$, and "uniform" operators $f_1, \ldots, f_s$ of "indices" $k_1, \ldots, k_s$. f_i assigns to each sequence $(x_1, \ldots, x_{k_i})$ of elements of $\mathfrak{C}$ an element of $\mathfrak{C}$. G. Birkhoff denotes the class of the f_i by F and the couple $(\mathfrak{C}, F)$ by A. He calls A a uniform algebra. The following table shows how our notation corresponds to G. Birkhoff's notation.

Notation used in this paper	Notation used in (I)
S	class of the ordinals $1, \ldots, s$
$s \in S$	$i = 1, \ldots, s$
σs	class of the ordinals $1, \ldots, k_i$
σ	function which assigns to each $i = 1, \ldots, s$ the class of the ordinals $1, \ldots, k_i$
A	$\mathfrak{C}$
element of $A^{\sigma s}$	sequence $(x_1, \ldots, x_{k_i})$ of elements of $\mathfrak{C}$
$\mathfrak{A}$	A
$\langle\mathfrak{A}\rangle$	F
$\langle\mathfrak{A}\rangle s$	f_i
$(\langle\mathfrak{A}\rangle s)a$	$f_i(x_1, \ldots, x_{k_i})$

Definition 1. 5. *If A is a set, and $\mathfrak{A}$ is an algebra of species σ over A, A is called the definition set of $\mathfrak{A}$ and denoted by $[\mathfrak{A}]$, and the cardinal number of A is called the order of $\mathfrak{A}$ and denoted by $|\mathfrak{A}|$.*

We shall sometimes use the word "algebra" in the sense of "algebra of species σ". From now on, the signs $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{C}_2$ will denote algebras.

Definition 1. 6. *We define a relation $\mathsf{P}_0\mathfrak{A}$ over $[\mathfrak{A}]$ by requiring that, for $a_1 \in [\mathfrak{A}]$, $a_2 \in [\mathfrak{A}]$, $a_1(\mathsf{P}_0\mathfrak{A})a_2$*[4] *holds if and only if there exist an element s of S, an element b of $[\mathfrak{A}]^{\sigma s}$, and an element k of σs such that $a_1 = bk$, and $a_2 = (\langle\mathfrak{A}\rangle s)b$.*

Definition 1. 7. *By $\mathsf{P}\mathfrak{A}$, we mean the quasi-ordering* (see, e.g., (II), p. 444) *of $[\mathfrak{A}]$ generated by $\mathsf{P}_0\mathfrak{A}$, that is, the intersection of all quasi-orderings r of $[\mathfrak{A}]$ such that $r > \mathsf{P}_0\mathfrak{A}$*[4]*.*

It is obvious that, for $a \in [\mathfrak{A}]$, $b \in [\mathfrak{A}]$, $a(\mathsf{P}\mathfrak{A})b$ holds if and only if there exist a finite cardinal n and elements a_ν ($\nu \in \mathfrak{b}n$) of $[\mathfrak{A}]$ such that $a_0 = a$, $a_n = b$, and $a_{\nu-1}(\mathsf{P}_0\mathfrak{A})a_\nu$ for $\nu \in \mathfrak{b}\{1, n\}$[5].

A subset B of $[\mathfrak{A}]$ will be called $\mathfrak{A}$-closed if $s \in S$ and $a \in B^{\sigma s}$ imply $((\langle\mathfrak{A}\rangle s)a) \in B$.

Theorem 1. 3. *The void set is $\mathfrak{A}$-closed if and only if σs is non-void for $s \in S$.*

It follows that the void set is either $\mathfrak{A}$-closed for any algebra $\mathfrak{A}$ or $\mathfrak{A}$-closed for no algebra $\mathfrak{A}$ of the given species.

Definition 1. 8. *We define a representation $Z\mathfrak{A}$ of the set of all subsets of $[\mathfrak{A}]$ into the set of all subsets of $[\mathfrak{A}]$ by requiring that, for $Q < [\mathfrak{A}]$, $(Z\mathfrak{A})Q$ be the $\mathfrak{A}$-closure of Q, that is, the intersection of all $\mathfrak{A}$-closed subsets of $[\mathfrak{A}]$ containing Q.*

It is obvious that $(Z\mathfrak{A})Q$ is itself an $\mathfrak{A}$-closed subset of $[\mathfrak{A}]$ containing Q, and that $(Z\mathfrak{A})Q = Q$ if and only if Q is $\mathfrak{A}$-closed.

Definition 1. 9. *We define a representation $z\mathfrak{A}$ of the set of all subsets of $[\mathfrak{A}]$ into $\mathfrak{b}\,|\mathfrak{A}|$ by the equation*[6]

$$(z\mathfrak{A})Q = |(Z\mathfrak{A})Q| \quad \text{for } Q < [\mathfrak{A}].$$

Theorem 1. 4. *If $Q < [\mathfrak{A}]$, then*

$$\mathfrak{S}[Q, \mathfrak{S}[[(\langle\mathfrak{A}\rangle s)a;\ a \in ((Z\mathfrak{A})Q)^{\sigma s}];\ s \in S]] = (Z\mathfrak{A})Q.$$

Proof. $\mathfrak{S}[Q, \mathfrak{S}[[(\langle\mathfrak{A}\rangle s)a;\ a \in ((Z\mathfrak{A})Q)^{\sigma s}];\ s \in S]]$ contains Q, is contained in $(Z\mathfrak{A})Q$, and is $\mathfrak{A}$-closed.

Theorem 1. 5. *If $\mathfrak{B}$ is a subalgebra*[7] *of $\mathfrak{A}$, and C is a subset of $[\mathfrak{B}]$, then $(Z\mathfrak{A})C = (Z\mathfrak{B})C$, $(z\mathfrak{A})C = (z\mathfrak{B})C$, and C is $\mathfrak{A}$-closed if and only if it is $\mathfrak{B}$-closed.*

Definition 1. 10. *If Q is a subset of $[\mathfrak{A}]$, the subalgebra of $\mathfrak{A}$ for which Q is a basis*[8] *is denoted by $(\mathfrak{Z}\mathfrak{A})Q$.*

It follows that $[(\mathfrak{Z}\mathfrak{A})Q] = (Z\mathfrak{A})Q$, and $|(\mathfrak{Z}\mathfrak{A})Q| = (z\mathfrak{A})Q$. If Q is $\mathfrak{A}$-closed, $(\mathfrak{Z}\mathfrak{A})Q$ is the subalgebra of $\mathfrak{A}$ over Q.

Theorem 1. 6. *If $\mathfrak{B}$ is a subalgebra of $\mathfrak{A}$, and C is a subset of $[\mathfrak{B}]$, then $(\mathfrak{Z}\mathfrak{A})C = (\mathfrak{Z}\mathfrak{B})C$.*

---

[4]) If A is a set, r is a relation defined over A, and a and b are elements of A, then arb means that the relation r holds between a and b in this order; if r_1 and r_2 are relations over A, then $r_1 < r_2$ or $r_2 > r_1$ means that $a \in A$, $b \in A$ and ar_1b imply ar_2b.

[5]) If m and n are cardinals, the set of all cardinals p such that $m \leqq p \leqq n$ is denoted by $\mathfrak{b}\{m, n\}$; $\mathfrak{b}n$ means $\mathfrak{b}\{0, n\}$.

[6]) If A is a set, by $|A|$ is meant the cardinal number of A.

[7]) In our notation, $\mathfrak{B}$ is a subalgebra of $\mathfrak{A}$ if $[\mathfrak{B}] < [\mathfrak{A}]$, and $(\langle\mathfrak{B}\rangle s)a = (\langle\mathfrak{A}\rangle s)a$ for $s \in S$, $a \in [\mathfrak{B}]^{\sigma s}$. It is obvious that if B is a subset of $[\mathfrak{A}]$, a subalgebra $\mathfrak{B}$ of $\mathfrak{A}$ such that $[\mathfrak{B}] = B$ exists if and only if B is $\mathfrak{A}$-closed, and that $\mathfrak{B}$ is unique if it exists.

[8]) We say that a subset Q of $[\mathfrak{A}]$ generates $\mathfrak{A}$ or is a basis of $\mathfrak{A}$ if $(Z\mathfrak{A})Q = [\mathfrak{A}]$. If Q is any subset of $[\mathfrak{A}]$, there exists exactly one subalgebra of $\mathfrak{A}$ for which Q is a basis, namely the subalgebra of $\mathfrak{A}$ over $(Z\mathfrak{A})Q$.

Theorem 1. 7. *If $\mathfrak{B}_1$ is a subalgebra of $\mathfrak{A}_1$, and h is a homomorphism*[9]) *of $\mathfrak{A}_1$ into $\mathfrak{A}_2$, then the set $[hb;\ b \in [\mathfrak{B}_1]]$ is $\mathfrak{A}_2$-closed and $\{hb;\ b \in [\mathfrak{B}_1]\}$ is a homomorphism of $\mathfrak{B}_1$ on $(\mathfrak{Z}\mathfrak{A}_2)[hb;\ b \in [\mathfrak{B}_1]]$.*

Proof. If s is an element of S, and b_2 is an element of $[hb;\ b \in [\mathfrak{B}_1]]^{\sigma s}$, then there exists an element b_1 of $[\mathfrak{B}_1]^{\sigma s}$ such that $h \cdot b_1 = b_2$. Hence

$$(\langle\mathfrak{A}_2\rangle s)b_2 = (\langle\mathfrak{A}_2\rangle s)(h \cdot b_1) = h((\langle\mathfrak{A}_1\rangle s)b_1),$$

and $(\langle\mathfrak{A}_2\rangle s)b_2 \in [hb;\ b \in [\mathfrak{B}_1]]$.

Theorem 1. 8. *Let h be a homomorphism of $\mathfrak{A}_1$ into $\mathfrak{A}_2$, let B_2 be an $\mathfrak{A}_2$-closed subset of $[\mathfrak{A}_2]$, and B_1 be the set of all elements a of $[\mathfrak{A}_1]$ such that $ha \in B_2$. Then B_1 is $\mathfrak{A}_1$-closed.*

Proof. Let s be an element of S, and let b *be an element of* $B_1^{\sigma s}$. Then $h \cdot b \in B_2^{\sigma s}$, $(\langle\mathfrak{A}_2\rangle s)(h \cdot b) \in B_2$, $(\langle\mathfrak{A}_1\rangle s)b \in B_1$.

Theorem 1. 9. *If Q is a subset of $[\mathfrak{A}_1]$, and h is a homomorphism of $\mathfrak{A}_1$ into $\mathfrak{A}_2$, then*

$$(Z\mathfrak{A}_2)[ha;\ a \in Q] = [ha;\ a \in (Z\mathfrak{A}_1)Q],$$

and $\{ha;\ a \in (Z\mathfrak{A}_1)Q\}$ is a homomorphism of $(\mathfrak{Z}\mathfrak{A}_1)Q$ on $(\mathfrak{Z}\mathfrak{A}_2)[ha;\ a \in Q]$.

Proof. By Theorem 1. 7, $[ha;\ a \in (Z\mathfrak{A}_1)Q]$ is $\mathfrak{A}_2$-closed. Let B_2 be an $\mathfrak{A}_2$-closed subset of $[\mathfrak{A}_2]$ containing $[ha;\ a \in Q]$, and let B_1 be the set of all elements b of $[\mathfrak{A}_1]$ such that $hb \in B_2$. Then $B_1 > Q$, $B_1 > (Z\mathfrak{A}_1)Q$ (notice Theorem 1. 8.),

$$[hb;\ b \in B_1] > [ha;\ a \in (Z\mathfrak{A}_1)Q], \text{ and } B_2 > [ha;\ a \in (Z\mathfrak{A}_1)Q].$$

Theorem 1. 10. *If h_1 and h_2 are homomorphisms of $\mathfrak{A}$ into $\mathfrak{B}$, the set of all elements a of $[\mathfrak{A}]$ of the property that $h_1a = h_2a$, is $\mathfrak{A}$-closed. If h is a homomorphism of $\mathfrak{A}$ into $\mathfrak{A}$, the set of all elements a of $[\mathfrak{A}]$ of the property that $ha = a$, is $\mathfrak{A}$-closed.*

Proof. Let A_0 be the set of all elements a of $[\mathfrak{A}]$ such that $h_1a = h_2a$. Let s be an element of S, and a_0 be an element of $A_0^{\sigma s}$. Then

$$h_1((\langle\mathfrak{A}\rangle s)a_0) = (\langle\mathfrak{B}\rangle s)(h_1 \cdot a_0) = (\langle\mathfrak{B}\rangle s)(h_2 \cdot a_0) = h_2((\langle\mathfrak{A}\rangle s)a_0).$$

Theorem 1. 11. *If Q is a basis of $\mathfrak{A}$, and b is an element of $[\mathfrak{B}]^Q$, there exists at the most one homomorphism h of $\mathfrak{A}$ into $\mathfrak{B}$ such that $ha = ba$ for $a \in Q$.*

Definition 1. 11. *If Q is a basis of $\mathfrak{A}$, and b is an element of $[\mathfrak{B}]^Q$, the homomorphism h of $\mathfrak{A}$ into $\mathfrak{B}$ satisfying the equation $ha = ba$ for $a \in Q$ is denoted by $(\varphi\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\})b$ if it exists.*

Theorem 1. 12. *Let $\mathfrak{C}$ be a subalgebra of $\mathfrak{B}$, let Q be a basis of $\mathfrak{A}$, and let b be an element of $[\mathfrak{C}]^Q$. In this case, $(\varphi\{\mathfrak{A}, \mathfrak{C}\})b$ exists if and only if $(\varphi\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\})b$ exists, and*

$$(\varphi\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\})b = (\varphi\{\mathfrak{A}, \mathfrak{C}\})b$$

if $(\varphi\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\})b$ or $(\varphi\{\mathfrak{A}, \mathfrak{C}\})b$ exists.

Proof. $(\varphi\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\})b$ or $(\varphi\{\mathfrak{A}, \mathfrak{C}\})b$ is, if it exists, a homomorphism of $\mathfrak{A}$ on $(\mathfrak{Z}\mathfrak{B})[ba;\ a \in Q]$ or $(\mathfrak{Z}\mathfrak{C})[ba;\ a \in Q]$ respectively, by Theorem 1. 9. Now notice Theorems 1. 6 and 1. 11.

Theorem 1. 13. *Let Q_1 be a basis of $\mathfrak{A}_1$, let Q_2 be a basis of $\mathfrak{A}_2$, and let b be a one-to-one representation of Q_1 on Q_2. Suppose that $(\varphi\{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2\})b$ and $(\varphi\{\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1\})b^{-1}$ exist. Then $(\varphi\{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2\})b$ is an isomorphism of $\mathfrak{A}_1$ on $\mathfrak{A}_2$.*

Proof. For $a \in Q_1$,

$$((\varphi\{\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1\})b^{-1})(((\varphi\{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2\})b)a) = ((\varphi\{\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1\})b^{-1})(ba) = b^{-1}(ba) = a;$$

similarly,

$$((\varphi\{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2\})b)(((\varphi\{\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1\})b^{-1})a) = a \text{ for } a \in Q_2.$$

[9]) If A, B, and C are sets, $b \in B^A$, and $c \in C^B$, by $c \cdot b$ is meant $\{c(ba);\ a \in A\}$. By a homomorphism of $\mathfrak{A}_1$ into $\mathfrak{A}_2$ we mean a representation h of $[\mathfrak{A}_1]$ into $[\mathfrak{A}_2]$ such that $h((\langle\mathfrak{A}_1\rangle s)b) = (\langle\mathfrak{A}_2\rangle s)(h\ \ b)$ for $s \in S$, $b \in [\mathfrak{A}_1]^{\sigma s}$; if, in particular, $[ha;\ a \in [\mathfrak{A}_1]] = [\mathfrak{A}_2]$, we call h a homomorphism of $\mathfrak{A}_1$ on $\mathfrak{A}_2$. Accordingly, the words: "homomorphic image", "isomorphism", and "isomorphic" are to be understood. — It is obvious that h is a homomorphism of $\mathfrak{A}_1$ into $\mathfrak{A}_2$ if it is a homomorphism of $\mathfrak{A}_1$ into a subalgebra of $\mathfrak{A}_2$.

Now Theorem 1. 10 involves that even

$$((\varphi\{\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1\})b^{-1})(((\varphi\{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2\})b)a) = a \text{ for } a \in [\mathfrak{A}_1],$$

and

$$((\varphi\{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2\})b)(((\varphi\{\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1\})b^{-1})a) = a \text{ for } a \in [\mathfrak{A}_2].$$

Hence $(\varphi\{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2\})b$ and $(\varphi\{\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1\})b^{-1}$ are mutually inverse.

§ 2. Freely generated algebras.

Definition 2. 1. *A set Q is said to be free in $\mathfrak{A}$ if Q is a subset of $[\mathfrak{A}]$, and the following two conditions are satisfied:*

(2. 1) *$s \in S$ and $a \in ((Z\mathfrak{A})Q)^{\sigma s}$ imply $(\langle\mathfrak{A}\rangle s)a \in Q$.*

(2. 2) *$s_1 \in S$, $s_2 \in S$, $a_1 \in ((Z\mathfrak{A})Q)^{\sigma s_1}$, $a_2 \in ((Z\mathfrak{A})Q)^{\sigma s_2}$ and*

$$(\langle\mathfrak{A}\rangle s_1)a_1 = (\langle\mathfrak{A}\rangle s_2)a_2 \text{ imply } s_1 = s_2 \text{ and } a_1 = a_2.$$

Q is called a free basis of $\mathfrak{A}$ if it is a basis of $\mathfrak{A}$ and free in $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{A}$ is said to be freely generated if it has at least one free basis.

It is obvious that any subset of Q is free in $\mathfrak{A}$ if Q is free in $\mathfrak{A}$. If $Q < [\mathfrak{B}]$, and $\mathfrak{B}$ is a subalgebra of $\mathfrak{A}$, then Q is free in $\mathfrak{A}$ if and only if it is free in $\mathfrak{B}$. In particular, if Q is free in $\mathfrak{A}$, it is a free basis of $(\mathfrak{Z}\mathfrak{A})Q$.

Theorem 2. 1. *If Q is a free basis of $\mathfrak{A}$, and Q_0 is a subset of Q, then Q_0 is a free basis of $(\mathfrak{Z}\mathfrak{A})Q_0$.*

Theorem 2. 2. *If Q_1 and Q_2 are sets free in $\mathfrak{A}$, and $(Z\mathfrak{A})Q_1 = (Z\mathfrak{A})Q_2$, then $Q_1 = Q_2$.*

Proof. Put

$$\mathfrak{S}[[(\langle\mathfrak{A}\rangle s)a;\ a \in ((Z\mathfrak{A})Q_\nu)^{\sigma s}];\ s \in S] = Q_\nu^* \text{ for } \nu = 1, 2.$$

Then $Q_1^* = Q_2^*$. Now, for $\nu = 1, 2$,

$$\mathfrak{S}[Q_\nu, Q_\nu^*] = (Z\mathfrak{A})Q_\nu$$

(by Theorem 1. 4.) and $\mathfrak{P}[Q_\nu, Q_\nu^*]$ is void (by (2. 1)); hence

$$Q_\nu = (Z\mathfrak{A})Q_\nu - Q_\nu^* \text{ for } \nu = 1, 2,$$

and $Q_1 = Q_2$.

It follows that any freely generated algebra has exactly one free basis.

Henceforth, the signs $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_1$, and $\mathfrak{C}_2$ will denote freely generated algebras. The definition set of $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ will be denoted by C, C_1, C_2, respectively. The free basis of $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ will be denoted by D, D_1, D_2, respectively.

Theorem 2. 3.

$$|C| = |D| + \Sigma\{|C|^{\sigma s};\ s \in S\}.$$

Proof. See Theorem 1. 4 and Definition 2. 1.

Theorem 2. 4. *If σs is void for $s \in S$, then $|C| = |D| + |S|$.*

Theorem 2. 5. *If σs is non-void for at least one element s of S, then C is infinite if it is not void.*

Theorem 2. 6. *C is non-void and finite if and only if σs is void for $s \in S$, and both D and S are finite, but not both of them are void.*

Theorem 2. 7. *$|C| = 1$ if and only if either $|D| = 0$, $|S| = 1$, and $|\sigma s| = 0$ for $s \in S$, or $|D| = 1$ and $|S| = 0$.*

Theorem 2. 8. *$|C| \geqq 2$ if and only if at least one of the following conditions* (2. 3), (2. 4), *and* (2. 5) *is satisfied:*

(2. 3) *$|S| \geqq 2$, and $|\sigma s| = 0$ for some element s of S.*

(2. 4) *$|D| \geqq 1$ and $|S| \geqq 1$.*

(2. 5) *$|D| \geqq 2$.*

Theorem 2. 9. *If C is not void, and σs is infinite for at least one element s of S, then* $|C| \geqq 2^{|\omega|}$ [10].

Theorem 2. 10. *Let D_0 be a subset of D, let s be an element of S, and let c be an element of $C^{\sigma s}$. In this case, $(\langle\mathfrak{C}\rangle s)c \in (Z\mathfrak{C})D_0$ if and only if $ck \in (Z\mathfrak{C})D_0$ for $k \in \sigma s$.*

Proof. Suppose that $(\langle\mathfrak{C}\rangle s)c \in (Z\mathfrak{C})D_0$. Then, by Theorem 1. 4,

$$(\langle\mathfrak{C}\rangle s)c \in \mathfrak{S}[D_0, \mathfrak{S}[[(\langle\mathfrak{C}\rangle s')c';\ c' \in ((Z\mathfrak{C})D_0)^{\sigma s'}];\ s' \in S]],$$

(2. 1) involves the existence of an element s' of S and an element c' of $((Z\mathfrak{C})D_0)^{\sigma s'}$ such that $(\langle\mathfrak{C}\rangle s)c = (\langle\mathfrak{C}\rangle s')c'$, and from (2. 2) it follows that $s = s'$ and $c = c'$. Hence $c \in ((Z\mathfrak{C})D_0)^{\sigma s}$. The converse implication is trivial.

Theorem 2. 11. *If $\mathfrak{c}$ is an element of C, s is an element of S, and c is an element of $C^{\sigma s}$, then $\mathfrak{c}(\mathsf{P}_0\mathfrak{C})((\langle\mathfrak{C}\rangle s)c)$ if and only if $\mathfrak{c} = ck$ for some element k of σs.*

Proof. By Definition 1. 6, $\mathfrak{c}(\mathsf{P}_0\mathfrak{C})((\langle\mathfrak{C}\rangle s)c)$ means that there exist an element s' of S, an element c' of $C^{\sigma s'}$, and an element k of $\sigma s'$ such that $\mathfrak{c} = c'k$ and $(\langle\mathfrak{C}\rangle s)c = (\langle\mathfrak{C}\rangle s')c'$. Now notice (2. 2).

Theorem 2. 12. *If n is a positive integer, $\mathfrak{c}_\nu$ $(\nu \in \mathfrak{b}n)$ are elements of C, and $\mathfrak{c}_{\nu-1}(\mathsf{P}_0\mathfrak{C})\mathfrak{c}_\nu$ for $\nu \in \mathfrak{b}\{1, n\}$, then $\mathfrak{c}_0 \neq \mathfrak{c}_n$.*

Proof. Let C_0 be the set of all elements $\mathfrak{c}_0$ of C such that Theorem 2. 12 holds for arbitrary elements $\mathfrak{c}_\nu$ $(\nu \in \mathfrak{b}\{1, n\})$ of C. Then let s_0 be an element of S, and c_0 be an element of $C_0^{\sigma s_0}$. Put $(\langle\mathfrak{C}\rangle s_0)c_0 = \mathfrak{c}_0'$, and let $\mathfrak{c}_\nu'$ $(\nu \in \mathfrak{b}\{1, n\})$ be elements of C such that $\mathfrak{c}_{\nu-1}'(\mathsf{P}_0\mathfrak{C})\mathfrak{c}_\nu'$ for $\nu \in \mathfrak{b}\{1, n\}$. By Definition 1. 6, there exist an element s of S, an element c of $C^{\sigma s}$, and an element k of σs such that $ck = \mathfrak{c}_{n-1}'$, $(\langle\mathfrak{C}\rangle s)c = \mathfrak{c}_n'$. If $s \neq s_0$, then $(\langle\mathfrak{C}\rangle s_0)c_0 \neq (\langle\mathfrak{C}\rangle s)c$ by (2. 2). Suppose that $s = s_0$. Then $(c_0k)(\mathsf{P}_0\mathfrak{C})\mathfrak{c}_0'$, $c_0k \neq \mathfrak{c}_{n-1}'$ (because c_0k is an element of C_0), $c_0k \neq ck$, and $(\langle\mathfrak{C}\rangle s_0)c_0 \neq (\langle\mathfrak{C}\rangle s)c$ by (2. 2). Hence $(\langle\mathfrak{C}\rangle s_0)c_0 \neq \mathfrak{c}_n'$ in both cases. This proves that C_0 is $\mathfrak{C}$-closed; (2. 1) involves that $C_0 > D$. Hence $C_0 = C$.

When we prove a theorem on the elements of C by showing that it holds for all elements of D, and that the set of all elements of C for which it holds is $\mathfrak{C}$-closed, we shall sometimes say that we prove it by $\mathfrak{C}$-induction.

Theorem 2. 13. *$\mathsf{P}\mathfrak{C}$ is a partial ordering of C.*

Theorem 2. 14. *If $\mathfrak{c}$ is an element of C, s is an element of S, and c is an element of $C^{\sigma s}$, then $\mathfrak{c}(\mathsf{P}\mathfrak{C})((\langle\mathfrak{C}\rangle s)c)$ and $\mathfrak{c} \neq (\langle\mathfrak{C}\rangle s)c$ if and only if $\mathfrak{c}(\mathsf{P}\mathfrak{C})(ck)$ for some element k of σs.*

Theorem 2. 15. *The subset Q of C which is defined by the property that, for an element $\mathfrak{c}$ of C, $\mathfrak{c} \in Q$ if and only if $\mathfrak{d}(\mathsf{P}_0\mathfrak{C})\mathfrak{c}$ for some element $\mathfrak{d}$ of D, is a free basis of $(\mathfrak{Z}\mathfrak{C})(\mathfrak{S}[[(\langle\mathfrak{C}\rangle s)c;\ c \in C^{\sigma s}];\ s \in S])$.*

Proof. Let s be an element of S, and let c be an element of $(\mathfrak{S}[D, (Z\mathfrak{C})Q])^{\sigma s}$. If $ck \in D$ for some element k of σs, then $(\langle\mathfrak{C}\rangle s)c \in Q$, hence $(\langle\mathfrak{C}\rangle s)c \in (Z\mathfrak{C})Q$; the same relation follows from $ck \in (Z\mathfrak{C})Q$ for $k \in \sigma s$. Hence $\mathfrak{S}[D, (Z\mathfrak{C})Q]$ is $\mathfrak{C}$-closed,

$$\mathfrak{S}[D, (Z\mathfrak{C})Q] = C, \text{ and } (Z\mathfrak{C})Q = \mathfrak{S}[[(\langle\mathfrak{C}\rangle s)c;\ c \in C^{\sigma s}];\ s \in S].$$

If s is an element of S, and c is an element of $((Z\mathfrak{C})Q)^{\sigma s}$, then $ck \in D$ for $k \in \sigma s$, and $(\langle\mathfrak{C}\rangle s)c \in Q$ by Theorem 2. 11. Now it is obvious that Q is free in $\mathfrak{C}$.

Theorem 2. 16. *If a is an element of $[\mathfrak{A}]^D$, then $(\varphi\{\mathfrak{C}, \mathfrak{A}\})a$ exists.*

Proof. We shall call a subset Q of C such that $\mathfrak{c} \in Q$, $\mathfrak{c}' \in C$, and $\mathfrak{c}'(\mathsf{P}\mathfrak{C})\mathfrak{c}$ imply $\mathfrak{c}' \in Q$, a "lower set of $\mathfrak{C}$". If $\mathfrak{c}$ is an element of C, the set of all elements $\mathfrak{c}'$ of C which satisfy $\mathfrak{c}'(\mathsf{P}\mathfrak{C})\mathfrak{c}$ will be denoted by $(\wedge\mathfrak{C})\mathfrak{c}$; $(\wedge\mathfrak{C})\mathfrak{c}$ is a lower set of $\mathfrak{C}$. If Q is a lower set of $\mathfrak{C}$, and h is an element of $[\mathfrak{A}]^Q$, h will be called a "homormorphic extension of a on Q" if $h\mathfrak{c} = a\mathfrak{c}$ for $\mathfrak{c} \in \mathfrak{P}[Q, D]$, and $h((\langle\mathfrak{C}\rangle s)c) = (\langle\mathfrak{A}\rangle s)(h \cdot c)$ for $s \in S$, $c \in Q^{\sigma s}$, $(\langle\mathfrak{C}\rangle s)c \in Q$.

[10]) ω is the least infinite ordinal; if α is any ordinal, $|\alpha|$ is the cardinal number of an ordered set of type α

If Q is a lower set of $\mathfrak{C}$, there exists at the most one homomorphic extension of a on Q. This is easily shown by $\mathfrak{C}$-induction. It follows that if, for $\nu = 1, 2$, Q_ν is a lower set of $\mathfrak{C}$, and h_ν is a homomorphic extension of a on Q_ν, then $h_1\mathfrak{c} = h_2\mathfrak{c}$ for $\mathfrak{c} \in \mathfrak{P}[Q_1, Q_2]$. This involves that if M is a set of lower sets of $\mathfrak{C}$, and a homomorphic extension of a on Q exists for $Q \in M$, then a homomorphic extension of a on $\mathfrak{S}M$ exists.

Now we shall show that, for $\mathfrak{c} \in C$, a homomorphic extension of a on $(\Lambda\mathfrak{C})\mathfrak{c}$ exists. Let C_0 be the set of all elements $\mathfrak{c}$ of C for which a homomorphic extension of a on $(\Lambda\mathfrak{C})\mathfrak{c}$ exists. Obviously, $C_0 > D$. Let s be an element of S, and let c be an element of $C_0^{\sigma s}$. Since $ck \in C_0$ for $k \in \sigma s$, a homomorphic extension h_0 of a on $\mathfrak{S}[(\Lambda\mathfrak{C})(ck);\ k \in \sigma s]$ exists. Since

$$(\Lambda\mathfrak{C})((\langle\mathfrak{C}\rangle s)c) = \mathfrak{S}[[(\langle\mathfrak{C}\rangle s)c],\ \mathfrak{S}[(\Lambda\mathfrak{C})(ck);\ k \in \sigma s]]$$

by Theorem 2. 14, we get a homomorphic extension h of a on $(\Lambda\mathfrak{C})((\langle\mathfrak{C}\rangle s)c)$ by putting

$$h\mathfrak{c} = h_0\mathfrak{c} \text{ for } \mathfrak{c} \in \mathfrak{S}[(\Lambda\mathfrak{C})(ck);\ k \in \sigma s]$$

and

$$h((\langle\mathfrak{C}\rangle s)c) = (\langle\mathfrak{A}\rangle s)(h_0 \cdot c).$$

This proves that C_0 is $\mathfrak{C}$-closed; hence $C_0 = C$.

Since $C = \mathfrak{S}[(\Lambda\mathfrak{C})\mathfrak{c};\ \mathfrak{c} \in C]$, a homomorphic extension of a on C exists. This proves the theorem.

Theorem 2. 17. *If d is a one-to-one representation of D_1 on D_2, then $(\varphi\{\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2\})d$ exists and is an isomorphism of $\mathfrak{C}_1$ on $\mathfrak{C}_2$.*

Proof. See Theorems 1. 13 and 2. 16.

Theorem 2. 18. *If a is an element of $[\mathfrak{A}]^D$, then $(\varphi\{\mathfrak{C}, \mathfrak{A}\})a$ is simple*[11]) *if and only if a is simple and $[a\mathfrak{d};\ \mathfrak{d} \in D]$ is free in $\mathfrak{A}$.*

Proof. If $(\varphi\{\mathfrak{C}, \mathfrak{A}\})a$ is simple, it is an isomorphism of $\mathfrak{C}$ on $(\mathfrak{Z}\mathfrak{A})[a\mathfrak{d};\ \mathfrak{d} \in D]$ by Theorem 1. 9; hence $[a\mathfrak{d};\ \mathfrak{d} \in D]$ is free in $(\mathfrak{Z}\mathfrak{A})[a\mathfrak{d};\ \mathfrak{d} \in D]$. If a is simple, and $[a\mathfrak{d};\ \mathfrak{d} \in D]$ is free in $(\mathfrak{Z}\mathfrak{A})[a\mathfrak{d};\ \mathfrak{d} \in D]$, then $(\varphi\{\mathfrak{C}, (\mathfrak{Z}\mathfrak{A})[a\mathfrak{d};\ \mathfrak{d} \in D]\})a$ is an isomorphism of $\mathfrak{C}$ on $(\mathfrak{Z}\mathfrak{A})[a\mathfrak{d};\ \mathfrak{d} \in D]$ by Theorem 2. 17, and by Theorem 1. 12,

$$(\varphi\{\mathfrak{C}, (\mathfrak{Z}\mathfrak{A})[a\mathfrak{d};\ \mathfrak{d} \in D]\})a = (\varphi\{\mathfrak{C}, \mathfrak{A}\})a.$$

§ 3. Indispensable elements of the free basis.

Definition 3. 1. *If $\mathfrak{c}$ is an element of C, and $\mathfrak{d}$ is an element of D, we say that $\mathfrak{d}$ is dispensable for $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{C}$ if $\mathfrak{c}$ is contained in the $\mathfrak{C}$-closure of $D - [\mathfrak{d}]$. Otherwise we say that $\mathfrak{d}$ is indispensable for $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{C}$.*

Definition 3. 2. *We define a representation $P\mathfrak{C}$ of C into the set of all subsets of D by requiring that, for $\mathfrak{c} \in C$, $(P\mathfrak{C})\mathfrak{c}$ be the set of all elements of D indispensable for $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{C}$.*

Definition 3. 3. *We define an element $\pi\mathfrak{C}$ of $(\mathfrak{b} \mid D \mid)^C$ by putting*

$$(\pi\mathfrak{C})\mathfrak{c} = \mid (P\mathfrak{C})\mathfrak{c} \mid \text{ for } \mathfrak{c} \in C.$$

Theorem 3. 1. *If $\mathfrak{d}$ is an element of D, then*

$$(P\mathfrak{C})\mathfrak{d} = [\mathfrak{d}]$$

and

$$(\pi\mathfrak{C})\mathfrak{d} = 1.$$

Proof. If $\mathfrak{d}$ and $\mathfrak{d}'$ are elements of D, then $\mathfrak{d}' \in (P\mathfrak{C})\mathfrak{d}$ if and only if $\mathfrak{d} \in (Z\mathfrak{C})(D - [\mathfrak{d}'])$; $C - [\mathfrak{d}']$ is $\mathfrak{C}$-closed because of (2. 1) so that

$$C - [\mathfrak{d}'] > (Z\mathfrak{C})(D - [\mathfrak{d}']);$$

hence $\mathfrak{d}' \in (P\mathfrak{C})\mathfrak{d}$ if and only if $\mathfrak{d}' = \mathfrak{d}$.

---

[11]) This means that $\mathfrak{c}_1 \in C$, $\mathfrak{c}_2 \in C$, and $\mathfrak{c}_1 \neq \mathfrak{c}_2$ imply that $((\varphi\{\mathfrak{C}, \mathfrak{A}\})a)\mathfrak{c}_1 \neq ((\varphi\{\mathfrak{C}, \mathfrak{A}\})a)\mathfrak{c}_2$.

Theorem 3. 2. *If s is an element of S, and c is an element of $C^{\sigma s}$, then*

$$(P\mathfrak{C})((\langle\mathfrak{C}\rangle s)c) = \mathfrak{S}((P\mathfrak{C})\cdot c)$$

and

$$(\pi\mathfrak{C})((\langle\mathfrak{C}\rangle s)c) \leqq \Sigma((\pi\mathfrak{C})\cdot c).$$

Proof. For $\mathfrak{d} \in D$, $(\langle\mathfrak{C}\rangle s)c \in (Z\mathfrak{C})(D - [\mathfrak{d}])$ if and only if $ck \in (Z\mathfrak{C})(D - [\mathfrak{d}])$ for $k \in \sigma s$, by Theorem 2. 10. This proves that

$$D - (P\mathfrak{C})((\langle\mathfrak{C}\rangle s)c) = \mathfrak{P}[D - (P\mathfrak{C})(ck);\ k \in \sigma s]$$

if σs is not void.

Theorem 3. 3. *If an algebra $\mathfrak{A}$ over $[(P\mathfrak{C})\mathfrak{c};\ \mathfrak{c} \in C]$ is defined by*

$$(\langle\mathfrak{A}\rangle s)a = \mathfrak{S}a \text{ for } s \in S,\ a \in [(P\mathfrak{C})\mathfrak{c};\ \mathfrak{c} \in C]^{\sigma s}$$

(see Theorem 3. 2) *then $P\mathfrak{C}$ is a homomorphism of $\mathfrak{C}$* on $\mathfrak{A}$.

Theorem 3. 4. *If $\mathfrak{d}$ is an element of D, and $\mathfrak{c}$ is an element of C, then*

$$\mathfrak{d} \in (P\mathfrak{C})\mathfrak{c} \tag{3. 1}$$

if and only if

$$\mathfrak{d}(P\mathfrak{C})\mathfrak{c}. \tag{3. 2}$$

Proof. Suppose that $\mathfrak{d}$ is given, and let C_0 be the set of those elements $\mathfrak{c}$ of C for which (3. 1) and (3. 2) are equivalent. Then obviously $C_0 > D$ (notice Theorem 3. 1) and Theorems 2. 14 and 3. 2 show that C_0 is $\mathfrak{C}$-closed.

Theorem 3. 5. *For $D_0 < D$ and $\mathfrak{c} \in C$, the relations*

$$\mathfrak{c} \in (Z\mathfrak{C})D_0 \tag{3. 3}$$

and

$$(P\mathfrak{C})\mathfrak{c} < D_0 \tag{3. 4}$$

are equivalent.

Proof. (3. 3) and $\mathfrak{d} \in D - D_0$ imply $D_0 < D - [\mathfrak{d}]$, $\mathfrak{c} \in (Z\mathfrak{C})(D - [\mathfrak{d}])$, and $\mathfrak{d} \in D - (P\mathfrak{C})\mathfrak{c}$; hence (3. 3) implies (3. 4).

Let C_0 be the set of those elements $\mathfrak{c}$ of C for which (3. 4) implies (3. 3). Then Theorem 3. 1 involves that $C_0 > D$. Let s be an element of S, let c be an element of $C_0^{\sigma s}$, and suppose that

$$(P\mathfrak{C})((\langle\mathfrak{C}\rangle s)c) < D_0.$$

Then $(P\mathfrak{C})(ck) < D_0$ for $k \in \sigma s$ (by Theorem 3. 2), $ck \in (Z\mathfrak{C})D_0$ for $k \in \sigma s$ (by the definition of C_0) and $(\langle\mathfrak{C}\rangle s)c \in (Z\mathfrak{C})D_0$. Hence C_0 is $\mathfrak{C}$-closed.

Theorem 3. 6. *If $\mathfrak{c}$ is an element of C, then*

$$\mathfrak{c} \in (Z\mathfrak{C})((P\mathfrak{C})\mathfrak{c}).$$

Theorem 3. 7. *If $D_0 < D$, and $\mathfrak{c} \in (Z\mathfrak{C})D_0$, then* (see Theorem 2. 1)

$$(P((\mathfrak{Z}\mathfrak{C})D_0))\mathfrak{c} = (P\mathfrak{C})\mathfrak{c}$$

and

$$(\pi((\mathfrak{Z}\mathfrak{C})D_0))\mathfrak{c} = (\pi\mathfrak{C})\mathfrak{c}.$$

Proof. If $D_1 < D_0$, it follows from Theorems 1. 5 and 3. 5 that $(P\mathfrak{C})\mathfrak{c} < D_1$ is equivalent to $(P((\mathfrak{Z}\mathfrak{C})D_0))\mathfrak{c} < D_1$.

Theorem 3. 8. *If* $\mathfrak{c}$ *is an element of* C, h_1 *and* h_2 *are homomorphisms of* $\mathfrak{C}$ *into* $\mathfrak{A}$, *and*

$$h_1\mathfrak{d} = h_2\mathfrak{d} \text{ for } \mathfrak{d} \in (P\mathfrak{C})\mathfrak{c},$$

then

$$h_1\mathfrak{c} = h_2\mathfrak{c}.$$

Proof. See Theorems 1. 10. and 3. 6.

Theorem 3. 9. *Let* h_1 *and* h_2 *be homomorphisms of* $\mathfrak{C}_1$ *into* $\mathfrak{C}_2$ *and let* $\mathfrak{c}$ *be an element of* C_1. *In this case,*

$$h_1\mathfrak{c} = h_2\mathfrak{c} \tag{3. 5}$$

if and only if

$$h_1\mathfrak{d} = h_2\mathfrak{d} \text{ for } \mathfrak{d} \in (P\mathfrak{C}_1)\mathfrak{c}. \tag{3. 6}$$

Proof. Let C_0 be the set of those elements $\mathfrak{c}$ of C_1 for which (3. 5) implies (3. 6). It is obvious that $C_0 > D_1$. Let s be an element of S, let c be an element of $C_0^{\sigma s}$, and suppose that

$$h_1((\langle\mathfrak{C}_1\rangle s)c) = h_2((\langle\mathfrak{C}_1\rangle s)c).$$

Then

$$(\langle\mathfrak{C}_2\rangle s)(h_1 \cdot c) = (\langle\mathfrak{C}_2\rangle s)(h_2 \cdot c),$$
$$h_1 \cdot c = h_2 \cdot c \text{ (by (2. 2))}$$
$$h_1(ck) = h_2(ck) \text{ for } k \in \sigma s,$$
$$h_1\mathfrak{d} = h_2\mathfrak{d} \text{ for } \mathfrak{d} \in (P\mathfrak{C}_1)(ck),\ k \in \sigma s$$

(by the definition of C_0) and (by Theorem 3. 2)

$$h_1\mathfrak{d} = h_2\mathfrak{d} \text{ for } \mathfrak{d} \in (P\mathfrak{C}_1)((\langle\mathfrak{C}_1\rangle s)c).$$

This proves that C_0 is $\mathfrak{C}_1$-closed.

Theorem 3. 10. *Let* h *be a homomorphism of* $\mathfrak{C}$ *into* $\mathfrak{C}$, *and let* $\mathfrak{c}$ *be an element of* C. *In this case,*

$$h\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$$

if and only if

$$h\mathfrak{d} = \mathfrak{d} \text{ for } \mathfrak{d} \in (P\mathfrak{C})\mathfrak{c}.$$

Theorem 3. 11. *If* h *is a homomorphism of* $\mathfrak{C}_1$ *into* $\mathfrak{C}_2$, *and* $\mathfrak{c}$ *is an element of* C_1, *then*

$$(P\mathfrak{C}_2)(h\mathfrak{c}) = \mathfrak{S}[(P\mathfrak{C}_2)(h\mathfrak{d});\ \mathfrak{d} \in (P\mathfrak{C}_1)\mathfrak{c}] \tag{3. 7}$$

and

$$(\pi\mathfrak{C}_2)(h\mathfrak{c}) \leqq \Sigma\{(\pi\mathfrak{C}_2)(h\mathfrak{d});\ \mathfrak{d} \in (P\mathfrak{C}_1)\mathfrak{c}\}.$$

Proof. Let C_0 be the set of those elements $\mathfrak{c}$ of C_1 for which (3. 7) holds. Obviously $C_0 > D_1$. If s is an element of S, and c is an element of $C_0^{\sigma s}$, then, by Theorem 3. 2 and by the definition of C_0,

$$\begin{aligned}(P\mathfrak{C}_2)(h((\langle\mathfrak{C}_1\rangle s)c)) = (P\mathfrak{C}_2)((\langle\mathfrak{C}_2\rangle s)(h \cdot c)) &= \mathfrak{S}[(P\mathfrak{C}_2)(h(ck));\ k \in \sigma s] \\ &= \mathfrak{S}[\mathfrak{S}[(P\mathfrak{C}_2)(h\mathfrak{d});\ \mathfrak{d} \in (P\mathfrak{C}_1)(ck)];\ k \in \sigma s] \\ &= \mathfrak{S}[(P\mathfrak{C}_2)(h\mathfrak{d});\ \mathfrak{d} \in \mathfrak{S}[(P\mathfrak{C}_1)(ck);\ k \in \sigma s]] \\ &= \mathfrak{S}[(P\mathfrak{C}_2)(h\mathfrak{d});\ \mathfrak{d} \in (P\mathfrak{C}_1)((\langle\mathfrak{C}_1\rangle s)c)].\end{aligned}$$

This proves that C_0 is $\mathfrak{C}_1$-closed.

Theorem 3. 12. *In order that* C *contain at least one element* $\mathfrak{c}$ *such that* $(\pi\mathfrak{C})\mathfrak{c} = 0$, *it is necessary and sufficient that* S *contain at least one element* s *such that* $|\sigma s| = 0$.

Proof. By Theorem 3. 5, $(\pi\mathfrak{C})\mathfrak{c} = 0$ if and only if $\mathfrak{c}$ is contained in the $\mathfrak{C}$-closure of the void set. Now notice Theorem 1. 3.

Theorem 3. 13. *Let* s *be an element of* S, *and let* D_0 *be a non-void subset of* D *such that* $|D_0| \leqq |\sigma s|$. *Then there exists at least one element* $\mathfrak{c}$ *of* C *such that* $(P\mathfrak{C})\mathfrak{c} = D_0$.

Proof. Let c be a representation of σs on D_0, and put $(\langle\mathfrak{C}\rangle s)c = \mathfrak{c}$. Then we have, by Theorems 3. 1 and 3. 2,

$$(P\mathfrak{C})\,\mathfrak{c} = (P\mathfrak{C})\,((\langle\mathfrak{C}\rangle s)c) = \mathfrak{S}\,[(P\mathfrak{C})(ck);\ k \in \sigma s] = \mathfrak{S}[[ck];\ k \in \sigma s] = [ck;\ k \in \sigma s] = D_0.$$

Theorem 3. 14. *Suppose that* $|\sigma s| \geqq 2$ *for at least one element* s *of* S, *and let* D_0 *be a non-void finite subset of* D. *Then there exists at least one element* $\mathfrak{c}$ *of* C *such that* $(P\mathfrak{C})\,\mathfrak{c} = D_0$.

Proof. The theorem is evident if $|D_0| = 1$. Let n be a positive integer, and suppose that the theorem holds for $|D_0| = n$. We want to show that it holds for $|D_0| = n + 1$. Suppose that $|D_0| = n + 1$. Let $\mathfrak{d}_0$ be an element of D_0, and let $\mathfrak{c}_0$ be an element of C such that $(P\mathfrak{C})\,\mathfrak{c}_0 = D_0 - [\mathfrak{d}_0]$. Let s be an element of S such that $|\sigma s| \geqq 2$, and let k_0 be an element of σs. Define an element c of $C^{\sigma s}$ by putting $ck_0 = \mathfrak{c}_0$ and $ck = \mathfrak{d}_0$ for $k \in \sigma s - [k_0]$. Then

$$(P\mathfrak{C})((\langle\mathfrak{C}\rangle s)c) = \mathfrak{S}\,[(P\mathfrak{C})\,\mathfrak{c}_0, (P\mathfrak{C})\,\mathfrak{d}_0] = D_0.$$

Definition 3. 4. *We define a cardinal* m_σ *by requiring that*

$$m_\sigma = 1 \text{ if } |\sigma s| \leqq 1 \text{ for } s \in S,$$
$$m_\sigma = |\omega| \text{ if } 1 < \sup\,[|\sigma s|;\ s \in S] < |\omega|\,^{12)},$$
$$m_\sigma = \sup\,[|\sigma s|;\ s \in S] \text{ if } \sup\,[|\sigma s|;\ s \in S] \geqq |\omega|.$$

Theorem 3. 15. $(\pi\mathfrak{C})\,\mathfrak{c} \leqq m_\sigma$ *for* $\mathfrak{c} \in C$.

Theorem 3. 16. *If* $1 < \sup\,[|\sigma s|;\ s \in S] < |\omega|$, *or* $\max\,[|\sigma s|;\ s \in S]$ *does not exist and* $\sup\,[|\sigma s|;\ s \in S]$ *is inaccessible*[13]), *then* $(\pi\mathfrak{C})\,\mathfrak{c} < m_\sigma$ *for* $\mathfrak{c} \in C$.

Theorems 3. 15 and 3. 16 are easily shown by $\mathfrak{C}$-induction with the help of Theorems 3. 1 and 3. 2.

Theorem 3. 17. *Suppose that* $|\sigma s| \leqq 1$ *for* $s \in S$; *or that* $\max\,[|\sigma s|;\ s \in S]$ *exists and is infinite*; *or that* $|S| \neq 0$, $\max\,[|\sigma s|;\ s \in S]$ *does not exist, and* $\sup\,[|\sigma s|;\ s \in S]$ *is accessible. Moreover, let* D_0 *be a non-void subset of* D. *Then an element* $\mathfrak{c}$ *of* C *such that* $(P\mathfrak{C})\,\mathfrak{c} = D_0$ *exists if and only if* $|D_0| \leqq m_\sigma$.

Proof. Suppose that $|S| \neq 0$, $\max\,[|\sigma s|;\ s \in S]$ does not exist, $\sup\,[|\sigma s|;\ s \in S]$ is accessible, and $|D_0| = m_\sigma$. We want to prove that there exists an element $\mathfrak{c}$ of C such that $(P\mathfrak{C})\,\mathfrak{c} = D_0$. Let M be a set of non-void subsets of D_0 such that $|d| < m_\sigma$ for $d \in M$, $|M| < m_\sigma$, and $\mathfrak{S}M = D_0$. By Theorem 3. 13, there exists an element b of C^M such that $(P\mathfrak{C})\,(bd) = d$ for $d \in M$. Let s be an element of S such that $|\sigma s| \geqq |M|$, and let c be a representation of σs on $[bd;\ d \in M]$. Then

$$(P\mathfrak{C})((\langle\mathfrak{C}\rangle s)c) = \mathfrak{S}\,((P\mathfrak{C}) \cdot c) = \mathfrak{S}\,((P\mathfrak{C}) \cdot b) = \mathfrak{S}M = D_0.$$

Theorem 3. 18. *Suppose that* $1 < \sup\,[|\sigma s|;\ s \in S] < |\omega|$, *or that* $\max\,[|\sigma s|;\ s \in S]$ *does not exist and* $\sup\,[|\sigma s|;\ s \in S]$ *is inaccessible. Moreover, let* D_0 *be a non-void subset of* D. *Then an element* $\mathfrak{c}$ *of* C *such that* $(P\mathfrak{C})\,\mathfrak{c} = D_0$ *exists if and only if* $|D_0| < m_\sigma$.

Theorem 3. 19. $\sup\,(\pi\mathfrak{C}) = \min\,[|D|,\ m_\sigma]$.

References.

(I) *Garrett Birkhoff*, On the Structure of Abstract Algebras. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **31**, 433—454 (1935).

(II) *Garrett Birkhoff*, Rings of Sets. Duke Mathematical Journal **3**, 443—454 (1937).

(III) *F. Hausdorff*, Mengenlehre. 3rd edition. New York Dover Publications 1944.

[12]) If A is a set of cardinals, by $\sup A$ is meant the least cardinal m such that $m \geqq p$ for $p \in A$. If T is a set, and G is a T-system of cardinals, by $\sup G$ is meant $\sup\,[Gt;\ t \in T]$.

[13]) If n is a cardinal, the least ordinal α such that $|\alpha| = n$ is denoted by Ωn. (See (III), 4th chapter, § 15, p. 71.) n is called inaccessible if it is $\neq 0$, has no predecessor, and Ωn is regular. (See (III), 4th chapter, § 15, p. 73.) In any other case, n is called accessible.

Eingegangen 15. Dezember 1950.

Über geschlossene Bewertungssysteme.

Von *Wolfgang Krull* in Bonn.

Ist $\mathfrak{L}$ ein endlicher algebraischer Oberkörper einer einfach transzendenten Erweiterung $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_0(x)$ eines beliebigen Grundkörpers $\mathfrak{K}_0$ (also ein endlicher Körper von algebraischen Funktionen einer Veränderlichen über $\mathfrak{K}_0$), so sind alle Bewertungen von $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{K}_0$[1]) im Sinne Ostrowskis nichtarchimedisch und diskret, und man kann nach dem Vorbild der algebraischen Zahlentheorie als Ausgangspunkt für die Untersuchung von $\mathfrak{L}$ die Bemerkung wählen, daß das System S^* aller Bewertungen von $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{K}_0$ vier einfachen Forderungen genügt, die sich, wenn wir die Bewertungen als Exponentenbewertungen schreiben, kurz so formulieren lassen[2]):

1. Endlichkeitsbedingung. *Zu jedem $a \in \mathfrak{L}$ gibt es nur endlich viele Bewertungen $B_\tau \in S^*$ derart, daß der Wert $w_\tau(a)$ von a in B_τ von 0 verschieden ausfällt.*

2. Unabhängigkeitsbedingung im Kleinen. *Sind B_{τ_i} $(i = 1, \ldots, m)$ endlich viele Bewertungen aus S^*, und gibt man die $a_i \in \mathfrak{L}$ sowie die ganzen positiven Zahlen n_i willkürlich vor, so existiert stets ein $a \in \mathfrak{L}$ derart, daß $w_{\tau_i}(a - a_i) = n_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ ist.*

3. Unabhängigkeitsbedingung im Großen. *Es gibt ein System S_1^*, das aus S^* durch Weglassung von endlich vielen Bewertungen entsteht derart, daß nach Vorgabe der Bewertungen B_{τ_i} aus S_1^* und der a_i, n_i im Sinne von Bedingung* **2** *das Element $a \in \mathfrak{L}$ so gewählt werden kann, daß nicht nur $w_{\tau_i}(a - a_i) = n_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, sondern auch $w_\tau(a) \geqq 0$ ist für jede Bewertung $B_\tau \in S_1^*$.*

4. Geschlossenheitsbedingung. *Jede Bewertung B_τ besitzt einen natürlichen Grad f_τ, und es gilt $\sum\limits_{B_\tau \in S^*} f_\tau w_\tau(a) = 0$ für alle $a \in \mathfrak{L}$.*

Untersucht man die Möglichkeit eines analogen Aufbaues für die arithmetische Theorie eines endlichen algebraischen Funktionenkörpers in mehr als einer Veränderlichen, so sieht man sofort, daß es nicht mehr möglich ist, mit dem System S^* *aller* dis-

---

[1]) Eine Bewertung von $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{K}_0$ ist eine Bewertung, in deren Bewertungsring alle Elemente aus $\mathfrak{K}_0$ Einheiten sind.

[2]) Zu den im Text benützten Bewertungsaxiomen vgl. § 1 sowie Fußnote [5]). Für die algebraischen Funktionenkörper einer Variablen mit (im Sinne der Elementezahl) endlichem Konstantenkörper ist der arithmetische Aufbau der Theorie im Sinne des Textes in vorbildlicher Weise durchgeführt in *H. Hasse, Zahlentheorie* (Akademieverlag Berlin, 1949, in Zukunft kurz mit *Hasse* zitiert). Um für den Kenner des Hasseschen Buches den Zusammenhang mit den Untersuchungen dieser Note herzustellen, sei kurz bemerkt: Die durchweg gemachte Voraussetzung, daß alle auftretenden Bewertungen nichtarchimedisch und diskret sind, sowie die Endlichkeitsbedingung, die Unabhängigkeitsbedingung im Kleinen und die Geschlossenheitsbedingung entsprechen genau den Bedingungen I, II, IV, V von *Hasse* § 20, S. 243/44. Die Hassesche Bedingung III, die die Endlichkeit der Restklassenkörper aller Bewertungen fordert, hat im Rahmen unserer Untersuchungen, soweit sie sich auf beliebige Körper beziehen, kein Gegenstück; vgl. aber hinsichtlich der algebraischen Funktionenkörper von endlichem Transzendenzgrad die Schlußbemerkung der vorliegenden Note. Die *Unabhängigkeitsbedingung im Großen* entspricht dem *verschärften Annäherungssatz* Hasses (vgl. S. 280 bzw. 298). Daß diese Bedingung im Verlauf der Untersuchung im Gegensatz zu Hasse stark im Vordergrund steht, hat seinen Grund darin, daß bei ihr der Unterschied zwischen den algebraischen Funktionenkörpern mehrerer und denen einer einzigen Variablen besonders klar hervortritt.

kreten Bewertungen von $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{K}_0$ zu arbeiten, weil S^* nicht mehr der Endlichkeitsbedingung genügt. Auch von einem „natürlichen" Grad der Bewertungen von $\mathfrak{L}$ kann nicht die Rede sein. Man wird also mit einem „passend gewählten" Bewertungssystem S^+ und „passend definierten" Bewertungsgraden arbeiten müssen, und die gewonnenen Resultate werden zunächst nicht körperinvariant sein. Doch bedeutet das keinen ernsthaften Einwand gegen den geplanten Aufbau. Denn auch dann, wenn man die Theorie von $\mathfrak{L}$ vom Standpunkt der algebraischen Geometrie aus in Angriff nimmt, wird man zuerst mit speziellen Koordinaten arbeiten und erst nachträglich nach birational invarianten Ergebnissen suchen.

Nachdem diese grundsätzliche Frage geklärt ist, richtet sich das Augenmerk naturgemäß auf zwei Hauptpunkte:

A. *Wie sind die Bedingungen* **1** *bis* **4** *zu modifizieren, wenn man Bewertungssysteme von endlichen algebraischen Funktionenkörpern mehrerer Veränderlicher (eventuell sogar von beliebigen Körpern) betrachten will?* Hier ergibt sich:

a) Weder die Endlichkeitsbedingung noch die Unabhängigkeitsbedingung im Kleinen erfordern eine Umformung.

b) Die Unabhängigkeitsbedingung im Großen muß teils abgeschwächt, teils verschärft werden. Einerseits nämlich hat man bei ihr die Bedingung „$w_{\tau_i}(a - a_i) = n_i$" durch die Forderung „$w_{\tau_i}(a) = n_i$" zu ersetzen, andererseits erscheint es als wünschenswert, soweit wie möglich das Auftreten von „Bewertungen zweiter Art" auszuschließen, wobei der Begriff „Bewertung zweiter Art" im wesentlichen übereinstimmt mit dem Begriff des „Divisors zweiter Art" im Sinne der „Idealtheorie" des Verfassers[3]).

c) Bei der Geschlossenheitsbedingung ist eine Richtschnur zu finden, nach der im allgemeinen Fall die Bewertungsgrade sinnvoll eingeführt werden können. Am nächsten liegt hier das folgende Vorgehen, das auch durch den Erfolg gerechtfertigt wird: Man zeichnet bei jeder betrachteten Bewertung B in ihrem Restklassenkörper K einen Unterkörper K^* so aus, daß K über K^* endlich algebraisch wird und setzt dann den Grad f von B gleich dem Körpergrad $\mathsf{K} : \mathsf{K}^*$ von K über K^*.

B. *Kann man in einfacher und naturgemäßer Weise bei einem endlichen Körper von algebraischen Funktionen in mehr als einer Veränderlichen ein Bewertungssystem S^+ finden, das den modifizierten Bedingungen* **1** *bis* **4** *genügt?* Für die Möglichkeit einer positiven Beantwortung dieser Frage ist von grundlegender Bedeutung der

Erweiterungssatz. *Es sei der Körper $\mathfrak{L}$ ein endlicher algebraischer separabler Oberkörper des beliebigen Körpers $\mathfrak{K}$, und es sei $S_{\mathfrak{K}}$ ein Bewertungssystem von $\mathfrak{K}$, für das die (modifizierten) Bedingungen* **1** *bis* **4** *gelten; dann gelten diese Bedingungen auch für das System $S_{\mathfrak{L}}$ aller der Bewertungen von $\mathfrak{L}$, die Fortsetzungen von Bewertungen aus $S_{\mathfrak{K}}$ sind.*

Der Erweiterungssatz gestattet es, bei der Konstruktion von Bewertungssystemen für algebraische Funktionenkörper sich auf den Fall einer rein transzendenten Erweiterung des Grundkörpers, $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_0(x_1, \ldots, x_n)$ zu beschränken. Hier aber existiert tatsächlich ein „natürliches", allein von der Wahl der Transzendenten $x_1, \ldots, x_n$ abhängiges, allen gewünschten Bedingungen genügendes Bewertungssystem S^+, das für $n = 1$ mit dem System S^* aller Bewertungen von $\mathfrak{K}_0(x_1)$ über $\mathfrak{K}_0$ zusammenfällt. Um S^+ zu bilden, braucht man für $n \geqq 2$ nur nach dem gleichen, geläufigen Schema vorzugehen wie im Falle $n = 1$ und die dort zur Abschließung des Bewertungssystems benutzten linear-gebrochenen Transformationen $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ (also die projektiven, inhomogenen Trans-

---

[3]) *W. Krull*, Idealtheorie, Ergebnisse d. Math. u. ihrer Grenzgeb., Berlin 1935 (im folgenden kurz mit *Idealtheorie* zitiert), Nr. **50**. Zur genauen Definition der Bewertungen zweiter Art vgl. den Schluß von § 1.

formationen einer Veränderlichen) durch die inhomogenen projektiven Transformationen von n Veränderlichen zu ersetzen.

Mit der Aufstellung des Bewertungssystems S^+ ist das Endziel der vorliegenden Note erreicht. Die grundsätzlichen Fragen, die zuerst erörtert werden müssen, wenn man einen streng bewertungstheoretischen Aufbau der arithmetischen Theorie endlicher algebraischer Funktionenkörper in beliebig vielen Veränderlichen nach dem Vorbild der modernen Zahlentheorie versuchen will, konnten in befriedigender Weise beantwortet werden. Natürlich steht der eigentliche Aufbau noch aus, und auch auf dem Gebiete der Grundlagen ist noch kein solch definitiver Abschluß gewonnen wie in der Zahlentheorie [4]) — vgl. z. B. das weiterführende Problem, auf das am Schluß von § 6 hingewiesen wird. Aber es kam ja nur darauf an zu zeigen, daß der zur Diskussion stehende Ansatz überhaupt aussichtsvoll ist.

Hinsichtlich des Aufbaues der Note sei noch bemerkt, daß § 2 und § 5 Sonderuntersuchungen über Bewertungen zweiter Art enthalten, die einen verhältnismäßig speziellen Charakter besitzen und dementsprechend von einem Leser, dem es nur auf eine Orientierung über die wichtigsten Grundbegriffe ankommt, zunächst überschlagen werden können.

§ 1. Endliche, beschränkte Bewertungssysteme und endliche diskrete Hauptordnungen.

Wir betrachten einen kommutativen Körper $\mathfrak{K}$ und seine *diskreten* Bewertungen. Ist $B\ldots$ eine (durch irgendwelche Indizes genauer charakterisierte) Bewertung, so bedeutet stets $\mathfrak{B}\ldots$ bzw. $\mathfrak{m}\ldots$ bzw. $\mathsf{K}\ldots$ (mit den gleichen Indizes) den zugehörigen Bewertungsring bzw. das zugehörige Primideal bzw. den Restklassenkörper $\mathfrak{B}/\mathfrak{m}$; mit $w\ldots(a)$ bezeichnen wir den Wert des Körperelements a in der Bewertung $B\ldots$. Wir denken uns die Bewertungen als Exponentenbewertungen dargestellt, so daß ihre Grundeigenschaften durch die Gleichungen

$$w(ab) = w(a) + w(b), \tag{1}$$

$$w(a+b) \geqq \min\big(w(a), w(b)\big) \tag{2}$$

beschrieben werden [5]). Die Werte sollen stets so normiert sein, daß die Wertgruppe gerade aus allen ganzen Zahlen besteht, daß also 1 der kleinste vorkommende positive Wert ist.

Wir beschäftigen uns mit Systemen S von Bewertungen, die alle im folgenden Sinne endlich sein sollen:

Endlichkeitsbedingung. *Für jedes $a \in \mathfrak{K}$ ist $w_\tau(a) = 0$ für fast alle* [6]) *Bewertungen B_τ aus S.*

Bei jedem Bewertungssystem S bildet die Menge aller der $a \in \mathfrak{K}$, bei denen $w_\tau(a) \geqq 0$ ist für alle $B_\tau \in S$, einen Unterring J_S von $\mathfrak{K}$. Hat J_S den Körper $\mathfrak{K}$ selbst (und nicht etwa einen echten Unterkörper $\mathfrak{K}'$) zum Quotientenkörper, so soll das Bewertungssystem S *beschränkt* [7]) genannt werden. Die Unterringe J_S, die durch die beschränkten

---

[4]) Gedacht ist hinsichtlich der Zahlentheorie — und der algebraischen Funktionenkörper einer Variablen mit endlichem Konstantenkörper — an *Hasse* § 19 und § 20, sowie an *A. Artin* und *G. Whaples*, Axiomatic characterisation of fields by the product formula for valuations, Bull. Amer. Math. Soc. **5** (1945), S. 469—492.

[5]) Die benutzten Bewertungsaxiome sind also die der *Idealtheorie*.

[6]) „fast alle" bedeutet in üblicher Weise „alle bis auf endlich viele". Natürlich muß $a \neq 0$ angenommen werden, wie überhaupt bei unseren Bewertungsüberlegungen das Nullelement in der Regel von der Betrachtung auszuschließen ist. (Ein jeweiliger besonderer Hinweis dürfte angesichts der Trivialität der Sache unnötig sein.)

[7]) Von „Beschränktheit" wird geredet, weil das Auftreten eines negativen Wertes in der funktionentheoretischen Interpretation die Existenz einer Unendlichkeitsstelle bedeutet. Ein beschränktes Bewertungssystem S ist also anschaulich dadurch gekennzeichnet, daß hinreichend viele Funktionen existieren, die an allen den Stellen, die durch die Bewertungen von S definiert werden, endlich bleiben.

Bewertungssysteme S in $\mathfrak{K}$ definiert werden, heißen *endliche diskrete Hauptordnungen.* Da die Hauptordnungen bei unseren weiteren Betrachtungen eine entscheidende Rolle spielen werden, seien hier ihre wichtigsten Eigenschaften nochmals kurz zusammengefaßt[8]):

Bei einer Hauptordnung $J = J_S$ enthält jedes beliebige Primideal $\mathfrak{p}$ mindestens ein ringminimales Primideal $\mathfrak{p}^*$, also ein Primideal, das (außer (0)) kein echtes Primunterideal besitzt. Für jedes ringminimale Primideal $\mathfrak{p}_\tau^*$ ist der Quotientenring $J_{\mathfrak{p}_\tau^*} = \mathfrak{B}_\tau^*$ ein diskreter Bewertungsring. Das System S^* aller Bewertungen B_τ^* ist ein Untersystem von S und definiert ebenso wie S die Hauptordnung J, d. h.: $J_S = J_{S^*}$. Oder also kurz gesagt: S^* ist das kleinste Bewertungssystem, das die Hauptordnung J erzeugt. Da S^* und J sich umkehrbar eindeutig bestimmen, können und wollen wir nicht nur $J = J_{S^*}$, sondern auch umgekehrt $S^* = S_J^*$ schreiben.

Ist B eine beliebige Bewertung, und gibt es ein $a \in J$ mit $w(a) < 0$, ist also $\mathfrak{B}$ kein Oberring von J, so soll $\mathfrak{B}$ (oder auch B) *zu J fremd* heißen. Bei einem zu J nicht fremden Bewertungsring $\mathfrak{B}$ ist der Durchschnitt $\mathfrak{m} \frown J = \mathfrak{p}$ des Primideals $\mathfrak{m}$ aus $\mathfrak{B}$ mit J stets ein von (0) verschiedenes J-Primideal[9]), und es sind zwei Möglichkeiten zu unterscheiden:

a) $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^*$ ist ringminimal in J, und es ist also $\mathfrak{B} = J_{\mathfrak{p}^*}$. In diesem Falle soll B eine *Bewertung erster Art* von J genannt werden.

b) $\mathfrak{p}$ ist nicht minimal in J, und es ist infolgedessen $J_\mathfrak{p}$ ein echter Unterring von $\mathfrak{B}$. Hier wollen wir B als *Bewertung zweiter Art* von J bezeichnen.

Die Menge aller Bewertungen erster Art von J, also das System S_J^*, heißt im folgenden auch *das System erster Art von J.*

Idealtheoretisch ist eine Hauptordnung dadurch gekennzeichnet, daß jedes zu einem minimalen Primideal $\mathfrak{p}^*$ gehörige Primärideal $\mathfrak{q}^*$ eine symbolische Potenz von $\mathfrak{p}^*$ ist (also die einzige isolierte Primärkomponente einer Potenz von $\mathfrak{p}^*$ bildet), und daß sich jedes Hauptideal eindeutig als Durchschnitt endlich vieler symbolischer Potenzen paarweise verschiedener ringminimaler Primideale darstellen läßt. Oder anders ausgedrückt: Die Hauptordnungen sind diejenigen Integritätsbereiche, bei denen der Z. P. I. für v-Ideale gilt[10]).

Das Bewertungssystem S möge *unabhängig* genannt werden, wenn nach Auswahl von endlich vielen Bewertungen $B_1, \ldots, B_n$ aus S und Vorgabe von endlich vielen ganzen Zahlen $\mu_1, \ldots, \mu_n$ stets ein $a \in \mathfrak{K}$ so bestimmt werden kann, daß $w_i(a) = \mu_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ wird, während für jede nicht in die Reihe der B_i gehörige Bewertung B aus S stets $w_i(a) \geqq 0$ ist. Von *strenger Unabhängigkeit* des Systems S wollen wir reden, wenn die Bedingungen $w_i(a) = \mu_i$ ersetzt werden können durch die schärferen Bedingungen $a \equiv a_i(\mathfrak{m}_i^{\mu_i+1})$, wobei die a_i beliebige vorgeschriebene Elemente aus $\mathfrak{K}$ sind $(i = 1, \ldots, n)$.

Satz 1. *Das System S ist dann und nur dann unabhängig, wenn S das Bewertungssystem erster Art einer Hauptordnung J ist. S ist dann und nur dann streng unabhängig, wenn in J keine nichtminimalen Primideale existieren, wenn also in J der* Z. P. I. *für Dedekindsche Ideale gilt.*

---

[8]) Zu den Grundeigenschaften der Hauptordnung vgl. *Idealtheorie*, Nr. **35**. Für die Einzelheiten der Beweise vgl. vor allem *W. Krull*, Über die Zerlegung der Hauptideale in allgemeinen Ringen, Math. Ann. **105** (1931), S. 1—14. — Die Untersuchungen einer von mir kürzlich veröffentlichten Arbeit (Zur Arithmetik der endlichen diskreten Hauptordnungen, dies. J. **189** (1951), S. 118—128) haben mit denen des Textes nur wenig Berührungspunkte. Zu dem dort benutzten Divisorbegriff sei bemerkt: Ein Divisor ist nichts anderes als eine ganzzahlige, fast überall verschwindende Funktion $f(B_\tau) = w_\tau$ auf einem gegebenen System S von Bewertungen B_τ. Der Text fragt gewissermaßen nach solchen Bewertungssystemen, für die sich die Einführung von Divisoren lohnt.

[9]) Hier wird die Tatsache benutzt, daß $\mathfrak{K}$ der Quotientenkörper von J ist.

[10]) Zum Z. P. I. für v-Ideale, sowie zum gleichwertigen „Z. P. I. bei Benutzung des Artin-van der Waerdenschen Äquivalenzbegriffes" vgl. *Idealtheorie*, Nr. **43**.

Beweis. Es sei zunächst S unabhängig; a sei ein beliebiges Element aus $\mathfrak{K}$. Wegen der für alle Systeme S geforderten Endlichkeitsbedingung gibt es in S dann nur endlich viele Bewertungen $B_1, \ldots, B_n$ derart, daß $w_i(a) = -\mu_i < 0$ ist $(i = 1, \ldots, n)$. Wegen der Unabhängigkeitsvoraussetzung existiert weiter ein $c \in \mathfrak{K}$, bei dem $w_i(c) = \mu_i$ und außerdem $w(c) \geqq 0$ ist für jede Bewertung B aus S. Es gehören dann sowohl ac als auch c zu dem durch S definierten Integritätsbereich J, d. h. J hat den Gesamtkörper $\mathfrak{K}$ zum Quotientenkörper und ist somit eine Hauptordnung. Wäre nun eine Bewertung B aus S hinsichtlich J von der zweiten Art, so wäre $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \cap J$ nicht minimal in J, es gäbe daher ein echtes ringminimales Primunterideal $\mathfrak{p}^*$ von $\mathfrak{p}$, und es gehörte auch die Bewertung B^* mit dem Bewertungsring $\mathfrak{B}^* = J_{\mathfrak{p}^*}$ zu S. Unter diesen Umständen aber folgte aus $a \in J$, $w^*(a) > 0$ stets $w(a) > 0$, und das widerspricht offenbar der vorausgesetzten Unabhängigkeit von S.

Es sei nun umgekehrt S das System erster Art der Hauptordnung J. Dann folgt die Unabhängigkeit von S mühelos aus der Gültigkeit des Z. P. I. für v-Ideale in J; sie kann aber auch rein bewertungstheoretisch unter Ausnutzung der Endlichkeitsbedingung leicht erschlossen werden[11]). Soll S darüber hinaus streng unabhängig sein, so muß es für zwei verschiedene minimale Primideale $\mathfrak{p}_1^*, \mathfrak{p}_2^*$ aus J stets ein $a \in J$ geben, das den Kongruenzen $a \equiv 1(\mathfrak{p}_1^*)$, $a \equiv 0(\mathfrak{p}_2^*)$ genügt, d. h. es muß $\mathfrak{p}_1^* + \mathfrak{p}_2^* = J$ sein, und daraus schließt man mühelos, daß kein Primideal aus J ein echtes Primoberideal besitzt, und daß infolgedessen für J der gewöhnliche Z. P. I. gelten muß. Aus dem gewöhnlichen Z. P. I. aber folgt leicht die strenge Unabhängigkeit von S.

Bei den wichtigsten Anwendungen unserer Theorie werden hauptsächlich solche Hauptordnungen auftreten, für die der gewöhnliche Z. P. I. *nicht* gilt. Die strenge Unabhängigkeit wird also bei uns eine verhältnismäßig geringe Rolle spielen. Ein wichtiger, wohlbekannter Ausnahmefall allerdings ist hervorzuheben:

Satz 2. *Ein endliches Bewertungssystem S ist stets streng unabhängig*[12]).

Bei der Anwendung von Satz 2 beachte man, daß für die endlich vielen Bewertungen $B_1, \ldots, B_n$, die in der Definition der strengen Unabhängigkeit auftreten, im vorliegenden Falle stets *alle* Bewertungen aus S gewählt werden können.

§ 2. Bewertungen erster und zweiter Art.

Die in § 2 behandelten Fragen sind für die Untersuchungen aus § 3 und § 4 bedeutungslos. Erst in § 5 werden wir auf die Ergebnisse von § 2 zurückzugreifen haben. Es seien im folgenden S und $S_1 < S$ zwei beschränkte Bewertungssysteme; J_1 und J seien die zugehörigen Hauptordnungen. Dann folgt zunächst unmittelbar aus Satz 1:

Satz 3. *Ist $S = S_J$ das System erster Art von J, so ist auch $S_1 = S_{J_1}$ das System erster Art von J_1.*

Denn es ist klar, daß gleichzeitig mit S auch jedes Untersystem S_1 von S unabhängig ist. Allgemeiner gilt:

Satz 4. *Jede in S_1 enthaltene Bewertung erster Art von J ist auch Bewertung erster Art von J_1. Jede in S_1 enthaltene Bewertung zweiter Art von J_1 ist auch Bewertung zweiter Art von J.*

---

[11]) Vgl. z. B. die erste in Fußnote [8]) zitierte Arbeit (Math. Ann. **105**).

[12]) Satz 2 findet sich im Grunde schon bei *W. Krull*, Ein Satz über primäre Integritätsbereiche, Math. Ann. **103** (1930), S. 540—565. Dort wird allerdings nur gezeigt, daß der Durchschnitt von n diskreten Bewertungsringen ein Hauptidealring mit n Primelementen ist, aber daraus folgt dann die strenge Unabhängigkeitsbedingung ohne jede Schwierigkeit. Satz 2 ist der Grund dafür, daß wir weiterhin überall, wo von „Unabhängigkeit" die Rede ist, nur an die „Unabhängigkeit im Großen" denken. Daß die „Unabhängigkeitsbedingung im Kleinen" in der Einleitung eine selbständige Rolle spielte, hatte seinen Grund einzig in der Notwendigkeit, den Anschluß an *Hasse* herzustellen.

Von den beiden Behauptungen dieses Satzes ist offenbar die eine die logische Umkehrung der anderen. Es genügt daher, wenn wir die zweite Behauptung beweisen. Es sei B eine Bewertung zweiter Art von J_1, und es sei B_1 eine Bewertung erster Art von J_1, derart, daß $\mathfrak{m} \cap J_1 > \mathfrak{m}_1 \cap J_1$. Dann gehört B_1 zu S_1, und es folgt aus $a \in J_1$, $w_1(a) > 0$ stets $w(a) > 0$. Da ferner $a \in J$ stets $a \in J_1$ nach sich zieht, folgt auch aus $a \in J$, $w_1(a) > 0$ immer $w(a) > 0$, d. h. es muß $\mathfrak{m} \cap J \geqq \mathfrak{m}_1 \cap J$ sein, und es kann infolgedessen B keine Bewertung erster Art von J darstellen. (Ist, was nicht ausgeschlossen ist, $\mathfrak{m} \cap J = \mathfrak{m}_1 \cap J$, so kann auch B_1 keine Bewertung erster Art von J sein, weil bei einem ringminimalen Primideal $\mathfrak{p}^*$ von J außer $J_{\mathfrak{p}^*}$ kein anderer Bewertungsring die Eigenschaft besitzt, daß sein Primideal mit J den Durchschnitt $\mathfrak{p}^*$ hat.)

Leider lassen sich in Satz 4 die Worte „erster Art" und „zweiter Art" nicht vertauschen. *Beispiele zeigen, daß es Bewertungen in S_1 geben kann, die hinsichtlich J_1 von erster, hinsichtlich J dagegen von zweiter Art sind.* Diese Möglichkeit ist sogar dann gegeben, wenn S nur eine einzige Bewertung mehr enthält als S_1[13]). Indessen gilt wenigstens:

Satz 5. *Ist die Bewertung B aus S_1 von zweiter Art hinsichtlich J, und sind alle die Bewertungen erster Art B_τ^* von J, bei denen aus $a \in J$, $w_\tau^*(a) > 0$ stets $w(a) > 0$ folgt, gleichzeitig auch Bewertungen erster Art von J_1, so muß B auch hinsichtlich J_1 von zweiter Art sein. Oder, anders ausgedrückt: Ist B Bewertung erster Art von J_1 und Bewertung zweiter Art von J, so gibt es hinsichtlich J mindestens eine zu J_1 fremde Bewertung erster Art B^* derart, daß aus $a \in J$, $w^*(a) > 0$ stets $w(a) > 0$ folgt.*

Beweis. Um einzusehen, daß die beiden Fassungen von Satz 5 völlig gleichwertig sind, beachte man, daß nach Satz 4 eine zu J_1 nicht fremde Bewertung erster Art von J stets auch Bewertung erster Art von J_1 ist. Wir beweisen die erste Fassung. Es sei B Bewertung zweiter Art von J, und es sei B^* eine bestimmte Bewertung erster Art von J derart, daß aus $a \in J$, $w^*(a) > 0$ stets $w(a) > 0$ folgt. Sind nun die Voraussetzungen von Satz 5 erfüllt, so ist B^* auch Bewertung erster Art von J_1. Ist ferner $b \in J_1$, $w^*(b) > 0$, so gibt es nur endlich viele Bewertungen $B_1^*, \ldots, B_n^*$ erster Art von J mit $w_i(b) < 0$, und da diese Bewertungen alle zu J fremd sind, muß für jedes i ein $a_i \in J$ mit $w_i^*(a) > 0$, $w(a) = 0$ existieren. Wählen wir nun r hinreichend groß, so haben wir: $c = (a_1 \cdots a_n)^r b \in J$, $w^*(c) > 0$, also auch $w(c) > 0$; andererseits wird $w(c) = w(a)$. D. h.: die Relationen $a \in J_1$, $w^*(a) > 0$ haben stets $w(a) > 0$ zur Folge, es ist also B auch hinsichtlich J_1 von der zweiten Art.

Aus Satz 5 folgt mühelos:

Satz 6. *Es seien S_1 und S_2 zwei beschränkte Bewertungssysteme mit den zugeordneten Hauptordnungen J_1, J_2, die sich nur in endlich vielen Bewertungen unterscheiden, für die*

---

[13]) Es sei z. B. $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_0(x, y)$ eine zweifach transzendente Erweiterung eines beliebigen Körpers $\mathfrak{K}_0$, und es werde $J = \mathfrak{K}_0[x, y]$, $J_1 = \mathfrak{K}_0\left[x, \frac{y}{x}\right]$ gesetzt. Dann entsprechen die Bewertungen erster Art von J bzw. J_1 umkehrbar eindeutig den wesentlich (d. h. nicht nur um einen Faktor aus $\mathfrak{K}_0$) verschiedenen, über $\mathfrak{K}_0$ irreduziblen Polynomen in x, y bzw. $x, \frac{y}{x}$. Ferner läßt sich jedes Polynom $P\left(x, \frac{y}{x}\right)$ in $x, \frac{y}{x}$ eindeutig in der Form $x^r \cdot p(x, y)$ darstellen, wobei $p(x, y)$ ein durch x unteilbares Polynom in x, y bedeutet, und es ist, wie leicht einzusehen, $P\left(x, \frac{y}{x}\right)$ dann und nur dann in J_1 irreduzibel, wenn entweder $r = 1$, $p(x, y) \in \mathfrak{K}_0$ oder $r = 0$, $p(x, y)$ irreduzibel über $\mathfrak{K}_0$. Daraus folgt weiter, daß die Bewertungen erster Art, die durch von x wesentlich verschiedene über $\mathfrak{K}_0$ irreduzible Polynome definiert werden, bei J und J_1 dasselbe System S_2 bilden. Was schließlich die durch x definierten Bewertungen erster Art B bzw. B_1 von J bzw. J_1 angeht, so besteht der Bewertungsring $\mathfrak{B}$ von B aus allen Polynomquotienten $\frac{p_1(x, y)}{p_2(x, y)}$ $(p_2(x, y) \not\equiv 0(x))$, es ist also B zu J_1 fremd, während andererseits $w_1\left(\frac{y}{x}\right) = 0$, $w_1(x) = w_1(y) = w_1(x) + w_1\left(\frac{y}{x}\right) = 1$, $\mathfrak{p}_1 \cap J = (x, y) \cdot J$ wird, so daß B_1 eine Bewertung zweiter Art von J darstellt. — Um also ein Beispiel der im Text genannten Art zu erhalten, braucht man nur in unserem Falle $S = S_2 \cup (B, B_1)$; $S_1 = S_2 \cup (B_1)$ zu setzen.

also $S_1 - (S_1 \cap S_2)$ *und* $S_2 - (S_1 \cap S_2)$ *endliche Systeme sind. Ist dann* S_1^* *bzw.* S_2^* *das System erster Art von* J_1 *bzw.* J_2, *so sind auch die Systeme* $S_1^* - (S_1^* \cap S_2^*)$ *und* $S_2^* - (S_1^* \cap S_2^*)$ *endlich; es unterscheiden sich also* J_1 *und* J_2 *nur in endlich vielen Bewertungen erster Art.*

Beweis. Es sei J_3 die zu dem beschränkten System $S_3 = S_1 \cap S_2$ gehörige Hauptordnung; S_3^* sei das System erster Art von J_3. Dann beweisen wir zunächst die Endlichkeit der Systeme $S_1^* - (S_1^* \cap S_3^*)$ und $S_3^* - (S_1^* \cap S_3^*)$. Dabei wiederum dürfen wir uns auf die Betrachtung des Falles beschränken, daß $S_1 - S_3$ aus einer einzigen Bewertung B besteht; die Richtigkeit der Behauptung im allgemeinen Fall $S_1 - S_3 = (B_1, \ldots, B_n)$ ergibt sich dann sofort durch einen trivialen Induktionsschluß. Ist nun $S_1 - S_3 = (B)$, so folgt aus Satz 4 sofort $S_1^* \leqq (S_3^* \cup (B))$; es bleibt also nur noch zu zeigen, daß es höchstens endlich viele Bewertungen geben kann, die hinsichtlich J_3 von erster, hinsichtlich J_1 von zweiter Art sind. Sehen wir aber von dem trivialen Fall ab, daß B hinsichtlich J_1 von zweiter Art ist und $J_3 = J_1$, $S_3^* = S_1^*$ wird, so ist B die einzige zu J_3 fremde Bewertung erster Art von J_1, und aus der zweiten Fassung von Satz 5 ergibt sich: Für jede Bewertung B_3, die hinsichtlich J_3 von der ersten, hinsichtlich J_1 von der zweiten Art ist, folgt aus $a \in J_1$, $w_3^*(a) > 0$ stets $w_3(a) > 0$. Da nun alle betrachteten Systeme der Endlichkeitsbedingung genügen sollen, kann es, wie zu beweisen war, nur endlich viele Bewertungen B der angegebenen Art geben.

Genau so wie die Endlichkeit der Systeme $S_1^* - (S_1^* \cap S_3^*)$, $S_3^* - (S_1^* \cap S_3^*)$ zeigt man die Endlichkeit der Systeme $S_2^* - (S_2^* \cap S_3^*)$ und $S_3^* - (S_2^* \cap S_3^*)$. Kombiniert man dann die gewonnenen Resultate, so ergibt sich sofort die Richtigkeit von Satz 6 in vollem Umfange.

§ 3. Geschlossene Bewertungssysteme.

Es sei S ein (natürlich der Endlichkeitsbedingung genügendes) Bewertungssystem. Bei jeder Bewertung B_τ aus S sei im Restklassenkörper K_τ ein Unterkörper K_τ^* ausgezeichnet, über dem K_τ algebraisch von einem endlichen Grade f_τ ist; f_τ möge als der *Grad* von B_τ (innerhalb des Systems S) bezeichnet werden[14]). Das Bewertungssystem S soll dann (hinsichtlich der benutzten Graddefinition) *geschlossen* heißen, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

Geschlossenheitsbedingung. *Für jedes* $a \in \mathfrak{K}$ *ist* $\sum\limits_{B_\tau \in S} f_\tau w_\tau(a) = 0$.

(Man beachte, daß die angeschriebene Summe wegen der Endlichkeitsbedingung bei jedem einzelnen a nur endlich viele von 0 verschiedene Summanden besitzt, so daß zu ihrer Bildung keinerlei Konvergenzvoraussetzung erforderlich ist.) Für ein geschlossenes Bewertungssystem gilt:

Satz 7. *Die Menge aller der* $a \in \mathfrak{K}$, *bei denen* $w_\tau(a) = 0$ *ist für jede Bewertung* B_τ *aus dem geschlossenen System* S, *bildet zusammen mit der Null einen Unterkörper* $\mathfrak{K}_0$ *von* $\mathfrak{K}$, *der innerhalb* $\mathfrak{K}$ *algebraisch abgeschlossen ist*[15]).

Zunächst nämlich enthält $\mathfrak{K}_0$ sicher das Einselement 1 von $\mathfrak{K}$ und das Element -1; außerdem bilden wegen $w(ab) = w(a) + w(b)$ die von 0 verschiedenen Elemente aus $\mathfrak{K}_0$ eine multiplikative Gruppe. Sind schließlich a und b Elemente aus $\mathfrak{K}_0$, und ist $a + b \neq 0$, so ist wegen $w(a+b) \geqq \min(w(a), w(b))$ jedenfalls $w_\tau(a+b) \geqq 0$ für alle $B_\tau \in S$, und wegen der Geschlossenheit von S folgt daraus $w_\tau(a+b) = 0$ für alle $B_\tau \in S$. Es ist also jedenfalls $\mathfrak{K}_0$ ein Körper. Ist ferner $a \in \mathfrak{K}$ und $a^n + a_1 a^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ $(a_i \in \mathfrak{K}_0)$, so

[14]) Den Zusatz „hinsichtlich S" lassen wir weiterhin in der Regel weg. Natürlich besteht durchaus die Möglichkeit, B in zwei verschiedenen Systemen verschiedene Grade zuzuordnen.

[15]) Der im wesentlichen bekannte Beweis von Satz 7 wird nur der Vollständigkeit halber kurz wiederholt.

folgt für jedes $B_\tau \in S$ aus $w_\tau(a_i) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ in bekannter Weise $w_\tau(a) \geqq 0$, und wegen der Geschlossenheit von S haben wir wieder $w_\tau(a) = 0$ $(B_\tau \in S)$, also $a \in \mathfrak{K}_0$.

$\mathfrak{K}_0$ möge als der zu dem gegebenen Bewertungssystem $S_\mathfrak{K}$ gehörige *Koeffizientenkörper* bezeichnet werden. Da es außerhalb von $\mathfrak{K}_0$ kein $a \in \mathfrak{K}$ mit $w_\tau(a) \geqq 0$ für alle $B_\tau \in S$ gibt, definiert das geschlossene System in $\mathfrak{K}$ keine Hauptordnung, es ist also sicher *nicht* unabhängig im Sinne von § 1. Um auch für geschlossene Systeme eine Unabhängigkeitsbedingung zu formulieren, definieren wir zunächst: Ein Untersystem S_1 von S soll *großes Untersystem* heißen, wenn $S - S_1$ endlich ist. Dann lautet die

Unabhängigkeitsbedingung. *Das geschlossene System S heißt unabhängig, wenn zu jedem endlichen Untersystem E von S ein E umfassendes beschränktes großes Untersystem S_1 derart existiert, daß die endlich vielen Bewertungen aus $S - S_1$ alle zu der durch S_1 definierten Hauptordnung fremd sind.*

Lassen sich die in der Unabhängigkeitsbedingung auftretenden Systeme S_1 alle so wählen, daß sie im Sinne von § 1 *streng unabhängig* sind, so wird das geschlossene System S *streng unabhängig* genannt. Aus Satz 1 folgt sofort:

Satz 8. *Das geschlossene System S ist dann und nur dann unabhängig (bzw. streng unabhängig), wenn zu jedem endlichen Untersystem E von S eine Hauptordnung J (bzw. eine Hauptordnung mit gewöhnlichem* Z. P. I.) *derart existiert, daß das System erster Art S_J von J ein E umfassendes großes Untersystem von S ist, und daß alle Bewertungen aus $S - S_J$ zu J fremd sind.*

Man beachte, daß die Unabhängigkeitsbedingung die Existenz von unendlich vielen großen Untersystemen S_1 fordert. Sind nämlich $S_{11}, \ldots, S_{1n}$ endlich viele Systeme der geforderten Art, so ist das zu $E = (S - S_{11}) \cup \cdots \cup (S - S_{1n})$ gehörige System S_1 von allen S_{1i} verschieden. Wir definieren schließlich: Das geschlossene, unabhängige Bewertungssystem S soll *vollständig* heißen, wenn keine Bewertung B von $\mathfrak{K}$ existiert, die zu allen den Hauptordnungen, deren Existenz nach Satz 3 durch die Unabhängigkeitsbedingung gefordert wird, fremd ist.

§ 4. Algebraische Körpererweiterung. Der Permanenzsatz für geschlossene Systeme.

Es sei $\mathfrak{L}$ ein endlicher, separabler algebraischer Oberkörper von $\mathfrak{K}$ vom Relativgrade n. Zu jeder Bewertung B von $\mathfrak{K}$ gibt es in $\mathfrak{L}$ endlich viele „zugehörige" oder „darüber liegende" Bewertungen $B_1, \ldots, B_r$ $(r \leqq n)$, die durch die Gültigkeit der Gleichungen $\mathfrak{B}_i \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{B}$ ausgezeichnet sind. Unter dem *Grad von B_i über B* verstehen wir wie üblich den (stets endlichen) Grad f_i von K_i über K. Erhält bei Berücksichtigung der in § 1 festgelegten Normierung aller auftretenden Bewertungen ein Element $a \in \mathfrak{K}$ vom Werte $w(a) = 1$ in $\mathfrak{L}$ den Wert $w_i(a) = e_i$, so soll e_i der *Exponent von B_i über B* genannt werden. Für die Relativgrade und Relativexponenten gilt dann die wohlbekannte, fundamentale Formel[16]):

$$e_1 f_1 + \cdots + e_r f_r = n. \tag{1}$$

Ist $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{K}$ normal, so sind die B_i alle untereinander über $\mathfrak{K}$ konjugiert, es ist also $e_1 = \cdots = e_r = e$, $f_1 = \cdots = f_r = f$, und (1) vereinfacht sich zu:

$$ref = n. \tag{2}$$

Es sei jetzt $S_\mathfrak{K}$ ein beliebiges System von Bewertungen B_τ aus $\mathfrak{K}$; dann wollen wir unter dem zugehörigen System $S_\mathfrak{L}$ stets das System aller der Bewertungen $B_{\tau i}$ von $\mathfrak{L}$ verstehen,

---

[16]) Hierfür ist die *Separabilität* von $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{K}$ wesentlich. Denn Formel (1) folgt bekanntlich aus der Tatsache, daß der Ring $\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{B}_r$, der gerade aus allen von $\mathfrak{B}$ ganz abhängigen Elementen von $\mathfrak{L}$ besteht, eine Modulbasis von n, modulo $\mathfrak{m}$ linear unabhängigen Elementen über $\mathfrak{B}$ besitzt.

die über den einzelnen Bewertungen B_τ von S liegen ($i = 1, \ldots, r_\tau$). Ist $S_{\mathfrak{K}}$ ein geschlossenes System, ist also bei jeder Bewertung B_τ in K_τ ein Unterkörper K_τ^* ausgezeichnet und damit ein Grad f_τ von B_τ definiert, so wollen wir K_τ^* auch in den Körpern $\mathsf{K}_{\tau i}$ auszeichnen, (die sich ja als Oberkörper von K_τ auffassen lassen). Damit ist dann auch für jede Bewertung $B_{\tau i}$ ein Grad $f_{\tau i}$ festgelegt, und es gelten ersichtlich die Formeln:

$$f_{\tau i} = g_{\tau i} f_\tau. \tag{3}$$

Wir beweisen jetzt den fundamentalen Permanenzsatz:

Satz 9. *Ist $S_{\mathfrak{K}}$ ein geschlossenes, unabhängiges System, so ist stets auch $S_{\mathfrak{L}}$ geschlossen und unabhängig.*

Beweis. a) Daß das System $S_{\mathfrak{L}}$ der stillschweigend für $S_{\mathfrak{K}}$ vorausgesetzten, von allen Systemen geforderten Endlichkeitsbedingung genügt, folgt sofort aus der Tatsache, daß über jeder Bewertung B_τ nur endlich viele Bewertungen $B_{\tau i}$ liegen. (Man beachte: Ist $\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ ($\alpha \in \mathfrak{L}, a_k \in \mathfrak{K}$), so kann höchstens dann $w_{\tau i}(\alpha) > 0$ bzw. $w_{\tau i}(\alpha) < 0$ sein, wenn $w_\tau(a_k) > 0$ bzw. $w_\tau(a_k) < 0$ ist für mindestens ein a_k.)

b) Es seien $B_{\sigma_1 i_1}, \ldots, B_{\sigma_m, i_m}$ endlich viele Bewertungen aus $S_{\mathfrak{L}}$. Wegen der Unabhängigkeit von $S_{\mathfrak{K}}$ gibt es dann in $\mathfrak{K}$ eine Hauptordnung $J_{\mathfrak{K}}$ derart, daß das System erster Art $S_{J_{\mathfrak{K}}} = S'_{\mathfrak{K}}$ von $J_{\mathfrak{K}}$ ein die Bewertungen $B_{\sigma_1}, \ldots, B_{\sigma_m}$ enthaltendes großes Untersystem von $S_{\mathfrak{K}}$ ist, und daß alle Bewertungen B_τ aus $S_{\mathfrak{K}} - S'_{\mathfrak{K}}$ zu $J_{\mathfrak{K}}$ fremd sind. Es sei nun $J_{\mathfrak{L}}$ der Ring aller von $J_{\mathfrak{K}}$ ganz abhängigen Elemente aus $\mathfrak{L}$. Dann ist nach einem bekannten Satz[17]) $J_{\mathfrak{L}}$ Hauptordnung in $\mathfrak{L}$, und es besteht das System erster Art $S_{J_{\mathfrak{L}}} = S'_{\mathfrak{L}}$ von $J_{\mathfrak{L}}$ aus allen den Bewertungen $B_{\sigma i}$, die über den Bewertungen B_σ aus $S'_{\mathfrak{K}}$ liegen. Es enthält das beschränkte, unabhängige System $S'_{\mathfrak{L}}$ jedenfalls alle die vorgegebenen Bewertungen $B_{\sigma_1 i_1}, \ldots, B_{\sigma_m i_m}$. Ferner ist $S'_{\mathfrak{L}}$ ein großes Untersystem von $S_{\mathfrak{L}}$, weil jede Bewertung $B_{\tau i}$ aus $S_{\mathfrak{L}} - S'_{\mathfrak{L}}$ über einer der endlich vielen Bewertungen B_τ aus $S_{\mathfrak{K}} - S'_{\mathfrak{K}}$ liegen muß. Wäre schließlich etwa die Bewertung $B_{\tau i}$ aus $S_{\mathfrak{L}} - S'_{\mathfrak{L}}$ nicht fremd zu $J_{\mathfrak{L}}$, also $J_{\mathfrak{L}} < \mathfrak{B}_{\tau i}$, so wäre auch $J_{\mathfrak{K}} = J_{\mathfrak{L}} \cap \mathfrak{K} < \mathfrak{B}_\tau = \mathfrak{B}_{\tau i} \cap \mathfrak{K}$, was nach Voraussetzung ausgeschlossen ist. — Das System $S_{\mathfrak{L}}$ ist also unabhängig im Sinne der für geschlossene Systeme gegebenen Definition.

c) Um nachzuweisen, daß $S_{\mathfrak{L}}$ vollständig ist, bilden wir den kleinsten $\mathfrak{L}$ umfassenden Normalkörper $\mathfrak{N}$ über $\mathfrak{K}$, der ebenso wie $\mathfrak{L}$ separabel ist, und bilden zu $S_{\mathfrak{L}}$ das zugehörige System $S_{\mathfrak{N}}$, das gleichzeitig als das zu $S_{\mathfrak{K}}$ gehörige System aufgefaßt werden kann. Wir erschließen dann α) aus der Geschlossenheit von $S_{\mathfrak{K}}$ die von $S_{\mathfrak{N}}$ und β) aus der Vollständigkeit von $S_{\mathfrak{N}}$ die von $S_{\mathfrak{L}}$[18]).

cα) Beim Schluß von $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{N}$ dürfen wir unbedenklich $\mathfrak{L} = \mathfrak{N}$ setzen, so daß also weiterhin $B_{\tau 1}, \ldots, B_{\tau r_\tau}$ die über B_τ liegenden Bewertungen bedeuten usw. Es sei nun α ein beliebiges Element aus $\mathfrak{N}$; $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ seien seine (nicht notwendig alle verschiedenen) Relativkonjugierten über $\mathfrak{K}$; ferner bedeute B_τ eine beliebige Bewertung aus $S_{\mathfrak{K}}$, und es seien $B_{\tau 1}, \ldots, B_{\tau r}$ die verschiedenen über B_τ liegenden untereinander konjugierten Bewertungen aus $S_{\mathfrak{N}}$. Schließlich sei $w_{\tau i}(\alpha) = n_i$, und es mögen e_τ, g_τ, f_τ die den Formeln (2), (3) zugrunde liegende Bedeutung haben. Dann sind für jedes feste k die Werte $w_{\tau i}(\alpha_k)$ nur eine Permutation der Werte $w_{\tau i}(\alpha)$ ($i = 1, \ldots, r$), da sich ja bei Anwendung eines Automorphismus von $\mathfrak{N}$ über $\mathfrak{K}$ die $B_{\tau i}$ einfach untereinander vertauschen. Bei Berücksichtigung von (2) und (3) erhält man demnach:

$$f_{\tau 1} w_{\tau 1}(\alpha_k) + \cdots + f_{\tau r} w_{\tau r}(\alpha_k) = f_\tau g_\tau (n_1 + \cdots + n_r) \qquad (k = 1, \ldots, n). \tag{4}$$

---

[17]) Vgl. z. B. *W. Krull*, Unendliche algebraische Erweiterungen endlicher diskreter Hauptordnungen, Math. Zeitschr. **42** (1937), S. 767–773.

[18]) Bei den folgenden Schlüssen handelt es sich letzten Endes um eine möglichst knappe Zusammenfassung geläufiger Überlegungen aus der algebraischen Zahlentheorie.

Für das zu $\mathfrak{K}$ gehörige Element $a = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ folgt daher:

$$(5)\quad f_{\tau 1} w_{\tau 1}(a) + \cdots + f_{\tau r} w_{\tau r}(a) = \sum_{i=1}^{r} f_{\tau i} \sum_{k=1}^{n} w_{\tau i}(\alpha_k) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{r} f_{\tau i} w_{\tau i}(\alpha_k) = n \sum_{i=1}^{r} f_{\tau i} w_{\tau i}(\alpha).$$

Andererseits hat man nach Definition des Exponenten $e_\tau = e_{\tau 1} = \cdots = e_{\tau r}$:

$$(6)\qquad w_{\tau i}(a) = e_\tau w_\tau(a),$$

und aus (6), (2) und (3) ergibt sich unter Berücksichtigung von $g_{\tau 1} = \cdots = g_{\tau r} = g_\tau$:

$$(7)\qquad f_{\tau 1} w_{\tau 1}(a) + \cdots + f_{\tau r} w_{\tau r}(a) = f_\tau g_\tau e_\tau w_\tau(a) = n f_\tau w_\tau(a).$$

Der Vergleich von (5) und (7) liefert nun:

$$(8)\qquad f_{\tau 1} w_{\tau 1}(\alpha) + \cdots + f_{\tau r} w_{\tau r}(\alpha) = f_\tau w_\tau(a).$$

Aus $\sum_{B_\tau \in S_{\mathfrak{K}}} f_\tau w_\tau(a) = 0$ folgt daher $\sum_{B_{\tau i}} f_{\tau i} w_{\tau i}(\alpha) = \sum_\tau \left(\sum_i f_{\tau i} w_{\tau i}(\alpha)\right) = 0$, d. h. die Geschlossenheit von $S_{\mathfrak{K}}$ zieht die Geschlossenheit von $S_{\mathfrak{N}}$ nach sich.

cβ) Beim Rückschluß von $S_{\mathfrak{N}}$ auf $S_{\mathfrak{L}}$ dürfen wir, ohne sonst etwas zu ändern, $\mathfrak{K} = \mathfrak{L}$ annehmen. Wir dürfen daher wieder Formel (8) anwenden, und sehen dann sofort, daß nicht nur der Hinschluß von $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{N}$, sondern auch der Rückschluß von $\mathfrak{N}$ auf $\mathfrak{L}$ möglich ist. Damit ist der Beweis des Permanenzsatzes abgeschlossen.

Unser Hauptresultat wird ergänzt durch

Satz 11. *Ist das geschlossene, unabhängige Bewertungssystem $S_{\mathfrak{K}}$ streng unabhängig bzw. vollständig, so ist auch $S_{\mathfrak{L}}$ streng unabhängig bzw. vollständig.*

Beweis. a) Daß die strenge Unabhängigkeit von $S_{\mathfrak{K}}$ die strenge Unabhängigkeit von $S_{\mathfrak{L}}$ nach sich zieht, folgt sofort aus der Bemerkung, daß der Z. P. I. für den Ring $J_{\mathfrak{L}}$ aller von $J_{\mathfrak{K}}$ ganz abhängigen Elemente aus $\mathfrak{L}$ gilt, falls $J_{\mathfrak{K}}$ eine Hauptordnung aus $\mathfrak{K}$ mit Z. P. I. ist. (Vgl. Abschnitt b) des Beweises von Satz 10.)

b) Es sei $S_{\mathfrak{K}}$ vollständig, B_i sei eine beliebige Bewertung von $\mathfrak{L}$, die über der Bewertung B von $\mathfrak{K}$ liegt. Dann gibt es mindestens eine für die Unabhängigkeit von $S_{\mathfrak{L}}$ charakteristische Hauptordnung $J_{\mathfrak{K}}$ derart, daß B zu $J_{\mathfrak{K}}$ nicht fremd ist, daß also $J_{\mathfrak{K}} < \mathfrak{B}$ ist. Verstehen wir nun wieder unter $J_{\mathfrak{L}}$ den Ring aller von $J_{\mathfrak{K}}$ ganz abhängigen Elemente, so ist $J_{\mathfrak{L}}$ eine der für die Unabhängigkeit von $S_{\mathfrak{L}}$ charakteristischen Hauptordnungen, und aus $J_{\mathfrak{K}} < \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_i \cap \mathfrak{K}$ folgt wegen der Ganz-Abgeschlossenheit jedes Bewertungsrings sofort $J_{\mathfrak{L}} < \mathfrak{B}_i$, d. h. $J_{\mathfrak{L}}$ ist zu B_i nicht fremd. Da B_i eine völlig willkürlich gewählte Bewertung von $\mathfrak{L}$ war, ist damit die Vollständigkeit von $S_{\mathfrak{L}}$ gezeigt.

Wir bemerken schließlich noch:

Bedeutet $\mathfrak{K}_0$ bzw. $\mathfrak{L}_0$ den Koeffizientenkörper des Systems $S_{\mathfrak{K}}$ bzw. $S_{\mathfrak{L}}$, so besteht $\mathfrak{L}_0$ gerade aus allen über $\mathfrak{K}_0$ algebraischen Elementen von $\mathfrak{L}$.

Beweis angesichts von Satz 7 trivial.

§ 5. Streng nichtsinguläre, geschlossene Systeme.

Das Auftreten von Bewertungen zweiter Art bedeutet immer irgendwie eine singuläre Erscheinung. Wenn wir daher von einem *unabhängigen* geschlossenen System S fordern, daß sich S zerlegen läßt in das System erster Art S' einer Hauptordnung J und in ein *endliches* System $S - S'$, *das keine Bewertung zweiter Art von J enthält*, so fordern wir damit gleichzeitig eine gewisse *Nichtsingularität* von S. Es liegt indessen nahe, die in der Unabhängigkeit steckende Nichtsingularitätsbedingung zu verschärfen und zu definieren:

Das (geschlossene)[19]) System S soll *streng nichtsingulär* heißen, wenn jedes beschränkte Untersystem S' von S das System erster Art einer Hauptordnung J ist: $S' = S_J$.

[19]) Die Geschlossenheitsbedingung wird bei den Beweisen nirgends benutzt. Wir beschränken uns nur deshalb auf geschlossene Systeme, weil es bei nichtgeschlossenen praktisch keinen Sinn hat, die Frage nach der strengen Nichtsingularität aufzuwerfen.

Man wird dann sofort fragen, ob auch für die strenge Nichtsingularität ein Permanenzsatz im Sinne der Sätze 10 und 11 von § 4 gilt. Indessen stößt man hier auf unerwartete Schwierigkeiten. Zunächst allerdings erhält man bei Benutzung der Bezeichnungen von § 4 mühelos:

Satz 12. *Ist $S_{\mathfrak{L}}$ streng nichtsingulär, so gilt das gleiche für $S_{\mathfrak{K}}$.*

Zum Beweise von Satz 12 genügt es offenbar zu zeigen: Ist $S'_{\mathfrak{K}}$ ein beschränktes Untersystem von $S_{\mathfrak{K}}$, das das System erster Art einer Hauptordnung $J_{\mathfrak{K}}$ darstellt, so ist keine Bewertung aus $S_{\mathfrak{K}} - S'_{\mathfrak{K}}$ hinsichtlich $J_{\mathfrak{K}}$ von zweiter Art. Bedeutet nun wieder $J_{\mathfrak{L}}$ die Hauptordnung aller von $J_{\mathfrak{K}}$ ganz abhängigen Elemente aus $\mathfrak{L}$, so ist, wie wir wissen, das System $S'_{\mathfrak{L}}$ aller Bewertungen erster Art von $J_{\mathfrak{L}}$ identisch mit dem über $S'_{\mathfrak{K}}$ liegenden Bewertungssystem aus $\mathfrak{L}$ im Sinne von § 3, und es sind nach Voraussetzung alle Bewertungen aus $S_{\mathfrak{L}} - S'_{\mathfrak{L}}$ zu $J_{\mathfrak{L}}$ fremd. Gäbe es aber in $S_{\mathfrak{K}} - S'_{\mathfrak{K}}$ eine zu $J_{\mathfrak{K}}$ nicht fremde Bewertung B, wäre also $\mathfrak{B} > J_{\mathfrak{K}}$, so wäre auch $\mathfrak{B}_i > J_{\mathfrak{L}}$ für jede über B liegende und damit zu $S_{\mathfrak{L}} - S'_{\mathfrak{L}}$ gehörige Bewertung B_i; also ist $\mathfrak{B} > J_{\mathfrak{K}}$ ausgeschlossen. Daher ist $S_{\mathfrak{K}}$ ebenso wie $S_{\mathfrak{L}}$ streng nichtsingulär.

Der Schluß „von oben nach unten" ist somit bei der strengen Nichtsingularität ohne weiteres möglich. Versucht man dagegen den Schluß „*von unten nach oben*", also von $S_{\mathfrak{K}}$ auf $S_{\mathfrak{L}}$, so zeigt sich, daß man hier jedenfalls *bestimmt nicht* mit so einfachen Überlegungen allein zum Ziel kommt, wie sie zum Beweise von Satz 10 ausreichten. Die entscheidende Schwierigkeit, die leicht durch Beispiele belegt werden kann, ist die, daß unter Umständen *in $\mathfrak{L}$ gewisse Hauptordnungen $J_{\mathfrak{L}}$ existieren*, deren System erster Art ein Untersystem von $S_{\mathfrak{L}}$ ist, und *bei denen der Durchschnitt $J_{\mathfrak{L}} \cap \mathfrak{K}$ keine Hauptordnung in $\mathfrak{K}$ wird*, evtl. sogar mit dem Koeffizientenkörper $\mathfrak{K}_0$ des Systems $S_{\mathfrak{K}}$ zusammenfällt [20]). Auf solche Hauptordnungen lassen sich aber offenbar Überlegungen von der in § 4 benutzten Art keineswegs anwenden. Sucht man die Sätze von § 2 auszunutzen, so erhält man zunächst:

Satz 13. *Ist S ein geschlossenes, unabhängiges System, J eine Hauptordnung, deren System erster Art $S_J = S'$ in S enthalten ist, so sind stets höchstens endlich viele Bewertungen aus $S - S'$ hinsichtlich J von zweiter Art.*

Es sei J^* eine der Hauptordnungen, deren Existenz durch die Unabhängigkeitsbedingung gesichert ist; S^* sei ihr System erster Art, das gleichzeitig ein großes Untersystem von S ist. Dann ergibt sich aus Satz 4 mühelos: Jedes Untersystem S_1^* von S ist System erster Art einer Hauptordnung J_1^*, und es sind alle Bewertungen aus $S - S_1^*$ zu J_1^* fremd. (Beachte, daß jede zu J^* fremde Bewertung auch zu J_1^* fremd sein muß, da $J_1^* \geqq J^*$ gilt.) Es sei jetzt weiter $S'' \geqq S'$ das Untersystem aller der Bewertungen aus S, die hinsichtlich J von der ersten oder zweiten Art sind, und es sei $S_1^* = S'' - ((S - S^*) \cap S'')$.

---

[20]) Es sei z. B. $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_0(x)$ eine einfach transzendente Erweiterung des Körpers $\mathfrak{K}_0$ aller komplexen Zahlen, und es werde $\mathfrak{L} = \mathfrak{K}(\sqrt{x^2 - 1})$ gesetzt; $S_{\mathfrak{K}}$ bzw. $S_{\mathfrak{L}}$ sei das System *aller* Bewertungen von $\mathfrak{K}$ bzw. $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{K}_0$ im Sinne von [1]). Dann entsprechen die Bewertungen aus $S_{\mathfrak{K}}$ umkehrbar eindeutig den um das Symbol ∞ vermehrten Elementen von $\mathfrak{K}_0$, wobei die zu α bzw. ∞ gehörige Bewertung B_α bzw. B_∞ in übersichtlicher Weise mit Hilfe des Polynoms $x - \alpha$ bzw. mit Hilfe von $\frac{1}{x}$ definiert wird. Über jeder Bewertung B_α (einschließlich $\alpha = \infty$) liegen für $\alpha \neq \pm 1$ in $S_{\mathfrak{L}}$ zwei verschiedene Bewertungen $B_{\alpha 1}$, $B_{\alpha 2}$, während über B_1 und B_{-1} jeweils nur eine Bewertung B_{11} bzw. $B_{-1,1}$ liegt. — Entscheidend ist nun für uns, daß, wie wohlbekannt, $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{K}_0$ zu $\mathfrak{K}$ isomorph ist. Daraus folgt sofort, daß nicht nur aus $S_{\mathfrak{K}}$, sondern auch aus $S_{\mathfrak{L}}$ durch Weglassung einer einzigen Bewertung stets ein vollständiges System entsteht. Ist nun etwa $J_{\mathfrak{L}}$ die zu $S_{\mathfrak{L}} - (B_{\infty 2})$ in $\mathfrak{L}$ gehörige Hauptordnung, so wird sicher $J_{\mathfrak{L}} \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{K}_0$, weil jedes Element aus $J_{\mathfrak{L}} \cap \mathfrak{K}$ in allen Bewertungen B_α einschließlich $\alpha = \infty$ nichtnegative Werte hat. — Daß in unserem Beispiel das Auftreten von Bewertungen zweiter Art ausgeschlossen ist, bedeutet offenbar keinen Einwand; wenn schon in einem so einfachen Fall die im Text als entscheidend bezeichnete Schwierigkeit auftritt, so muß man um so mehr in komplizierteren Fällen mit ihr rechnen.

Dann ist S_1^* ebenso wie S'' beschränkt, es gibt also eine zugehörige Hauptordnung J_1^*. Wegen $S_1^* \leq S^*$ ist ferner S_1^* gerade das System erster Art von J_1^*, und wegen der Endlichkeit von $S'' \frown (S - S^*)$ können sich nach Satz 6 in S_1^* nur endlich viele Bewertungen befinden, die hinsichtlich J von zweiter Art sind. Aus der Definition von S'' folgt nun bei nochmaliger Berücksichtigung der Endlichkeit von $S'' \frown (S - S^*)$ sofort die Richtigkeit von Satz 13.

Satz 13 enthält gewissermaßen implizit einen Permanenzsatz, da nach Satz 10 gleichzeitig mit einem geschlossenen unabhängigen System $S_{\mathfrak{K}}$ auch das darüber liegende System $S_{\mathfrak{L}}$ unabhängig ist. Nehmen wir jetzt an, es sei $S_{\mathfrak{K}}$ in dem von uns festgelegten Sinne streng nichtsingulär und versuchen wir daraus unter Benutzung der bei Satz 13 gewonnenen Resultate die strenge Nichtsingularität von $S_{\mathfrak{L}}$ abzuleiten, so kommen wir zu folgender Feststellung: Von einem beliebigen Untersystem $\bar{S}'_{\mathfrak{L}}$ möge gesagt werden, *es habe das Teilsystem $S'_{\mathfrak{K}}$ von $S_{\mathfrak{K}}$ unter sich liegen*, wenn $S'_{\mathfrak{K}}$ alle und nur die Bewertungen B_τ umfaßt, bei denen $\bar{S}'_{\mathfrak{L}}$ mindestens eine darüber liegende Bewertung $B_{\tau i}$ enthält. Jedes feste Teilsystem $S'_{\mathfrak{K}}$ liegt dann ersichtlich unter i. a. unendlich vielen Systemen $\bar{S}'_{\mathfrak{L}}$, und unter allen den $\bar{S}'_{\mathfrak{L}}$, die $S'_{\mathfrak{K}}$ unter sich haben, gibt es ein einziges größtes System, nämlich das System $S_{\mathfrak{L}}$, das im Sinne von § 4 „über $S_{\mathfrak{K}}$ liegt". Aus den Überlegungen, die beim Beweise von Satz 13 benutzt wurden, ergibt sich jetzt zunächst ganz allgemein:

Satz 14. *Ist das unter $\bar{S}'_{\mathfrak{L}}$ liegende System $S'_{\mathfrak{K}}$ das System erster Art einer Hauptordnung $J_{\mathfrak{K}}$, und sind alle B_τ aus $S_{\mathfrak{K}} - S'_{\mathfrak{K}}$ zu $J_{\mathfrak{K}}$ fremd, so ist auch $S'_{\mathfrak{L}}$ das System erster Art einer Hauptordnung $\bar{J}_{\mathfrak{L}}$, und es sind alle $B_{\tau i}$ zu $S_{\mathfrak{L}} - S'_{\mathfrak{L}}$ fremd.*

Denn die zu beweisende Behauptung ist richtig für $S'_{\mathfrak{L}}$ (vgl. Beweis von Satz 10, Abschnitt b)), und von $S'_{\mathfrak{L}}$ kann man ganz analog wie bei Satz 13 auf die Teilsysteme $\bar{S}'_{\mathfrak{L}}$ schließen.

Im Falle der strengen Nichtsingularität von $S_{\mathfrak{K}}$ ist aber die Voraussetzung von Satz 14 für alle beschränkten Teilsysteme $S'_{\mathfrak{K}}$ von $S_{\mathfrak{K}}$ erfüllt. Eine Schwierigkeit für den Beweis der strengen Nichtsingularität von $S_{\mathfrak{L}}$ entsteht also nur dann, wenn mindestens ein beschränktes System $\bar{S}'_{\mathfrak{L}}$ existiert, unter dem ein nichtbeschränktes System $S'_{\mathfrak{K}}$ liegt. Hier weiß man wegen der Unabhängigkeit von $S_{\mathfrak{K}}$ und $S_{\mathfrak{L}}$: Zu jeder Bewertung $B_{\tau i}$ aus $\bar{S}'_{\mathfrak{L}}$ gibt es ein beschränktes, großes, B_τ enthaltendes Teilsystem $S''_{\mathfrak{K}}$ von $S'_{\mathfrak{K}}$. Bilden wir dann mit dem über $S''_{\mathfrak{K}}$ liegenden System $S''_{\mathfrak{L}}$ den Durchschnitt $\bar{S}'_{\mathfrak{L}} \frown S''_{\mathfrak{L}} = \bar{S}''_{\mathfrak{L}}$, so ist $\bar{S}''_{\mathfrak{L}}$ ein beschränktes, großes, $B_{\tau i}$ enthaltendes Untersystem von $\bar{S}'_{\mathfrak{L}}$, und es ist $B_{\tau i}$ nach Satz 14 hinsichtlich der zu $\bar{S}''_{\mathfrak{L}}$ gehörigen Hauptordnung $\bar{J}''_{\mathfrak{L}}$ von erster Art.

Zieht man nun Satz 5 heran, so sieht man, daß unsere Überlegungen zu dem folgenden Resultat geführt haben: Aus der strengen Nichtsingularität von $S_{\mathfrak{K}}$ folgt die strenge Nichtsingularität von $S_{\mathfrak{L}}$, wenn man zeigen kann:

Es sei $\bar{S}'_{\mathfrak{L}}$ irgendein beschränktes Untersystem von $S_{\mathfrak{L}}$ mit der zugehörigen Hauptordnung $\bar{J}_{\mathfrak{L}}$. Dann gibt es zu jeder Bewertung $B_{\tau i}$ aus $\bar{S}'_{\mathfrak{L}}$ ein endliches (evtl. leeres) Untersystem $E'_{\mathfrak{L}}$ von $\bar{S}'_{\mathfrak{L}}$ derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Unter dem System $\bar{S}''_{\mathfrak{L}} = \bar{S}'_{\mathfrak{L}} - \bar{E}'_{\mathfrak{L}}$ liegt ein beschränktes System $S''_{\mathfrak{K}}$.

2. Ist $B_{\sigma k}$ eine der endlich vielen Bewertungen aus $E'_{\mathfrak{L}}$, so gibt es stets ein $a \in \bar{J}_{\mathfrak{L}}$ mit $w_{\sigma k}(a) > 0$, $w_{\tau i}(a) = 0$ (d. h. es ist $\mathfrak{m}_{\tau i} \frown \bar{J}_{\mathfrak{L}}$ kein Oberideal von $\mathfrak{m}_{\sigma k} \frown \bar{J}_{\mathfrak{L}}$).

Unter den angegebenen Voraussetzungen kann man nämlich aus der Tatsache, daß $B_{\tau i}$ hinsichtlich der zu $\bar{S}''_{\mathfrak{L}}$ gehörigen Hauptordnung $\bar{J}''_{\mathfrak{L}}$ von erster Art ist, nach Satz 5 sofort schließen, daß $B_{\tau i}$ auch hinsichtlich $\bar{J}_{\mathfrak{L}}$ von erster Art sein muß.

Leider ermöglicht unsere Reduktion der Fragestellung noch immer nicht eine allgemeine positive Lösung des gestellten Problems. Um das einzusehen, betrachten wir den (an sich besonders günstigen und in dem Beispiel von § 6 realisierten) Fall, daß durch

Weglassung einer beliebigen einzigen Bewertung B_σ aus $S_\mathfrak{K}$ stets ein beschränktes System $S'_\mathfrak{K}$ entsteht. Dann brauchen in $S_\mathfrak{L}$ nur solche beschränkten Untersysteme $\bar{S}'_\mathfrak{L}$ betrachtet zu werden, die zu jedem $B_\sigma \in S_\mathfrak{K}$ mindestens eine darüber liegende Bewertung $B_{\sigma k}$ enthalten. Ist ferner $B_{\tau i}$ eine beliebige Bewertung aus $\bar{S}'_\mathfrak{L}$, so ist für sie die Bedingung 2. erfüllt, sofern nur für ein einziges $\sigma \neq \tau$ zu jedem $B_{\sigma k} \in \bar{S}'_\mathfrak{L}$ stets ein $a \in \bar{J}_\mathfrak{L}$ mit $w_{\sigma k}(a) > 0$, $w_{\tau i}(a) = 0$ existiert, d. h. keines der endlich vielen Primideale $\mathfrak{m}_{\sigma k} \cap \bar{J}_\mathfrak{L}$ in $\mathfrak{m}_{\tau i} \cap \bar{J}_\mathfrak{L}$ enthalten ist. Dafür aber, daß nicht doch etwa in einem besonders gelagerten Fall $\mathfrak{m}_{\tau i} \cap \bar{J}_\mathfrak{L}$ für jedes σ und jeweils ein passendes $k = k(\sigma)$ das Ideal $\mathfrak{m}_{\sigma k} \cap \bar{J}_\mathfrak{L}$ enthält, ist kein zwingender Grund einzusehen. Wir müssen uns also hier damit begnügen, durch eine eingehende Analyse die Schwierigkeiten aufgedeckt zu haben, die der Gewinnung eines allgemeinen Permanenzsatzes für strenge Nichtsingularität im Wege stehen[21]).

§ 6. Projektive Bewertungssysteme in endlichen algebraischen Funktionenkörpern.

Es sei $\mathfrak{K}_0$ ein beliebiger Körper, von dem wir nur der Einfachheit halber annehmen wollen, daß er unendlich viele Elemente enthält[22]). $\mathfrak{L} = \mathfrak{K}_0(a_1, \ldots, a_\omega)$ sei ein endlicher Oberkörper von $\mathfrak{K}_0$ vom Transzendenzgrad $n > 0$. Wir dürfen und wollen annehmen, daß $\mathfrak{K}_0$ in $\mathfrak{L}$ algebraisch abgeschlossen ist (vgl. Satz 7). Von Interesse sind für uns nur solche geschlossenen Bewertungssysteme $S_\mathfrak{L}$, die $\mathfrak{K}_0$ als Koeffizientenkörper besitzen. In $\mathfrak{L}$ lassen sich (auf unendlich viele Weisen) n über $\mathfrak{K}_0$ transzendente Elemente $x_1, \ldots, x_n$ so wählen, daß $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{K}_0(x_1, \ldots, x_n)$ separabel algebraisch wird[23]). Wir zeigen, daß zu jedem derartigen Transzendentensystem eindeutig ein gewisses geschlossenes, unabhängiges, vollständiges Bewertungssystem $S^+_\mathfrak{L}$ (mit dem Koeffizientenkörper $\mathfrak{K}_0$) konstruiert werden kann, das anschaulich als ein „projektives" Bewertungssystem zu bezeichnen ist. Dabei kommt es uns im wesentlichen darauf an, in dem rein transzendenten Oberkörper $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_0(x_1, \ldots, x_n)$ von $\mathfrak{K}_0$ ein unseren Wünschen entsprechendes Bewertungssystem $S^+_\mathfrak{K}$ zu definieren. Der Übergang von $S^+_\mathfrak{K}$ zu $S^+_\mathfrak{L}$ vollzieht sich nach den allgemeinen Richtlinien von § 4.

Es sei $J_\infty = \mathfrak{K}_0[x_1, \ldots, x_n]$ der Polynomring in den x_i über $\mathfrak{K}_0$. Dann entsprechen die Bewertungen B_τ erster Art von J_∞ umkehrbar eindeutig den über $\mathfrak{K}_0$ irreduziblen, wesentlich (d. h. nicht nur um einen Faktor aus $\mathfrak{K}_0$) verschiedenen Polynomen $p_\tau(x)$. [Der zu $p_\tau(x)$ gehörige Bewertungsring $\mathfrak{B}_\tau$ besteht aus allen Polynomquotienten $\frac{z(x)}{n(x)}$ $(n(x) \not\equiv 0(p_\tau(x)))$.] Den *Grad* f_τ der Bewertung B_τ setzen wir gleich dem Grad von $p_\tau(x)$ (in $x_1, \ldots, x_n$ zusammengenommen). Dann gilt zunächst:

Satz 15. *Die eingeführte Graddefinition läßt sich als Graddefinition im Sinne von § 3 deuten.*

Beweis. Da nämlich $\mathfrak{K}_0$ unendlich viele Elemente enthält, kann man für jedes τ durch eine passende nichtsinguläre lineare Transformation $y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$ erreichen, daß $p_\tau(x) = q_\tau(y)$ nicht nur in den y_i zusammengenommen, sondern auch in y_n allein den

[21]) Im übrigen wird es zweckmäßig sein, auf die hier behandelte Frage zunächst bei speziellen Systemen einzugehen, und auch dort erst dann, wenn es sich zeigt, daß aus der etwaigen Nichtgültigkeit der strengen Nichtsingularitätsbedingungen bei einer konkreten Aufgabe ernsthafte Schwierigkeiten entstehen würden.

[22]) Im Falle eines endlichen Konstantenkörpers $\mathfrak{K}_0$ müßte man (bei der Rechtfertigung der Graddefinition im System $S^+_\mathfrak{K}$) vorübergehend $\mathfrak{K}_0$ durch Adjunktion einer Unbestimmten u erweitern. Die Überlegungen, die die Unbedenklichkeit einer solchen Erweiterung zeigen, bewegen sich durchaus im üblichen Gleise. — Die Beschränkung auf einen unendlichen Konstantenkörper dient also nur zur Abkürzung unserer Betrachtungen; sie besagt *nicht*, daß der wichtige Fall eines endlichen Konstantenkörpers für uns unzugänglich wäre.

[23]) Vgl. z. B. *O. Haupt*, Lehrbuch d. Algebra **2**, Leipzig 1929, S. 591.

Grad f_τ besitzt. Dann sind die durch $y_1, \ldots, y_{n-1}$ im Körper K_τ erzeugten Restklassen $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{n-1}$ über dem Körper $\mathfrak{K}_0$, den man ja als Teilbereich von K_τ auffassen kann, algebraisch unabhängig, und es hat K_τ über $\mathfrak{K}_0(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{n-1})$ den Grad f_τ. Unsere Graddefinition entspricht also der Auszeichnung des Unterkörpers $\mathsf{K}_\tau^* = \mathfrak{K}_0(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{n-1})$ in K_τ.

Wir nehmen jetzt zu den Bewertungen B_τ noch eine einzige Bewertung B_∞ hinzu, der der Grad $f_\infty = 1$ zugeschrieben wird, und die durch folgende Festsetzung definiert ist:

$$(1) \qquad w\left(\frac{z(x)}{n(x)}\right) = g_n - g_z \qquad (g_n \text{ bzw. } g_z \text{ Grad von } n(x) \text{ bzw. } z(x)).$$

Für das aus den Bewertungen B_τ, B_∞ bestehende System $S_{\mathfrak{K}}^+$ gilt dann bei Benutzung der eingeführten Grade f_τ, f_∞:

Satz 16. *Das System $S_{\mathfrak{K}}^+$ ist ein geschlossenes, unabhängiges, vollständiges, streng nichtsinguläres System mit dem Konstantentenkörper $\mathfrak{K}_0$.*

Beweis. a) Jedes $R(x) \in \mathfrak{K}$ hat eine eindeutige Primfaktorzerlegung

$$R(x) = p_{\tau_1}(x)^{e_1} \cdots p_{\tau_r}(x)^{e_r} \qquad (e_i \gtrless 0).$$

Es ist dann

$$w_{\tau_i}(R(x)) = e_{\tau_i}, \quad w_\tau(R(x)) = 0 \qquad (\tau \neq \tau_i \ (i = 1, \ldots, r)),$$

während

$$w_\infty(R(x)) = -(f_{\tau_1} e_1 + f_{\tau_2} e_2 + \cdots + f_{\tau_r} e_r)$$

ist. Wir haben also, wie gefordert, $\sum_\sigma f_\sigma w_\sigma(R(x)) = 0$, wenn σ alle τ und außerdem das Symbol ∞ durchläuft. — Unsere Wertberechnung zeigt gleichzeitig, daß $\mathfrak{K}_0$ der Konstantenkörper von $S_{\mathfrak{K}}^+$ ist.

b) Zu dem System $S_{\mathfrak{K}}^+ - (B_\infty)$ gehört nach Konstruktion die Hauptordnung $J = J_\infty$; das System $S_{\mathfrak{K}}^+ - (B_\infty, B_{\tau_1}, \ldots, B_{\tau_s})$ definiert die Hauptordnung aller Polynomquotienten $z(x) \cdot p_{\tau_1}(x)^{-e_1} \cdots p_{\tau_s}(x)^{-e_s} (e_i \geqq 0)$; dem System $S_{\mathfrak{K}}^+ - (B_{\tau_1}, \ldots, B_{\tau_s})$ ist die Hauptordnung aller Polynomquotienten $z(x) \cdot p_{\tau_1}(x)^{-e_1} \cdots p_{\tau_s}(x)^{-e_s} (e_i \geqq 0)$ mit der Zusatzbedingung $f_z - (f_{\tau_1} e_1 + \cdots + f_{\tau_s} e_s) \leqq 0$ zugeordnet. (Um einzusehen, daß tatsächlich alle angegebenen Ringe Hauptordnungen sind, also $\mathfrak{K}$ zum Quotientenkörper besitzen, braucht man nur die Gleichungen $x_i = \frac{x_i}{p_\tau(x)} \cdot \left(\frac{1}{p_\tau(x)}\right)^{-1}$ zu beachten.) — Unsere Feststellungen zeigen, daß die Weglassung einer beliebigen Bewertung B_σ (einschließlich B_∞) aus $S_{\mathfrak{K}}^+$ stets zu einem *beschränkten* System $S_{\mathfrak{K}}^+ - (B_\sigma)$ führt, wobei B_σ selbst zu der durch $S_{\mathfrak{K}}^+ - (B_\sigma)$ definierten Hauptordnung J_σ fremd ist. Ferner sind alle Bewertungen $B_{\sigma_1} \neq B_\sigma$ hinsichtlich J_σ von erster Art, weil dem System $S_{\mathfrak{K}}^+ - (B_\sigma, B_{\sigma_1})$ eine Hauptordnung J_{σ, σ_1} entspricht, die einen *echten* Oberring von J_σ darstellt. — Das System $S_{\mathfrak{K}}^+$ ist also unabhängig, und zwar können für die in der Unabhängigkeitsbedingung auftretenden Systeme $S'_{\mathfrak{K}}$ die sämtlichen Systeme $S_{\mathfrak{K}}^+ - (B_\sigma)$ gewählt werden (einschließlich $B_\sigma = B_\infty$).

c) Aus dem unter b) gewonnenen Resultat folgt gleichzeitig die strenge Nichtsingularität von $S_{\mathfrak{K}}^+$. (Man beachte die ersten Zeilen des Beweises von Satz 13.)

d) Es sei B eine beliebige Bewertung von $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{K}_0$, also eine Bewertung, die der Bedingung $w(a_0) = 0$ $(a_0 \in \mathfrak{K}_0)$ genügt; ist dann $w(x_i) \geqq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, so enthält $\mathfrak{B}$ die Ordnung $J = J_\infty$. Ist aber $w(x_i) < 0$ für mindestens ein i, so sei die Numerierung so gewählt, daß $w(x_n) \leqq w(x_i)$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, also $w(x_n^{-1}) > 0$ und $w(x_i x_n^{-1}) \geqq 0$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ wird. Dann enthält $\mathfrak{B}$ für $p_{\sigma_0}(x) = x_n$ die Hauptordnung J_{σ_0}, also den Ring aller Quotienten $z(x) \cdot x_n^{-e}$ $(g_z \leqq e)$; denn man sieht bei Berücksichtigung der für die Elemente von J_{σ_0} gültigen Gradbedingung, daß $J_{\sigma_0} = \mathfrak{K}_0[x_1 x_n^{-1}, \ldots, x_{n-1} x_n^{-1}, x_n^{-1}]$ ist. — $S_{\mathfrak{K}}^+$ ist also im Sinne der Definition von § 3 vollständig.

Aus Satz 16 folgt sofort:

Satz 17. *Das zu $S_{\mathfrak{K}}^{+}$ und $\mathfrak{L}$ gehörige System $S_{\mathfrak{L}}^{+}$ ist geschlossen, unabhängig und vollständig.*

Triviale Anwendung der Permanenzsätze von § 4. Daß aus der strengen Nichtsingularität von $S_{\mathfrak{K}}^{+}$ nicht ohne weiteres auf die strenge Nichtsingularität geschlossen werden darf, auch nicht unter Berücksichtigung der Beschränktheit aller Systeme $S_{\mathfrak{K}}^{+} - (B_\sigma)$, wurde in § 5 gezeigt. Es ist jetzt noch die Benennung „projektives System" für $S_{\mathfrak{L}}^{+}$ zu rechtfertigen; der Name wurde deshalb gewählt, weil das Ausgangssystem $S_{\mathfrak{K}}^{+}$ in einer engen Beziehung zur projektiven Transformationsgruppe steht:

Satz 18. *Das System $S_{\mathfrak{K}}^{+}$ ändert sich nicht, wenn wir die Transzendenten x_i durch neue Transzendente y_i ersetzen, die mit den x_i durch eine nichtsinguläre lineargebrochene Transformation über $\mathfrak{K}_0$ verknüpft sind:*

$$(2)\quad y_i = \frac{a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n + a_{i0}}{a_{01}x_1 + \cdots + a_{0n}x_n + a_{00}} \qquad (i = 1, \ldots, n;\ |a_{ik}| \neq 0\,(i, k = 0, 1, \ldots, n)).$$

Beweis. Satz 18 ist anschaulich ohne weiteres plausibel. Denn es entsprechen offenbar die Bewertungen B_τ den $(n-1)$-dimensionalen Hyperflächen eines n-dimensionalen affinen Raumes R_n, wobei die Graddefinition mit der auch in der Geometrie üblichen übereinstimmt. Die Hinzunahme der Bewertung B_∞ dagegen entspricht der Erweiterung von R_n zum projektiven Raume P_n durch Einführung der unendlichfernen Hyperebene. Exakt kann Satz 18 durch Übergang von der inhomogenen zur homogenen Schreibweise ohne größere Rechnung bewiesen werden, wobei außerdem die Berechtigung der geometrischen Interpretation noch deutlicher wird. Indessen muß man dann zunächst Bewertungen in „Körpern" von Formenquotienten definieren, und die Darstellung wird auf diese Weise bei aller grundsätzlichen Durchsichtigkeit umständlicher als es das behandelte elementare Problem rechtfertigt [24]).

Wir wählen daher hier einen einfacheren Weg, um die Behauptung von Satz 18 durch inhomogene Rechnungen zu verifizieren. Bekanntlich läßt sich jede Transformation des Typus (2) zusammensetzen aus *ganzen* linearen Transformationen und Transformationen des speziellen Typs:

$$(3)\qquad y_i = x_i x_n^{-1} \qquad (i = 1, \ldots, n-1), \quad y_n = x_n^{-1}.$$

Für ganze lineare Transformationen ist Satz 18 trivial, da dann

$$J = \mathfrak{K}_0[x_1, \ldots, x_n] = \mathfrak{K}_0[y_1, \ldots, y_n]$$

wird und jedes Polynom $a(x) = b(y_i)$ in den y_i denselben Grad hat wie in den x_i. Es genügt daher zu zeigen, daß wir wieder das System $S_{\mathfrak{K}}^{+}$ erhalten, wenn wir in

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_0(x_1, \ldots, x_n) = \mathfrak{K}_0(x_1 x_n^{-1}, \ldots, x_{n-1}x_n^{-1}, x_n^{-1})$$

die Hauptordnung $J' = \mathfrak{K}_0[x_1 x_n^{-1}, \ldots, x_{n-1}x_n^{-1}, x_n^{-1}]$ anstelle von $J = \mathfrak{K}_0[x_1, \ldots, x_n]$ zum Ausgangspunkt der Konstruktion wählen. Zunächst überlegt man sich nun angesichts des involutorischen Charakters von (3) mühelos: Ist $p_\tau(x)$ ein über $\mathfrak{K}_0$ irreduzibles, durch x_n unteilbares Polynom vom Grade f_τ in den x_i, so ist $q_\tau(y) = x_n^{-f_\tau} p_\tau(x)$ ein über $\mathfrak{K}_0$ irreduzibles, durch y_n unteilbares Polynom vom Grade f_τ in den y_i; man hat $p_\tau(x) = y_n^{-f_\tau} q_\tau(y)$, und es definieren $p_\tau(x)$ und $q_\tau(y)$ dieselbe Bewertung B_τ von $\mathfrak{K}$. Weiter

[24]) Etwas Neues würde allerdings die Einführung solcher Bewertungen nicht bedeuten; der modernen algebraischen Geometrie ist sie durchaus geläufig. Aber hier ist die homogene Schreibweise überhaupt nicht angemessen, da sie ausschließlich auf den Körper $\mathfrak{K}$ zugeschnitten ist, der für uns nur eine Durchgangsstation zum Körper $\mathfrak{L}$ darstellt. Auch arbeitet man in der für uns vorbildlichen algebraischen Funktionentheorie einer Variablen in der Regel mit *inhomogenen* lineargebrochenen Transformationen. Es erscheint daher grundsätzlich wünschenswert zu zeigen, daß Satz 18 auch inhomogen leicht beweisbar ist.

verifiziert man leicht: Bei einem Polynomquotienten $\frac{z(x)}{n(x)} = \frac{z'(y)}{n'(y)}$ ist dann und nur dann $g_z \leqq g_n$ bzw. $g'_z \leqq g'_n$, wenn $n'(y) \not\equiv 0(y_n)$ bzw. $n(x) \not\equiv 0(x_n)$ ist. Die Bewertung B_∞ wird also bei Benutzung von J' durch das Polynom y_n definiert; umgekehrt übernimmt diejenige Bewertung B_{σ_0}, die bei dem ursprünglichen Aufbau dem Polynom x_n zugeordnet war, beim Übergang von J zu J' die Rolle von B_∞.

Durch die skizzierten Überlegungen ist Satz 18 bereits bewiesen. Um klar zu machen, daß der Satz nicht nur wegen der Möglichkeit einer anschaulichen Deutung des Systems $S^+_{\mathfrak{K}}$ von Interesse ist, zeigen wir zunächst:

Satz 19. *Bei dem System $S^+_{\mathfrak{K}}$ (und damit auch bei $S^+_{\mathfrak{L}}$) sind die Grade der Bewertungen bis auf einen Proportionalitätsfaktor eindeutig festgelegt durch die Forderung, daß $S^+_{\mathfrak{K}}$ geschlossen sein soll.*

Beweis. Man hat nur zu beachten: Es seien die Grade f'_τ, f'_∞ der Bewertungen B'_τ, B_∞ irgendwie so festgelegt, daß die Geschlossenheitsbedingung erfüllt ist, f_τ bedeute wie bisher den Grad des zu B_τ gehörigen irreduziblen Polynoms $p_\tau(x)$. Dann haben wir $w_\infty(p_\tau(x)) = -f_\tau$; $w_\tau(p_\tau(x)) = 1$; $w_\sigma(p_\tau(x)) = 0$ $(\sigma \neq \tau, \neq \infty)$, und aus der Geschlossenheit von $S_{\mathfrak{K}}$ folgt daher $f'_\tau \cdot 1 + f'_\infty(-f_\tau) = 0$, $f'_\tau = f'_\infty f_\tau$.

Wir überlegen jetzt weiter: Ist $\mathfrak{L}$ ein Funktionenkörper *einer* unabhängigen Variablen, so verfährt man bei der Bestimmung des Systems *aller* zulässigen Bewertungen von $\mathfrak{L}$ (d. h. in diesem Falle so viel wie bei der Bestimmung des Systems $S^+_{\mathfrak{L}}$) üblicherweise so: Man erkennt genau wie im allgemeinen Fall, daß es in erster Linie darauf ankommt, für eine rein transzendente Erweiterung $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_0(x)$ des Grundkörpers alle zulässigen Bewertungen zu ermitteln. Diese Bewertungen aber entsprechen mit einer Ausnahme umkehrbar eindeutig den über $\mathfrak{K}_0$ irreduziblen Polynomen aus $\mathfrak{K}_0[x]$, und die Ausnahmebewertung wird durch Anwendung der Transformation $y = \frac{1}{x}$ oder allgemeiner einer beliebigen lineargebrochenen Transformation $y = \frac{a_{11}x + a_{10}}{a_{01}x + a_{00}}$ $\Big($also durch Übergang von $\mathfrak{K}_0[x]$ zu $\mathfrak{K}_0\left[\frac{1}{x}\right]$ bzw. zu $\mathfrak{K}_0\left[\frac{a_{11}x + a_{10}}{a_{01}x + a_{00}}\right]\Big)$ gefunden.

Verknüpft man diese Bemerkung mit Satz 18 und 19, so erhält man abschließend

Satz 20. *Die Systeme $S^+_{\mathfrak{L}}$ sind für $n \geqq 2$ als naturgemäßer Ersatz für das System $S^+_{\mathfrak{L}} = S^*_{\mathfrak{L}}$ aller Bewertungen eines endlichen algebraischen Funktionenkörpers einer unabhängigen Variablen über seinem Grundkörper anzusehen, wenn man sich auf den Standpunkt stellt, daß für $n \geqq 2$ die projektiven Transformationen* (2) *die naturgemäße Verallgemeinerung der lineargebrochenen Transformationen*

$$(4) \qquad y = \frac{a_{11}x + a_{10}}{a_{01}x + a_{00}} \qquad (a_{11}a_{00} - a_{10}a_{01} \neq 0)$$

(*also der projektiven Transformationen einer Veränderlichen*) *bilden*[25]).

Denn nach Satz 18 erhält man diese Systeme $S^+_{\mathfrak{K}}$, wenn man unter Verwendung der Transformationen (2) an Stelle der Transformationen (4) das Vorbild der algebraischen Funktionenkörper einer Veränderlichen nachahmt, und nach Satz 19 sind dann auch die

[25]) Im Sinne von Satz 20 kann man mit einem gewissen Recht behaupten, daß das System $S^+_{\mathfrak{K}}$ der Funktionentheorie implizit längst bekannt ist. Denn z. B. schon in dem bekannten (allerdings analytisch orientierten) Lehrbuch der Funktionentheorie von *Osgood* wird neben anderen Möglichkeiten (vgl. [26])) die der Erfassung des Unendlichfernen mit Hilfe der Transformationen (2) ausführlich diskutiert. — Die bewertungstheoretischen Eigenschaften des Systems $S^+_{\mathfrak{K}}$ (einschl. seiner auf die formale Graddefinition gegründeten Geschlossenheit) waren mir schon vor etwa 20 Jahren bekannt. Auch den Übergang von $S^+_{\mathfrak{K}}$ zu $S^+_{\mathfrak{L}}$, der den eigentlichen Kern unserer Betrachtungen darstellt, hatte ich damals schon ins Auge gefaßt, ohne mir allerdings die Einzelheiten der Durchführung klar zu machen.

Grade der einzelnen gewonnenen Bewertungen im wesentlichen eindeutig festgelegt, so daß keine weitere Diskussion nötig ist, ob die von uns gewählte Graddefinition als zweckmäßig anzusehen ist oder nicht.

Mit Satz 20 ist in gewisser Hinsicht ein abschließendes Ergebnis gewonnen. Es ist gezeigt, daß die Systeme $S_{\mathfrak{L}}^{+}$ mehr bedeuten als ad hoc konstruierte Beispiele zu der in §1 bis §5 entwickelten Axiomatik. Andererseits erheben sich sofort neue Fragen. Man braucht beim Übergang von $n = 1$ zu beliebigem n nicht notwendig (4) durch (2) zu ersetzen. Man kann auch allgemeiner so vorgehen: Die Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ werden irgendwie in $r \leqq n$ Gruppen geteilt:

$$x_1, \ldots, x_{s_1}; \quad x_{s_1+1}, \ldots, x_{s_1+s_2}; \ldots; x_{s_1+\cdots+s_{r-1}+1}, \ldots, x_{s_1+\cdots+s_r} \qquad (s_1 + \cdots + s_r = n),$$

und es werden als Verallgemeinerung von (4) die folgenden Transformationen eingeführt:

$$(5) \qquad y_{s_0+s_1+\cdots+s_{i-1}+k} = \frac{a_{k1}^{(i)} x_{s_0+s_1+\cdots+s_{i-1}+1} + \cdots + a_{ks_i}^{(i)} x_{s_0+s_1+\cdots+s_{i-1}+s_i} + a_{k0}^{(i)}}{a_{01}^{(i)} x_{s_0+s_1+\cdots+s_{i-1}+1} + \cdots + a_{0s_i}^{(i)} x_{s_0+s_1+\cdots+s_{i-1}+s_i} + a_{00}^{(i)}}$$

$$\left(i = 1, \ldots, r; \quad s_0 = 0; \quad \left|a_{kj}^{(i)}\right| \neq 0; \quad k, j = 0, 1, \ldots, s_i\right).$$

Um einzusehen, daß ein derartiges Vorgehen in keiner Weise als „gekünstelt" abgelehnt werden darf, braucht man nur zu bedenken, daß einerseits die Transformationen (5) für $r = n$ von jeher in der Theorie der algebraischen Funktionen mehrerer Veränderlicher (auch in der arithmetischen) eine fundamentale Rolle spielen [26]), und daß man andererseits auf Transformationen (5) mit $r = 2$ kommt, wenn man in der Theorie der algebraischen Korrespondenzen statt der üblichen homogenen die inhomogene Schreibweise benutzt [27]). Unter diesen Umständen ist es offenbar eine wichtige Aufgabe festzustellen, wie sich diejenigen Bewertungssysteme, die man gewinnt, wenn man die speziellen Transformationen (2) durch die allgemeineren (5) ersetzt, in den Rahmen der in § 1 bis § 5 entwickelten Axiomatik einordnen lassen, bzw. wie man diese Axiomatik erweitern muß, um die Bedeutung der neuen Bewertungssysteme mit zu erfassen. Doch ist das eine Frage, die über den Gedankenkreis der vorliegenden Note wesentlich hinausführt, und die deshalb an späterer Stelle behandelt werden soll.

Schlußbemerkung.

In einem wichtigen Punkte können die Ergebnisse von § 6 leicht positiv ergänzt werden. Hat man es mit Körpern zu tun, die alle einen gemeinsamen Unterkörper $\mathfrak{K}_0$ besitzen, und betrachtet man nur Bewertungen über $\mathfrak{K}_0$, so kann man jeder Bewertung B einen *Transzendenzgrad* zuordnen, nämlich den Transzendenzgrad ihres Restklassen-

---

[26]) Für die analytisch orientierte Funktionentheorie vgl. z. B. das Lehrbuch von *Osgood*. Als ein älteres Beispiel für das Auftreten der Transformation (5) mit $r = n$ in einem spezifisch arithmetischen Rahmen sei das Lehrbuch *H. Jung*, Algebraische Flächen (Hannover 1925) genannt. (Daß bei *Osgood* und *Jung* die uns interessierenden Transformationen hauptsächlich in der speziellen Form $y_i = x_i^{\varepsilon_i}$ $(i = 1, \ldots, n;\ \varepsilon_i = \pm 1)$ auftreten, ist natürlich unwesentlich.)

[27]) Denn eine algebraische Korrespondenz wird arithmetisch dadurch definiert, daß man ein Gleichungssystem $\varphi_i\left(x_k^{(1)}; x_l^{(2)}\right) = 0$ betrachtet, wobei die $\varphi_i\left(x_k^{(1)}; x_l^{(2)}\right)$ Formen bedeuten, die in zwei Variablenreihen $x_0^{(1)}, \ldots, x_{s_1}^{(1)}$; $x_0^{(2)}, \ldots, x_{s_2}^{(2)}$ einzeln homogen sind. Ein solches Gleichungssystem ist aber invariant gegenüber allen linearen homogenen Transformationen $y_k^{(1)} = \sum_{\varrho=0}^{s_1} a_{k\varrho}^{(1)} x_\varrho^{(1)}$, $y_l^{(2)} = \sum_{\sigma=0}^{s_2} a_{l\sigma}^{(2)} x_\sigma^{(2)}$ $\left(k = 0, \ldots, s_1;\ l = 0, \ldots, s_2;\ \left|a_{k\varrho}^{(1)}\right| \cdot \left|a_{l\sigma}^{(2)}\right| \neq 0\right)$, also allen solchen Transformationen, die bei Enthomogenisierung die Gestalt (5) mit $r = 2$ annehmen. — Natürlich treten bei den algebraischen Korrespondenzen die Transformationen (5) mit $r = 2$ in einem ganz anderen Zusammenhang auf als bei uns die Transformationen (2) oder bei *Osgood* und *Jung* die (im Sinne des Textes zum „Abschließen") gebrauchten Transformationen (5) mit $r = n$. Aber das besagt natürlich nicht, daß es grundsätzlich zwecklos wäre zu versuchen, für *alle* Transformationen des Typus (5) im Sinne des Textes eine Anwendungsmöglichkeit zu suchen.

körpers K über $\mathfrak{K}_0$. Solange die Möglichkeit besteht, daß der Transzendenzgrad von B unendlich groß wird, hat seine Einführung verhältnismäßig wenig Sinn. Deshalb gingen wir auch bei den allgemeinen Betrachtungen von § 1 bis § 5 auf die Transzendenzgrade der auftretenden Bewertungen nicht weiter ein. Anders wird es aber, wenn wie in § 6 ein algebraischer Funktionenkörper $\mathfrak{L}$ von endlichem Transzendenzgrad $n > 1$ über seinem Grundkörper $\mathfrak{K}_0$ Gegenstand der Untersuchung ist[28]). Hier gilt zunächst der Satz, daß bei keiner zugelassenen Bewertung der Transzendenzgrad größer als $n - 1$ sein kann. Ferner weiß man, daß die Menge S_m^* aller Bewertungen, deren Transzendenzgrad einen festen Wert $m < n - 1$ besitzt, sehr schwer zu übersehen ist, und daß insbesondere in S_m^* stets auch nichtdiskrete Bewertungen auftreten. Schließlich erhält man für das System S_{n-1}^* der Bewertungen des Transzendenzgrades $n - 1$ den einfachen und voll befriedigenden Satz:

Alle Bewertungen des Grades $n - 1$ sind diskret. Die Systeme S^+ von § 6 bestehen ausschließlich aus Bewertungen des Transzendenzgrades $n - 1$. Umgekehrt tritt jede Bewertung des Transzendenzgrades $n - 1$ in unendlich vielen Systemen S^+ auf[29]).

Unter diesen Umständen erscheint es naturgemäß, bei der Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionenkörper von endlichem Transzendenzgrad dem betrachteten Bewertungssystem von vornherein neben der Endlichkeits-, der Unabhängigkeits-, der Geschlossenheits- und der Vollständigkeitsbedingung noch die folgende aufzuerlegen:

Transzendenzgradbedingung. *Alle Bewertungen des Systems haben den höchstmöglichen Transzendenzgrad.*

Damit ist dann nach den angegebenen Sätzen ausdrücklich die Diskretheit aller auftretenden Bewertungen gesichert, und es ist gleichzeitig durch Einführung einer die Restklassenkörper der Bewertungen betreffenden Forderung formal ein engerer Anschluß an den Hasseschen axiomatischen Aufbau der Theorie der algebraischen Funktionenkörper einer Variablen mit endlichem Konstantenkörper gewonnen[30]).

---

[28]) Den Fall $n = 1$, in dem ausschließlich Bewertungen des Transzendenzgrades 0 existieren, schließen wir als trivial von der Betrachtung aus.

[29]) Die angeführten Sätze folgen leicht aus § 6 meiner Arbeit über Allgemeine Bewertungstheorie (J. f. Math. **167** (1931), S. 160–196).

[30]) Vgl. [2]), insbesondere den dortigen Hinweis auf das Fehlen eines Gegenstücks zur *Hasse*schen Bedingung II in unserem allgemeinen Aufbau.

Eingegangen 24. April 1951.

Zur Erweiterungstheorie der endlichen Gruppen.

Von *Wolfgang Gaschütz* in Kiel [1]).

Das Problem, solche Erweiterungsgruppen $\mathfrak{G}$ über einer Gruppe $\mathfrak{A}$ zu charakterisieren, bei denen für die Restklassen von $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ ein Repräsentantensystem in $\mathfrak{G}$ existiert, das Gruppeneigenschaften hat, ist wegen seiner Bedeutung für die Erweiterungstheorie der Gruppen von Interesse. Man sagt dann, die Erweiterung $\mathfrak{G}$ *zerfällt* über $\mathfrak{A}$. Die Besonderheit dieser Tatsache liegt darin, daß bei einem Zerfall der Erweiterungstyp von $\mathfrak{G}$ durch $\mathfrak{A}$ und den Typ $\mathfrak{g}$ von $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ vollständig bestimmt ist, wenn noch eine homomorphe Abbildung Γ von $\mathfrak{g}$ auf eine Untergruppe der Automorphismengruppe von $\mathfrak{A}$ gegeben ist, die durch die Transformationen von $\mathfrak{A}$ mit den Repräsentanten induziert werden soll. Ein Kriterium hierfür hat man in dem bekannten Satz von I. Schur bei endlichen Gruppen: Eine Erweiterung zerfällt, wenn $(\mathfrak{g}:1, \mathfrak{A}:1) = 1$ und $\mathfrak{A}$ abelsch ist. H. Zassenhaus [2]) hat darüber hinaus bewiesen, daß die zweite Forderung überflüssig ist. Weitere interessante Kriterien hat H. Bergström [3]) angegeben, indem er zeigte, daß die Existenz gewisser zyklischer Normalteiler in $\mathfrak{g}$ für den Zerfall von $\mathfrak{G}$ über abelschem $\mathfrak{A}$ hinreicht.

In der vorliegenden Arbeit werden ebenfalls Erweiterungen über abelschen Gruppen — sog. *abelsche Erweiterungen* — endlicher Ordnung betrachtet und für solche einige weitere Zerfallskriterien hergeleitet. Dabei, sowie auch aus einem sogleich anzugebenden Grunde, erweist es sich als zweckmäßig, von vornherein den Begriff der zerfallenden Erweiterung in einer Weise zu verallgemeinern, auf die Ph. Hall [4]) hingewiesen hat. Wir sagen, $\mathfrak{G}$ *zerspaltet* über $\mathfrak{A}$, wenn eine Untergruppe $\overline{\mathfrak{G}} < \mathfrak{G}$ so existiert, daß $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\overline{\mathfrak{G}}$ und $\mathfrak{A} \cap \overline{\mathfrak{G}} < \mathfrak{A}$ ist. Hall hat nämlich gezeigt, wie auch bei einer Zerspaltung das für die Erweiterungstheorie wichtige aber schwierige Problem der Bestimmung geeigneter Faktorensysteme umgangen werden kann; dazu muß man alle Gruppen kennen, die einen Normalteiler von kleinerer Ordnung als $\mathfrak{A}:1$ enthalten, dessen Faktorgruppe zu $\mathfrak{g}$ isomorph ist. Das Zerspalten einer Erweiterung würde also bei der Konstruktion derjenigen Klassen von Gruppen von Bedeutung sein, für die man ein nach der Ordnung von $\mathfrak{A}$ rekursives Verfahren bei ihrer Konstruktion zur Anwendung bringen kann. Ein Beispiel dieser Art gibt Hall durch seine Konstruktion der auflösbaren Gruppen.

Bei den Beweisen der hier herzuleitenden Sätze werden einige Eigenschaften der Faktorensysteme verwendet. Daher gibt zunächst ein einleitender Abschnitt über diese einen kurzen Überblick und stellt die Verbindung zum Begriff zerfallende bzw. zerspaltende Erweiterung her. Ein 1. Reduktionssatz zeigt dann, wie man sich bei der zu behandelnden

---

[1]) Herrn *H. Hasse* danke ich für eine Reihe wertvoller Verbesserungsvorschläge.

[2]) *H. Zassenhaus*, Lehrbuch der Gruppentheorie **1**, Kap. III, § 6; Leipzig und Berlin 1937.

[3]) *H. Bergström*, Über abelsche Erweiterungen mit zerfallenden Faktorensystemen, Math. Nachr. **1** (1948), Satz 1 und 2.

[4]) *Ph. Hall*, The construction of soluble groups, Journal f. d. reine u. angewandte Math. **182** (1940).

Aufgabe auf Erweiterungen abelscher p-Gruppen $\mathfrak{A}$ beschränken kann. — Das weitere Bestreben ist es, auch hinsichtlich $\mathfrak{g}$ zu einer Reduktion zu gelangen. Dazu liefert die Methode der „Schwerpunktbildung", die auch schon beim Beweis des Satzes von Schur Verwendung findet, ein Verfahren. Dieses gestattet, zu jedem Faktorensystem $C_{\mathfrak{U}/\mathfrak{A}}$ einer Teilerweiterung $\mathfrak{U}$ ($\mathfrak{A} \leq \mathfrak{U} \leq \mathfrak{G}$) mit $(\mathfrak{G} : \mathfrak{U}, \mathfrak{A} : 1) = 1$, ein sog. *reduziertes Faktorensystem* für $\mathfrak{G}$ über $\mathfrak{A}$ zu konstruieren, das schon durch $C_{\mathfrak{U}/\mathfrak{A}}$ vollständig bestimmt ist. Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß man sich wegen des 1. Reduktionssatzes auf p-Gruppen $\mathfrak{A}$ beschränken kann, ergibt sich hieraus, daß die Art, wie eine Erweiterung über einer abelschen p-Gruppe zerspaltet, schon dadurch festgelegt ist, wie die p-Sylowgruppen von $\mathfrak{G}$ über dieser zerspalten. Dieser Sachverhalt findet in einem 2. Reduktionssatz seine genaue Formulierung. Insbesondere ergeben die Reduktionssätze, daß eine Erweiterung über einer abelschen Gruppe $\mathfrak{A}$ dann und nur dann zerfällt, wenn alle Sylowgruppen von $\mathfrak{G}$ über den Sylowgruppen von $\mathfrak{A}$ zerfallen. Sie umfassen den Satz von Schur in seiner ursprünglichen Form. Ihre Verallgemeinerung auf nichtabelsche Erweiterungen ist mir bisher nicht gelungen.

Die beiden Reduktionssätze legen es nahe, die Zerspaltung der Erweiterungen über p-Gruppen mit p-Faktorgruppen zu studieren. Aber es erscheint wegen deren großen Mannigfaltigkeit nicht einfach, bei diesen Zerspaltungs- und insbesondere Zerfallskriterien anzugeben. Immerhin gibt es auch Beispiele für eine so unmittelbare Verwendung der Reduktionssätze, wie Satz 5 zeigen wird.

Einfacher scheint es dagegen zu sein, wenn man den Einfluß der Einbettung der Sylowgruppen in $\mathfrak{G}$ auf deren Zerspalten untersucht. Es gelingt in diesem Sinne, ein Kriterium abzuleiten: Enthält $\mathfrak{g}$ einen Normalteiler $\mathfrak{k}$ mit $(\mathfrak{k} : 1, \mathfrak{A} : 1) = 1$, so existiert in $\mathfrak{G}$ eine Untergruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ derart, daß $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\overline{\mathfrak{G}}$ ist und $\mathfrak{A} \frown \overline{\mathfrak{G}}$ unter den durch $\mathfrak{k}$ in $\mathfrak{A}$ induzierten Automorphismen invariant bleibt (Satz 2). Dieses Kriterium hat gegenüber den Reduktionssätzen den Vorteil, daß es sich nur auf Eigenschaften von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{g}$ und Γ, d. h. auf die Stücke, die in der Erweiterungstheorie i. a. als gegeben angesehen werden, stützt. Es ist aber nicht zu erwarten, daß sich wie bei den Reduktionssätzen ein notwendiges und hinreichendes Zerfallskriterium finden läßt, welches sich auf Eigenschaften von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{g}$ und Γ beschränkt. Das zeigt das einfache Beispiel der Erweiterungen über Gruppen von Primzahlordnung p mit einer Faktorgruppe der gleichen Ordnung. Γ ist dann notwendig die Abbildung auf den identischen Automorphismus, und man hat die nichtzerspaltenden zyklischen Gruppen (p^2) und die zerfallenden abelschen Gruppen vom Typ (p, p) als Erweiterungen.

Im Rest der Arbeit sollen mit Hilfe der abgeleiteten Kriterien Beispiele für zerfallende Erweiterungen angegeben werden. Zunächst wird mit Satz 2 eine Verallgemeinerung der oben erwähnten Sätze von Bergström vorgenommen und bewiesen, daß eine abelsche Erweiterung zerfällt, wenn $\mathfrak{g}$ einen nilpotenten Normalteiler enthält, der kein Element $\neq 1$ von $\mathfrak{A}$ invariant läßt (Satz 3). Dann wird unter Verwendung eines Satzes von O. Grün gezeigt, daß zentrale Erweiterungen (d. h. solche, bei denen $\Gamma(\mathfrak{g}) = 1$ ist) über abelschen p-Gruppen zerfallen, wenn $\mathfrak{g}$ p-perfekt [5]) ist und die p-Sylowgruppen von $\mathfrak{g}$ zyklisch sind (Satz 4); ein Satz, den I. Schur [6]) im Zusammenhang mit den projektiven Darstellungen endlicher Gruppen gewonnen hat. Desgleichen zerfällt eine Erweiterung über einer zyklischen p-Gruppe, wenn eine p-Sylowgruppe von $\mathfrak{g}$ durch Γ isomorph ab-

---

[5]) maximale p-Faktorgruppe $\simeq 1$; also z. B. einfach, von zusammengesetzter Ordnung. Eine Gruppe ist perfekt (gleich ihrer Kommutatorgruppe), wenn sie p-perfekt für jedes p ist.

[6]) *I. Schur*, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, Journal f. d. reine u. angewandte Math. **127** (1904).

gebildet wird (Satz 5). Auf Grund des 1. Reduktionssatzes lassen sich Satz 4 und 5 zu Sätzen über Erweiterungen beliebiger abelscher Gruppen komponieren. Von Ö. Ore [7]) ist bewiesen worden, daß eine Gruppe $\mathfrak{G}$ mit genau einem kleinsten abelschen Normalteiler über diesem zerfällt, wenn $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ einen abelschen Normalteiler mit zu $\mathfrak{A}:1$ primer Ordnung enthält. Das läßt sich auch in einfacher Weise aus Satz 2 folgern (Satz 6).

Bekanntlich [8]) wird eine Gruppe $\mathfrak{G}$ durch einen beliebigen ihrer Normalteiler $\mathfrak{N}$ und den Normalisator in $\mathfrak{G}$ einer Sylowgruppe von $\mathfrak{N}$ erzeugt. Diese Tatsache gestattet manchmal, die abgeleiteten Kriterien auch auf nichtabelsche Erweiterungen anzuwenden. Mit Hilfe des schon oben verwendeten Satzes von Grün ergibt sich, daß eine Erweiterung über einer p-perfekten [5]) Gruppe $\mathfrak{N}$ mit einer p-Gruppe zerfällt, wenn die p-Sylowgruppen von $\mathfrak{N}$ abelsch sind (Satz 7). Schließlich folgt aus den Reduktionssätzen, daß eine Gruppe, deren Sylowgruppen alle elementar-abelsch [9]) sind, über jedem Normalteiler zerfällt (Satz 8). Diese Beispiele sollen nur die Brauchbarkeit der Kriterien erhärten und nicht ihre Verwendungsmöglichkeiten ausschöpfen.

Wenn im folgenden von Gruppen die Rede ist, so sind stets solche von endlicher Ordnung gemeint. Die Bezeichnungsweise hält sich an die des Lehrbuches von H. Zassenhaus [2]).

1. Wir betrachten eine Gruppe $\mathfrak{G}$, *die Erweiterung über der abelschen Gruppe* $\mathfrak{A}$ [10]) mit $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ ist. Durch die Transformationen von $\mathfrak{A}$ mit Elementen aus $\mathfrak{G}$ (Reziprokes hinten), wird eine homomorphe Abbildung Γ von $\mathfrak{g}$ auf eine Untergruppe $\Gamma(\mathfrak{g})$ der Automorphismengruppe von $\mathfrak{A}$ induziert. Die Elemente von $\mathfrak{g}$ seien $1, g, h, i, \ldots$. Ferner sei $\{R_g\}$ ein *Repräsentantensystem* in $\mathfrak{G}$ für die Restklassen von $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$; darunter verstehen wir im folgenden stets ein solches, bei dem $R_1 = 1$ ist. Ihm ist vermittels

$$R_g R_h = C_{g,h} R_{gh} \tag{1.1}$$

ein *Faktorensystem* $\{C_{g,h}\} = C_{\mathfrak{G}/\mathfrak{A}}$ von $(\mathfrak{g}:1)^2$ Elementen $C_{g,h}$ aus $\mathfrak{A}$ zugeordnet, die wegen der Assoziativität der Gruppenverknüpfung den wichtigen *Assoziativrelationen*

$$C_{g,h} C_{gh,i} = C_{h,i}^{g} C_{g,hi} \text{ [11])} \tag{1.2}$$

genügen. Geht man von den Repräsentanten R_g zu Repräsentanten $R_g^* = a_g R_g$, $a_g \in \mathfrak{A}$ über, so gehören zu $\{R_g^*\}$ die Faktoren

$$C_{g,h}^* = a_g a_h^g a_{gh}^{-1} C_{g,h}. \tag{1.3}$$

Umgekehrt ist jedes System von Elementen $C_{g,h}^*$, das gemäß (1.3) mit Elementen $a_g \in \mathfrak{A}$ aus dem Faktorensystem $\{C_{g,h}\}$ hervorgeht, ein Faktorensystem, welches zu den Repräsentanten $a_g R_g$ gehört.

Durch die Repräsentanten R_g wird in $\mathfrak{G}$ eine Untergruppe $\mathfrak{R}$ erzeugt. Die Faktoren $C_{g,h}$ erzeugen eine Untergruppe $\mathfrak{C}$. Offenbar ist

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{R}$$

und $\mathfrak{C} \leqq \mathfrak{A} \cap \mathfrak{R}$. Es ist aber sogar

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{R}.$$

---

[7]) *Ö. Ore*, Contributions to the theory of groups of finite order, Duke Math. Journal **5** (1939), Theorem 7.

[8]) Für einen Beweis vergleiche man etwa *Ö. Ore*, l. c.[7]), oder *H. Zassenhaus*, l. c.[2]), S. 115, Aufgabe 7.

[9]) direktes Produkt von Gruppen mit Primzahlordnung.

[10]) Im folgenden sind, wenn nichts anderes bemerkt ist, stets Erweiterungen über der mit $\mathfrak{A}$ bezeichneten Gruppe gemeint. Entsprechend sind die Begriffe Repräsentantensystem, Faktorensystem usw. bezügl. $\mathfrak{A}$ zu verstehen. Der Zusatz „über $\mathfrak{A}$" wird daher häufig fortgelassen.

[11]) Ein hochgestellter Index, z. B. A^g, bezeichnet den Automorphismus $\Gamma(g)$ von $\mathfrak{A}$ angewandt auf A.

Denn ein Produkt $\prod_{\nu=1}^{s} R_{g_\nu}$ von Elementen aus $\mathfrak{R}$ liegt dann und nur dann in $\mathfrak{A}$, wenn $\prod_{\nu=1}^{s} g_\nu = 1$ ist; daher ist

$$\prod_{\nu=1}^{s} R_{g_\nu} = C_{g_1, g_2} C_{g_1 g_2, g_3} \cdots C_{g_1 \ldots g_{s-1}, g_s} R_1,$$

und da $R_1 = 1$ ist, folgt

$$\prod_{\nu=1}^{s} R_{g_\nu} \in \mathfrak{C}.$$

Wenn andererseits $\overline{\mathfrak{G}}$ eine Gruppe mit der Eigenschaft $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\overline{\mathfrak{G}}$ ist, so ist jedes Repräsentantensystem für $\overline{\mathfrak{G}}/\mathfrak{A} \cap \overline{\mathfrak{G}}$ in $\mathfrak{G}$ auch ein solches für $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$, und für die von dem zugeordneten Faktorensystem erzeugte Untergruppe $\mathfrak{C}$ gilt $\mathfrak{C} \leqq \mathfrak{A} \cap \mathfrak{G}$.

Existiert nun in $\mathfrak{G}$ eine Untergruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ derart, daß

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\overline{\mathfrak{G}}$$

und

$$\mathfrak{A} \cap \overline{\mathfrak{G}} < \mathfrak{A} \tag{1.4}$$

bzw.

$$\mathfrak{A} \cap \overline{\mathfrak{G}} = 1 \tag{1.5}$$

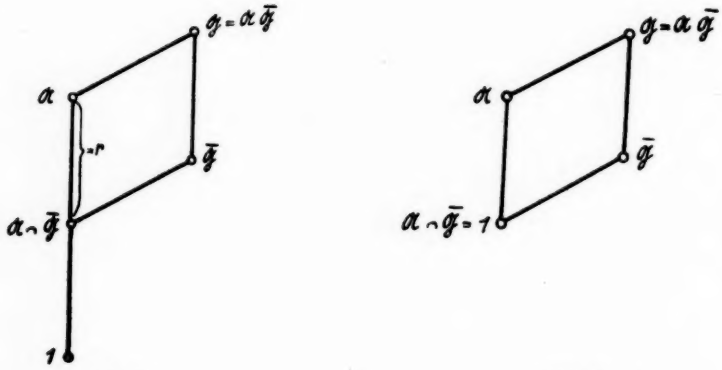

Abb. 1a. Abb. 1b.

ist, so wollen wir sagen $\mathfrak{G}$ *zerspaltet* (Abb. 1a) bzw. *zerfällt* (Abb. 1b) *über* $\mathfrak{A}$ *durch* $\overline{\mathfrak{G}}$. Ist es nicht nötig, $\overline{\mathfrak{G}}$ hierbei explizit zu nennen, so lassen wir im folgenden den Zusatz „*durch* $\overline{\mathfrak{G}}$" fort. Für $\mathfrak{A} \neq 1$ ist eine Zerfällung auch eine Zerspaltung. Nach dem vorher Bemerkten folgt aus (1.4) bzw. (1.5) die Existenz eines Faktorensystems $\{C_{g,h}\}$, für dessen Erzeugnis $\mathfrak{C}$

$$\mathfrak{C} < \mathfrak{A} \tag{1.4'}$$

bzw.

$$\mathfrak{C} = 1 \tag{1.5'}$$

gilt. Umgekehrt folgt aus (1.4′) bzw. (1.5′) mit dem Erzeugnis $\mathfrak{R}$ eines zu $\{C_{g,h}\}$ gehörigen Repräsentantensystems, wenn $\mathfrak{R} = \overline{\mathfrak{G}}$ gesetzt wird, $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\overline{\mathfrak{G}}$ und $\mathfrak{A} \cap \overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{C} < \mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{A} \cap \overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{C} = 1$, also (1.4) bzw. (1.5).

Ist A eine Gruppe von Automorphismen von $\mathfrak{A}$, so definieren wir ferner: Eine Zerspaltung $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\overline{\mathfrak{G}}$ heiße *A-invariant*, wenn über $\mathfrak{A} \cap \overline{\mathfrak{G}} < \mathfrak{A}$ hinaus sogar

$$N_A(\mathfrak{A} \cap \overline{\mathfrak{G}}) < \mathfrak{A}^{12)} \tag{1.6}$$

[12]) $N_A(\mathfrak{R})$ Erzeugnis der unter den Automorphismen von A zu $\mathfrak{R}$ konjugierten Untergruppen (Norm).

gilt. Offenbar ist eine Zerspaltung im gewöhnlichen Sinn stets 1-invariant ($1 =$ identischer Automorphismus von $\mathfrak{A}$) und, da $\mathfrak{A} \cap \overline{\mathfrak{G}}$ unter $\Gamma(\mathfrak{g})$ invariant bleibt, sogar $\Gamma(\mathfrak{g})$-invariant. Ein Zerfall ist für $\mathfrak{A} \neq 1$ und beliebiges A eine A-invariante Zerspaltung. Wie bei gewöhnlicher Zerspaltung (1.4) mit (1.4′), so erweist sich bei A-invarianter Zerspaltung (1.6) mit der Existenz eines Faktorensystems, für dessen Erzeugnis $\mathfrak{C}$

$$N_A(\mathfrak{C}) < \mathfrak{A} \tag{1.6'}$$

gilt, als gleichbedeutend.

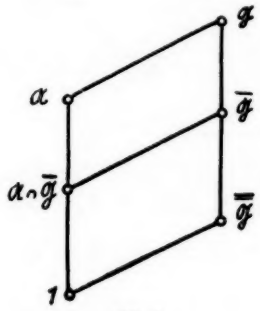

Abb. 2.

Der folgende einfache Hilfssatz, dessen Gültigkeit aus obenstehender Abb. 2 unmittelbar einsichtig ist, wird in Nr. 5 Verwendung finden, um durch vollständige Induktion nach der Ordnung von $\mathfrak{A}$ aus der Zerspaltung einer Erweiterung auf ihren Zerfall zu schließen:

Hilfssatz 1. *Zerspaltet $\mathfrak{G}$ über $\mathfrak{A}$ durch $\overline{\mathfrak{G}}$ und zerfällt $\overline{\mathfrak{G}}$ über $\mathfrak{A} \cap \overline{\mathfrak{G}}$ durch $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$, so zerfällt $\mathfrak{G}$ über $\mathfrak{A}$ durch $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$.*

2. Wir wollen nach Kriterien fragen, die es gestatten, auf das Zerspalten bzw. Zerfallen einer abelschen Erweiterung zu schließen. Nach (1.3) kann man dabei so vorgehen, daß man zu den Elementen $C_{g,h}$ eines beliebigen Faktorensystems Elemente $a_g \in \mathfrak{A}$ so nachweist, daß für die von den Faktoren

$$C^*_{g,h} = a_g a_h^g a_{gh}^{-1} C_{g,h}$$

erzeugte Untergruppe $\mathfrak{C}^*$ die Bedingung (1.4′) bzw. (1.5′) erfüllt ist.

$\mathfrak{A}$ ist als abelsche Gruppe direktes Produkt seiner Sylowgruppen:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{p_1} \times \cdots \times \mathfrak{A}_{p_r}.$$

Dementsprechend haben wir die Zerlegungen

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_{p_1} \times \cdots \times \mathfrak{C}_{p_r},$$
$$A = A^{(1)} \cdots A^{(r)},\ A \in \mathfrak{A}.$$

$\mathfrak{A}_{p_\nu}$ ist charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{A}$, also Normalteiler von $\mathfrak{G}$, und es wird daher durch die Transformationen mit Elementen aus $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{A}_{p_\nu}$ eine Gruppe von Automorphismen induziert. Daher zerfallen die Gleichungen (1.3) aus $\mathfrak{A}$ in die Komponentengleichungen

$$C^{*(\nu)}_{g,h} = a_g^{(\nu)} a_h^{(\nu)g} a_{gh}^{(\nu)-1} C^{(\nu)}_{g,h} \qquad (\nu = 1, \ldots, r)$$

aus den $\mathfrak{A}_{p_\nu}$. Setzen wir $\mathfrak{A}'_{p_\nu} = \mathfrak{A}_{p_1} \times \cdots \times \mathfrak{A}_{p_{\nu-1}} \times \mathfrak{A}_{p_{\nu+1}} \times \cdots \times \mathfrak{A}_{p_r}$, so haben diese Gleichungen für $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}'_{p_\nu}/\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'_{p_\nu}$ (also für $\mathfrak{G}$ über $\mathfrak{A}$ nur mod. $\mathfrak{A}'_{p_\nu}$ betrachtet) die analoge

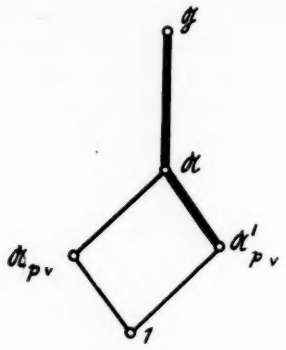

Abb. 3.

Bedeutung wie (1.3) für $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ (Abb. 3). Statt der Erweiterung $\mathfrak{G}$ untersuchen wir daher einzeln die Erweiterungen $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}'_{p_\nu}$ über $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'_{p_\nu}$. Den Faktorensystemen

$$\{C^{(\nu)}_{g,h}\mathfrak{A}'_{p_\nu}\} \qquad (\nu = 1, \ldots, r)$$

für die Erweiterungen $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}'_{p_\nu}$ über $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'_{p_\nu}$ entspricht eindeutig ein Faktorensystem

$$\{C_{g,h}\} = \{C^{(1)}_{g,h} \cdots C^{(r)}_{g,h}\}$$

für die Erweiterung $\mathfrak{G}$ über $\mathfrak{A}$ und umgekehrt, und man hat daher offenbar den folgenden einfachen Sachverhalt:

1. Reduktionssatz. *$\mathfrak{G}$ zerspaltet dann und nur dann über der abelschen Gruppe $\mathfrak{A}$, wenn ein ν so existiert, daß $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}'_{p_\nu}$ über der abelschen p-Gruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'_{p_\nu}$ zerspaltet. Dann und nur dann zerfällt $\mathfrak{G}$ über $\mathfrak{A}$, wenn $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}'_{p_\nu}$ für jedes ν über $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'_{p_\nu}$ zerfällt.*

Dadurch ist die Frage nach zerspaltenden bzw. zerfallenden abelschen Erweiterungen auf solche über abelschen p-Gruppen zurückgeführt.

3. Um zu einer Reduktion bezüglich $\mathfrak{g}$ zu gelangen, betrachten wir eine *Teilerweiterung* $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$, d. h. eine Untergruppe, die $\mathfrak{A}$ enthält. $\mathfrak{U}$ entspricht in $\mathfrak{g}$ eine Untergruppe $\mathfrak{u}$ mit den Elementen $1, u, v, \ldots$. Es sei $\{r\}$ ein Repräsentantensystem für die Rechtsrestklassen von $\mathfrak{g}$ nach $\mathfrak{u}$ mit Elementen r derart, daß 1 der Repräsentant von $\mathfrak{u}$ ist. Dementsprechend seien für die Elemente $g = ru$ von $\mathfrak{g}$ gemäß

$$\bar{g} = r, \; \underline{g} = u \tag{3.1}$$

eindeutig die Funktionen $\bar{g}, \underline{g}$ definiert.

$\{R_u\}$ sei ein Repräsentantensystem in $\mathfrak{G}$ für $\mathfrak{U}/\mathfrak{A}$ und $\{C_{u,v}\} = C_{\mathfrak{U}/\mathfrak{A}}$ das zugeordnete Faktorensystem für $\mathfrak{U}$ über $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}}$ dessen Erzeugnis. Wir wollen $\{R_u\}$ nach der folgenden Vorschrift zu einem Repräsentantensystem für $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ verlängern:

Man wähle zu jedem $r \in \{r\}$ mit Ausnahme des Repräsentanten von $\mathfrak{u}$ aus der entsprechenden Restklasse von $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ ein beliebiges Element R_r in $\mathfrak{G}$. Dann sei $R^*_g = R_{\bar{g}} R_{\underline{g}}$ der Repräsentant für die g entsprechende Restklasse von $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$. Offenbar ist dann

$$R^*_u = R_{\bar{u}} R_{\underline{u}} = R_1 R_u = R_u$$

und

$$R^*_r = R_{\bar{r}} R_{\underline{r}} = R_r R_1 = R_r.$$

Deshalb können wir ohne Mißverständnis $R^*_g = R_g$ schreiben.

Wegen

$$R_g R_u R_{\underline{gu}}^{-1} = R_{\bar{g}} R_{\underline{g}} R_u (R_{\bar{g}} R_{\underline{gu}})^{-1}$$
$$= R_{\underline{g}} (R_{\underline{g}} R_u R_{\underline{gu}}^{-1}) R_{\bar{g}}^{-1}$$

gilt dann für das zu diesem Repräsentantensystem gehörige Faktorensystem

$$C_{g,u} = C_{\underline{g},u}^{\bar{g}}. \tag{3.2}$$

Ferner ist einerseits

$$R_g R_{\bar{h}} R_{\underline{h}} = C_{g,\bar{h}} C_{g\bar{h},\underline{h}} R_{gh},$$

andererseits

$$R_g R_{\bar{h}} R_{\underline{h}} = R_g R_h = C_{g,h} R_{gh},$$

also

$$C_{g,h} = C_{g,\bar{h}} C_{g\bar{h},\underline{h}}$$

und mit (3.2)

$$C_{g,h} = C_{g,\bar{h}} C_{\underline{g\bar{h}},\underline{h}}^{\overline{g\bar{h}}}.$$

Hiermit erhalten wir aus den Assoziativrelationen (1.2)

$$C_{g,h} = C_{g,\overline{hi}} C_{h,i}^{g} C_{gh,i}^{-1} C_{\underline{ghi},\underline{hi}}^{\overline{ghi}}.$$

Wir bilden jetzt

$$C_{g,h}^{[\mathfrak{G}:\mathfrak{U}]} = \prod_r \left(C_{g,\overline{hr}} C_{h,r}^{g} C_{gh,r}^{-1} C_{\underline{ghr},\underline{hr}}^{\overline{ghr}} \right), \tag{3.3}$$

wobei das Produkt auf der rechten Seite über alle Elemente aus $\{r\}$ erstreckt werden soll. Aus $\overline{hr_1} = \overline{hr_2}$ folgt $r_1 = r_2$; es durchläuft daher mit r auch $\overline{hr}$ alle Elemente aus $\{r\}$.

Wir wollen nun $(\mathfrak{G} : \mathfrak{U}, \mathfrak{A} : 1) = 1$ voraussetzen. Dann ist die Abbildung $A \to A^{[\mathfrak{G}:\mathfrak{U}]}$ ein mit allen Automorphismen vertauschbarer Automorphismus von $\mathfrak{A}$. Das gleiche gilt dann auch für die inverse Abbildung $A \to A^{[\mathfrak{G}:\mathfrak{U}]^{-1}}$. Aus (3.3) folgt daher

$$C_{g,h} = \left(\prod_r C_{g,r}\right)^{[\mathfrak{G}:\mathfrak{U}]^{-1}} \left(\left(\prod_r C_{h,r}\right)^{[\mathfrak{G}:\mathfrak{U}]^{-1}}\right)^{g} \left(\prod_r C_{gh,r}\right)^{-[\mathfrak{G}:\mathfrak{U}]^{-1}} \left(\prod_r C_{\underline{ghr},\underline{hr}}^{\overline{ghr}}\right)^{[\mathfrak{G}:\mathfrak{U}]^{-1}}$$
$$= a_g a_h^g a_{gh}^{-1} \left(\prod C_{\underline{ghr},\underline{hr}}^{\overline{ghr}}\right)^{[\mathfrak{G}:\mathfrak{U}]^{-1}},$$

falls $a_g = \left(\prod_r C_{g,r}\right)^{[\mathfrak{G}:\mathfrak{U}]^{-1}}$ gesetzt wird. Das bedeutet: Wählt man die Elemente $a_g R_g$ als Repräsentanten für $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$, so gehört zu diesen das Faktorensystem

$$\{\tilde{C}_{g,h}\} = \left\{ \left(\prod_r C_{\underline{ghr},\underline{hr}}^{\overline{ghr}} \right)^{[\mathfrak{G}:\mathfrak{U}]^{-1}} \right\}. \tag{3.4}$$

$\{\tilde{C}_{g,h}\}$ heiße *das zu* $\{C_{u,v}\}$ *und* $\{r\}$ *gehörige reduzierte Faktorensystem für* $\mathfrak{G}$. Diese Definition hat natürlich nur dann Sinn, wenn $(\mathfrak{G} : \mathfrak{U}, \mathfrak{A} : 1) = 1$ ist. Das Produkt auf der rechten Seite von (3.4) enthält nur Elemente aus $\mathfrak{C}_{\mathfrak{U}/\mathfrak{A}}$ und unter $\Gamma(\mathfrak{g})$ zu $\mathfrak{C}_{\mathfrak{U}/\mathfrak{A}}$ Konjugierten. Für das von den $\tilde{C}_{g,h}$ gebildete Erzeugnis $\tilde{\mathfrak{C}}_{\mathfrak{G}/\mathfrak{A}}$ ergibt sich daher

$$\tilde{\mathfrak{C}}_{\mathfrak{G}/\mathfrak{A}} \leqq N_{\Gamma(\mathfrak{g})}(\mathfrak{C}_{\mathfrak{U}/\mathfrak{A}}). \tag{3.5}$$

Das gestattet, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 1. *Es sei* $\mathfrak{U}$ *eine Teilerweiterung zwischen* $\mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{A}$ *und* $(\mathfrak{G} : \mathfrak{U}, \mathfrak{A} : 1) = 1$. *Dann und nur dann zerspaltet* $\mathfrak{G}$ *über* $\mathfrak{A}$, *wenn* $\mathfrak{U}$ *über* $\mathfrak{A}$ $\Gamma(\mathfrak{g})$*-invariant zerspaltet. Dann und nur dann zerfällt* $\mathfrak{G}$ *über* $\mathfrak{A}$, *wenn* $\mathfrak{U}$ *über* $\mathfrak{A}$ *zerfällt.*

Beweis. Zerspaltet $\mathfrak{U}$ über $\mathfrak{A}$ $\Gamma(\mathfrak{g})$-invariant bzw. zerfällt $\mathfrak{U}$ über $\mathfrak{A}$, so existiert nach (1.6′) bzw. (1.5′) ein Faktorensystem $\{C_{u,v}\}$ für $\mathfrak{U}$ mit dem Erzeugnis $\mathfrak{C}_{\mathfrak{U}/\mathfrak{A}}$ derart, daß

$$N_{\Gamma(\mathfrak{g})}(\mathfrak{C}_{\mathfrak{U}/\mathfrak{A}}) < \mathfrak{A}$$

bzw.

$$\mathfrak{C}_{\mathfrak{U}/\mathfrak{A}} = 1$$

ist. Für das Erzeugnis $\tilde{\mathfrak{C}}_{\mathfrak{G}/\mathfrak{A}}$ eines zu $\{C_{u,v}\}$ gehörigen reduzierten Faktorensystems für $\mathfrak{G}$ gilt dann (3.5) und daher

$$\tilde{\mathfrak{C}}_{\mathfrak{G}/\mathfrak{A}} < \mathfrak{A}$$

bzw.

$$\tilde{\mathfrak{C}}_{\mathfrak{G}/\mathfrak{A}} = 1,$$

d. h. $\mathfrak{G}$ zerspaltet bzw. zerfällt über $\mathfrak{A}$.

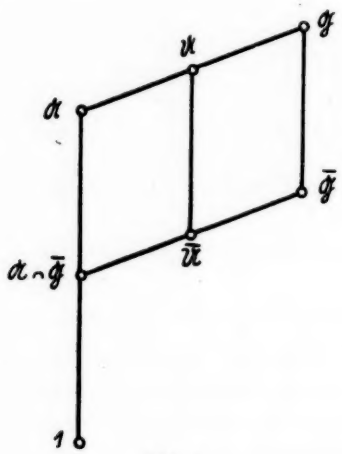

Abb. 4.

Für den Beweis der Umkehrung ist die Voraussetzung $(\mathfrak{G} : \mathfrak{U}, \mathfrak{A} : 1) = 1$ unnötig. Zerspaltet bzw. zerfällt $\mathfrak{G}$ nach (1.4) bzw. (1.5) und ist $\mathfrak{U}$ eine beliebige Teilerweiterung zwischen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{A}$, so entspricht ihr durch den Isomorphismus von $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ auf $\overline{\mathfrak{G}}/\mathfrak{A} \cap \overline{\mathfrak{G}}$ eine Untergruppe $\overline{\mathfrak{U}}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$ derart, daß $\mathfrak{U} = \mathfrak{A}\overline{\mathfrak{U}}$ ist (Abb. 4). Dann ist

$$\mathfrak{A} \cap \overline{\mathfrak{U}} = \mathfrak{A} \cap \overline{\mathfrak{G}} = N_{\Gamma(\mathfrak{g})}(\mathfrak{A} \cap \overline{\mathfrak{G}}) < \mathfrak{A} \text{ bzw. } = 1,$$

d. h. $\mathfrak{U}$ zerspaltet $\Gamma(\mathfrak{g})$-invariant bzw. zerfällt über $\mathfrak{A}$, wenn $\mathfrak{G}$ über $\mathfrak{A}$ zerspaltet bzw. zerfällt; w. z. b. w.

Beschränken wir uns auf Grund des 1. Reduktionssatzes darauf, daß $\mathfrak{A}$ p-Potenzordnung hat, so erfüllt offenbar eine p-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$ die über $\mathfrak{U}$ in Satz 1 gemachte Voraussetzung. Das ergibt den

2. Reduktionssatz. *$\mathfrak{G}$ zerspaltet dann und nur dann über der abelschen p-Gruppe $\mathfrak{A}$, wenn eine p-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$ über $\mathfrak{A}$ $\Gamma(\mathfrak{g})$-invariant zerspaltet. Dann und nur dann, wenn eine p-Sylowgruppe über $\mathfrak{A}$ zerfällt, zerfällt $\mathfrak{G}$ über $\mathfrak{A}$.*

Satz 1 enthält für den Fall, daß $(\mathfrak{G} : \mathfrak{A}, \mathfrak{A} : 1) = 1$ ist und $\mathfrak{U} = \mathfrak{A}$ gesetzt wird, den Satz von Schur; denn $\mathfrak{A}$ zerfällt trivialerweise über $\mathfrak{A}$. Ohne Beweis sei noch bemerkt, daß sich in Verallgemeinerung zu einem *Ergänzungssatz zum Satz von Schur*[13]) bei Zerfall mit beliebigem $(\mathfrak{G} : \mathfrak{A}, \mathfrak{A} : 1)$ (nicht notwendig $= 1$) zeigen läßt, daß alle Repräsentanten-

[13]) Siehe *H. Zassenhaus*, l. c.[2]), S. 126, Satz 27.

gruppen $\overline{\mathfrak{G}}$ für $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$, die eine feste Repräsentantengruppe $\overline{\mathfrak{U}}$ für die Faktorgruppe einer Teilerweiterung $\mathfrak{U}$ mit $(\mathfrak{G}:\mathfrak{U},\mathfrak{A}:1)=1$ enthalten, unter $\mathfrak{G}$ konjugiert sind.

4. Die explizite Form (3.4) des reduzierten Faktorensystems gestattet, noch ein anderes Zerfallskriterium herzuleiten. Wir beweisen

Satz 2. *Es sei $\mathfrak{k}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{g}$ mit $(\mathfrak{k}:1,\mathfrak{A}:1)=1$. Ferner lasse $\Gamma(\mathfrak{k})$ nicht alle Elemente aus $\mathfrak{A}$ invariant. Dann zerspaltet $\mathfrak{G}$ über $\mathfrak{A}$, und zwar existiert genauer eine Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ mit $\mathfrak{G}=\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{G}}$ derart, daß $\mathfrak{A}\cap\overline{\mathfrak{G}}$ in der Untergruppe $\mathfrak{A}_{\mathfrak{k}}$ der Elemente von $\mathfrak{A}$ liegt, die unter den Automorphismen $\Gamma(\mathfrak{k})$ invariant bleiben. $\mathfrak{G}$ zerfällt dann also vollständig über $\mathfrak{A}$, wenn unter $\Gamma(\mathfrak{k})$ kein Element $\neq 1$ von $\mathfrak{A}$ invariant bleibt.*

Beweis. Die Behauptung des Satzes ist nach Nr. 1 gleichbedeutend mit der Existenz eines Faktorensystems $\{C_{g,h}\}$, welches unter $\Gamma(\mathfrak{k})$ elementweise invariant bleibt. Wir betrachten in der Bezeichnungsweise von Nr. 2 die Erweiterungen $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}'_{p_\nu}$ über $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'_{p_\nu}$. Diese sind Erweiterungen mit $\mathfrak{g}$, und es ist erst recht $(\mathfrak{k}:1,\mathfrak{A}:\mathfrak{A}'_{p_\nu})=1$. Nun sei Γ_ν der durch Γ induzierte Homomorphismus von $\mathfrak{g}$ in die Automorphismengruppe von $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'_{p_\nu}$. Bleiben dann die Faktorensysteme

$$\{C^{(\nu)}_{g,h}\mathfrak{A}'_{p_\nu}\} \qquad (\nu=1,\ldots,r)$$

unter den entsprechenden $\Gamma_\nu(\mathfrak{k})$ elementweise invariant, so ist, wie man leicht nachrechnet,

$$C_{g,h}=C^{(1)}_{g,h}\cdots C^{(r)}_{g,h}$$

ein Faktorensystem für $\mathfrak{G}$ über $\mathfrak{A}$, welches unter $\Gamma(\mathfrak{k})$ elementweise invariant bleibt. Daher können wir uns darauf beschränken, daß $\mathfrak{A}$ p-Potenzordnung hat.

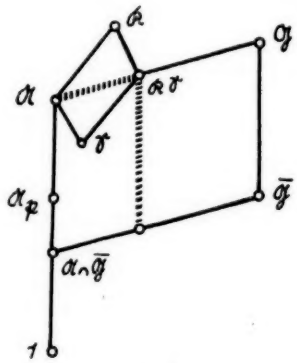

Abb. 5.

Wir betrachten nun mit einer beliebigen p-Sylowgruppe $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}$ die Teilerweiterung $\mathfrak{K}\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}$ (Abb. 5), wo $\mathfrak{K}$ der $\mathfrak{k}$ zugeordnete Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist. Gibt es dann für $\mathfrak{K}\mathfrak{S}$ über $\mathfrak{A}$ ein Faktorensystem, dessen Erzeugnis $\mathfrak{C}_{\mathfrak{K}\mathfrak{S}/\mathfrak{A}}\leqq\mathfrak{A}_{\mathfrak{k}}$ ist, so gilt, da $(\mathfrak{G}:\mathfrak{K}\mathfrak{S},\mathfrak{A}:1)=1$ ist, für das Erzeugnis eines zugehörigen reduzierten Faktorensystems nach (3.5)

$$\tilde{\mathfrak{C}}_{\mathfrak{G}/\mathfrak{A}}\leqq N_{\Gamma(\mathfrak{g})}(\mathfrak{C}_{\mathfrak{K}\mathfrak{S}/\mathfrak{A}})\leqq N_{\Gamma(\mathfrak{g})}(\mathfrak{A}_{\mathfrak{k}}).$$

Da $\mathfrak{A}_{\mathfrak{k}}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist, folgt daraus

$$\tilde{\mathfrak{C}}_{\mathfrak{G}/\mathfrak{A}}\leqq\mathfrak{A}_{\mathfrak{k}}.$$

Dementsprechend genügt es, den Satz für den Fall $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\mathfrak{s}$ zu beweisen, wobei $\mathfrak{s}$ eine p-Sylowgruppe von $\mathfrak{g}$ ist.

Dazu bestimmen wir, ausgehend von einem beliebigen Faktorensystem $C_{\mathfrak{S}/\mathfrak{A}}$ für $\mathfrak{S}$ ein reduziertes Faktorensystem für $\mathfrak{G}=\mathfrak{K}\mathfrak{S}$. Als Rechtsrepräsentantensystem $\{r\}$ können

wir wegen $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{k} = 1$ die Elemente von $\mathfrak{k}$ wählen. Für die zugehörigen Funktionen (3.1) gilt dann zunächst

$$\underline{gh} = \underline{g}\,\underline{h};$$

denn mit $g = r_1 u$, $h = r_2 v$ erhält man, weil $\{r\} = \mathfrak{k}$ Normalteiler von $\mathfrak{g}$ ist,

$$\underline{gh} = \underline{r_1 u r_2 v} = uv = \underline{g}\,\underline{h}.$$

Hieraus folgt

$$\underline{g\overline{hr}} = \underline{g}\,(\underline{\overline{hr}}) = \underline{g},$$
$$\underline{\overline{hr}} = \underline{h}\,\underline{r} = \underline{h}.$$

Ferner ist

$$\overline{g\overline{hr}} = \overline{r_1 u\, \overline{r_2\, vr}} = r_1\, r_2^u r^{uv} = \overline{g}\,\overline{h}^g\, r^{\underline{gh}}.$$

Da mit r auch $\overline{g}\,\overline{h}^g r^{\underline{gh}}$ alle Elemente aus $\mathfrak{k}$ durchläuft, ergibt sich für das zu $C_{\mathfrak{S}/\mathfrak{A}}$ und $\{r\}$ gehörige reduzierte Faktorensystem (3.4)

$$\{\tilde{C}_{g,h}\} = \left\{\left(\prod_r C^r_{\underline{g},\underline{h}}\right)^{[\mathfrak{G}:\mathfrak{S}]^{-1}}\right\} = \left\{\left(C^{\Sigma r}_{\underline{g},\underline{h}}\right)^{[\mathfrak{G}:\mathfrak{S}]^{-1}}\right\}.$$

Hierbei wird das Produkt über alle Elemente $r \in \mathfrak{k}$ erstreckt.

Da ferner $r^* \Sigma r = \Sigma r$ für ein beliebiges $r^* \in \mathfrak{k}$ gilt, haben die Faktoren

$$\tilde{C}_{g,h} = (C^{\Sigma r}_{\underline{g},\underline{h}})^{[\mathfrak{G}:\mathfrak{S}]^{-1}} = (C^{r^*\Sigma r}_{\underline{g},\underline{h}})^{[\mathfrak{G}:\mathfrak{S}]^{-1}} = \tilde{C}^{r^*}_{g,h}$$

die verlangte Eigenschaft.

5. Wir wollen die abgeleiteten Sätze anwenden, um noch einige Beispiele für *zerfallende* Erweiterungen anzugeben.

Zunächst gestattet Satz 2 die folgende Verallgemeinerung zweier Zerfallskriterien von H. Bergström[14]):

Satz 3. *$\mathfrak{G}$ zerfällt über der abelschen Gruppe $\mathfrak{A}$, wenn $\mathfrak{g}$ einen nilpotenten Normalteiler $\mathfrak{l}$ derart enthält, daß kein Element $\neq 1$ von $\mathfrak{A}$ unter $\Gamma(\mathfrak{l})$ invariant bleibt.*

Beweis. Da unter der Voraussetzung des Satzes auch in jeder Sylowgruppe von $\mathfrak{A}$ kein Element $\neq 1$ invariant bleibt, können wir uns wegen des 1. Reduktionssatzes wieder auf den Fall beschränken, daß $\mathfrak{A}$ p-Potenzordnung hat.

Der Satz ist richtig, wenn $\mathfrak{A} : 1 = 1$ ist. $\mathfrak{A}$ habe die Ordnung $p^a \neq 1$, und wir nehmen an, der Satz sei für alle Erweiterungen über Gruppen mit kleinerer Ordnung als p^a bewiesen. Es genügt dann zu zeigen, daß $\mathfrak{G}$ über $\mathfrak{A}$ zerspaltet. Ist nämlich $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\overline{\mathfrak{G}}$ und $\mathfrak{A} \cap \overline{\mathfrak{G}} < \mathfrak{A}$, so ist $\overline{\mathfrak{G}}/\mathfrak{A} \cap \overline{\mathfrak{G}} \cong \mathfrak{g}$, und da die durch $\overline{\mathfrak{G}}$ in $\mathfrak{A}$ induzierte Gruppe von Automorphismen gleich $\Gamma(\mathfrak{g})$ ist, erfüllt die Erweiterung $\overline{\mathfrak{G}}$ über $\mathfrak{A} \cap \overline{\mathfrak{G}}$ die Induktionsvoraussetzung. Also zerfällt $\mathfrak{G}$ über $\mathfrak{A} \cap \overline{\mathfrak{G}}$, und daher nach Hilfssatz 1 auch $\mathfrak{G}$ über $\mathfrak{A}$.

Es bleibt demnach zu beweisen, daß $\mathfrak{G}$ über $\mathfrak{A}$ zerspaltet. $\mathfrak{l}$ entspreche in $\mathfrak{G}$ der Normalteiler $\mathfrak{L}$. Da $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}$ nilpotent ist, besteht die direkte Zerlegung[15]):

$$\mathfrak{L}/\mathfrak{A} = \mathfrak{L}_p/\mathfrak{A} \times \mathfrak{L}'_p/\mathfrak{A},$$
$$\mathfrak{L}_p/\mathfrak{A} = \begin{cases} p\text{-Sylowgruppe von } \mathfrak{L}/\mathfrak{A}, \text{ wenn } p \mid \mathfrak{L} : \mathfrak{A} \\ \mathfrak{A}/\mathfrak{A}, \text{ wenn } p \nmid \mathfrak{L} : \mathfrak{A}. \end{cases}$$

Als p-Gruppe hat $\mathfrak{L}_p$ in jedem Normalteiler $\neq 1$ Zentrumselemente $\neq 1$; insbesondere gibt es also in $\mathfrak{A}$ Zentrumselemente $\neq 1$ von $\mathfrak{L}_p$. Diese sind unter den Transformationen mit allen Elementen von $\mathfrak{L}_p$ invariant. Zufolge der Voraussetzung des Satzes können sie dann nicht unter den Transformationen mit allen Elementen von $\mathfrak{L}'_p$ invariant sein. Wegen Satz 2 zerspaltet daher $\mathfrak{G}$ über $\mathfrak{A}$, wenn man dort an Stelle von $\mathfrak{k}$ den $\mathfrak{L}'_p$ entsprechenden Normalteiler $\mathfrak{l}'_p$ von $\mathfrak{g}$ betrachtet; w. z. b. w.

---

[14]) l. c.[3]).

[15]) Siehe *H. Zassenhaus*, l. c.[2]), S. 107, Satz 11.

Satz 4. *$\mathfrak{G}$ zerfällt über der abelschen p-Gruppe $\mathfrak{A}$, wenn $\mathfrak{g}$ p-perfekt*[5]) *ist, die p-Sylowgruppen von $\mathfrak{g}$ zyklisch sind und $\mathfrak{g}$ durch Γ auf den identischen Automorphismus von $\mathfrak{A}$ abgebildet wird.*

Beweis. Durch vollständige Induktion läßt sich mit Hilfssatz 1 wörtlich wie beim Beweis zum vorigen Satz einsehen, daß es zu beweisen genügt: $\mathfrak{G}$ zerspaltet über $\mathfrak{A}$. Das geschieht mit einem Satz von O. Grün und dem folgenden

Hilfssatz 2. *Ist die Faktorgruppe $\mathfrak{P}/\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} < \mathfrak{P}$ der p-Gruppe $\mathfrak{P}$ zyklisch, und ist Π eine Gruppe von Automorphismen von $\mathfrak{P}$, die alle Elemente von $\mathfrak{A}$ und kein Element $\neq \mathfrak{A}/\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{P}/\mathfrak{A}$ invariant läßt, so zerspaltet $\mathfrak{P}$ über $\mathfrak{A}$.*

Beweis. Es sei $S\mathfrak{A}$ Erzeugende von $\mathfrak{P}/\mathfrak{A}$ und $\{S\}$ die durch S erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{P}$. Ist dann $\mathfrak{P}$ nicht zyklisch, so ist

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{A}\{S\},\ \mathfrak{A} \cap \{S\} < \mathfrak{A},$$

d. h. $\mathfrak{P}$ zerspaltet über $\mathfrak{A}$.

Wir führen nun die Annahme, daß $\mathfrak{P}$ zyklisch ist, zum Widerspruch. Es bezeichne allgemein $\mathfrak{P}^n$ die Untergruppe der n-ten Potenzen von $\mathfrak{P}$, und es sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}^{p^a}$, $a > 0$. Da jede Unter- oder Faktorgruppe einer zyklischen Gruppe zyklisch ist, genügt es nachzuweisen, daß $\mathfrak{P}^{p^{a-1}}/\mathfrak{P}^{p^{a+1}}$ nicht zyklisch ist (Abb. 6). Die Automorphismen aus Π lassen

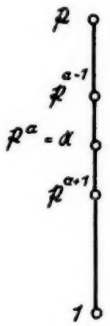

Abb. 6.

kein Element $\neq \mathfrak{P}^{p^a}/\mathfrak{P}^{p^a}$ aus $\mathfrak{P}^{p^{a-1}}/\mathfrak{P}^{p^a}$ und alle Elemente aus $\mathfrak{P}^{p^a}/\mathfrak{P}^{p^{a+1}}$ invariant. Wäre dann $\mathfrak{P}^{p^{a-1}}/\mathfrak{P}^{p^{a+1}}$ zyklisch und von $\overline{P} = P\mathfrak{P}^{p^{a+1}}$ erzeugt, so wäre $\mathfrak{P}^{p^a}/\mathfrak{P}^{p^{a+1}} = \{\overline{P}^p\}$, und es müßte einen Automorphismus $\xi = \{\overline{P} \to \overline{P}^x\}$ so geben, daß die Relationen

$$(\overline{P}^p)^x = \overline{P}^p \tag{5.1}$$

$$\overline{P}^x \neq \overline{P}\,\overline{P}^{kp},\ k \text{ ganzz.} \neq 0, \tag{5.2}$$

erfüllt sind. Aus (5.1) folgt aber

$$\begin{aligned} p(x-1) &\equiv 0(p^2), \\ x-1 &\equiv 0(p), \\ x &= 1 + kp \end{aligned}$$

im Widerspruch zu (5.2). $\mathfrak{P}$ ist also nicht zyklisch.

Wir beenden nun den Beweis zu Satz 4, indem wir zeigen, daß $\mathfrak{G}$ zerspaltet. Nach einem Satz von O. Grün[16]) läßt der Normalisator $\mathfrak{n}$ der abelschen p-Sylowgruppe $\mathfrak{s} < \mathfrak{g}$ kein Element $\neq 1$ von $\mathfrak{s}$ invariant, wenn $\mathfrak{g}$ p-perfekt ist. Da $\mathfrak{A}$ bei $\Gamma(\mathfrak{g})$ und also $\mathfrak{A}$ auch bei $\Gamma(\mathfrak{n})$ elementweise invariant bleibt, zerspaltet die $\mathfrak{s}$ entsprechende p-Sylowgruppe $\mathfrak{S}$

[16]) Siehe z. B. *H. Zassenhaus*, l. c.[2]), S. 137, Satz 7.

von $\mathfrak{G}$ über $\mathfrak{A}$. Dies folgt aus Hilfssatz 2, wenn wir dort $\mathfrak{P}$ durch $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{A}$ und Π durch die Automorphismen ersetzen, die durch den Normalisator von $\mathfrak{S}$ induziert werden. Da $\Gamma(\mathfrak{g}) = 1$ ist, zerspaltet $\mathfrak{S}$ über $\mathfrak{A}$ trivialerweise $\Gamma(\mathfrak{g})$-invariant. Nach dem 2. Reduktionssatz zerspaltet also $\mathfrak{G}$.

Satz 5. *Ist $p \neq 2$, so zerfällt die Erweiterung $\mathfrak{G}$ über einer zyklischen p-Gruppe $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{g}$, wenn eine p-Sylowgruppe $\mathfrak{s}$ von $\mathfrak{g}$ durch Γ isomorph abgebildet wird.*

Beweis. Nach dem 2. Reduktionssatz genügt es zu beweisen, daß die $\mathfrak{s}$ in $\mathfrak{g}$ entsprechende p-Sylowgruppe $\mathfrak{S}$ über $\mathfrak{A}$ zerfällt.

Da $p \neq 2$ ist, ist die Automorphismengruppe von $\mathfrak{A}$ zyklisch, und zwar von einer in $\varphi(p^a)$ aufgehenden Ordnung, wo p^a die Ordnung von $\mathfrak{A}$ ist. Daher ist auch $\mathfrak{s}$ zyklisch, und zwar von einer Ordnung p^b mit $b < a$ [17]). $\mathfrak{A}$ werde durch A erzeugt. S sei der Repräsentant einer $\mathfrak{S}/\mathfrak{A}$ erzeugenden Restklasse. Die durch S und dessen Potenzen in $\mathfrak{A}$ induzierten Automorphismen bilden die durch die Abbildungen

$$A \to A^{1+\lambda p^{a-b}}, \quad 0 < \lambda \leqq p^b,$$

definierte einzige Untergruppe der Automorphismengruppe von $\mathfrak{A}$, deren Ordnung p^b ist. S selbst entspricht etwa $\lambda = 1$.

Ferner sei $S^{p^b} = A^t$. Da dann S mit A^t vertauschbar ist, gilt

$$t(1 + p^{a-b}) \equiv t(p^a),$$

also

$$tp^{a-b} \equiv 0(p^a),$$
$$t \equiv 0(p^b).$$

Sei demgemäß $t = kp^b$ gesetzt.

Wir wählen nun an Stelle von S

$$S^* = A^{-k}S = B^{-1}S,$$

wo $B = A^k$ ist, als Repräsentanten. Es ist dann

$$\begin{aligned} S^{*p^b} &= B^{-\sum\limits_{\lambda}(1+\lambda p^{a-b})} S^{p^b} \\ &= B^{-p^b} B^{-p^{a-b}\sum\limits_{\lambda}\lambda} B^{p^b} \\ &= B^{-p^a p^{-b}\frac{p^b(p^b+1)}{2}}, \end{aligned}$$

und wegen $p \neq 2$

$$S^{*p^b} = 1.$$

Da S^{*p^b} die früheste Potenz von S^* ist, die in $\mathfrak{A}$ liegt, zerfällt also $\mathfrak{S}$ über $\mathfrak{A}$ durch $\{S^*\}$.

Satz 6 (Ore). *Ist $\mathfrak{A}$ einziger kleinster abelscher Normalteiler von $\mathfrak{G}$, und enthält $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ einen abelschen Normalteiler $\mathfrak{B}/\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{B} \neq 1$ und $(\mathfrak{B} : \mathfrak{A}, \mathfrak{A} : 1) = 1$, so zerfällt $\mathfrak{G}$ über $\mathfrak{A}$.*

Beweis. Der Satz folgt sofort aus Satz 2, wenn man nachweist, daß unter $\mathfrak{B}$ kein Element $\neq 1$ von $\mathfrak{A}$ invariant bleibt.

Bleiben unter $\mathfrak{B}$ nicht alle Elemente von $\mathfrak{A}$ invariant, so bleibt kein Element $\neq 1$ invariant, da die unter $\mathfrak{B}$ invarianten Elemente von $\mathfrak{A}$ einen Normalteiler von $\mathfrak{G}$ bilden, und $\mathfrak{A}$ keinen eigentlichen Normalteiler von $\mathfrak{G}$ enthält. Nach dem Satz von Schur [2]) zerfällt $\mathfrak{B}$ über $\mathfrak{A}$ (Abb. 7), d. h. ist von der Form $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\overline{\mathfrak{B}}$ mit $\mathfrak{A} \cap \overline{\mathfrak{B}} = 1$; und wenn $\mathfrak{A}$ bei $\mathfrak{B}$

---

[17]) Das Weitere läßt sich auch aus einem allgemeineren Satz von Baer folgern; siehe *R. Baer*, Erweiterungen von Gruppen und ihren Automorphismen, Math. Zeitschr. 38 (1934), § 4.

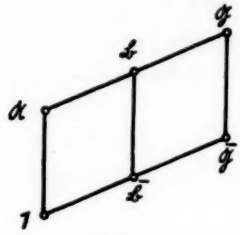

Abb. 7.

elementweise invariant bliebe, wäre daher sogar $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \times \overline{\mathfrak{B}}$ und $\overline{\mathfrak{B}} \cong \mathfrak{B}/\mathfrak{A}$ charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{B}$ und daher Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Es würde also ein kleinster abelscher Normalteiler $< \mathfrak{B}$ existieren, der gegen die Voraussetzung von $\mathfrak{A}$ verschieden wäre. Also bleibt kein Element $\neq 1$ von $\mathfrak{A}$ unter $\mathfrak{B}$ invariant; w. z. b. w.

Bei den folgenden Beispielen lassen wir die Bedingung, daß die zu erweiternde Gruppe abelsch ist, fallen. Die Definitionen (1.4) und (1.5) für zerspaltende bzw. zerfallende Erweiterungen gestatten eine wörtliche Übertragung auf nichtabelsche Erweiterungen, da sie von der Struktur der zu erweiternden Gruppe unabhängig sind. Ferner lassen sich dann analog die Begriffe Faktorensystem und dessen Erzeugnis definieren, und (1.4′) bzw. (1.5′) stellen auch im nichtabelschen Fall mit diesen formulierte Kriterien für Zerspaltung bzw. Zerfall dar.

Für nichtabelsche oder genauer nichtnilpotente Erweiterungen erweist sich der folgende bekannte Hilfssatz als nützlich[8]):

Hilfssatz 3. *$\mathfrak{N}$ sei Normalteiler von $\mathfrak{G}$, ferner $N^{\mathfrak{G}}$ der in $\mathfrak{G}$ gebildete Normalisator einer Sylowgruppe von $\mathfrak{N}$. Dann ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}N^{\mathfrak{G}}$.*

Satz 7. *Eine Erweiterung $\mathfrak{G}$ über einer p-perfekten Gruppe $\mathfrak{N}$ mit einer p-Gruppe zerfällt, wenn die p-Sylowgruppen von $\mathfrak{N}$ abelsch sind.*

Beweis. Wir benutzen Hilfssatz 3 und den schon oben verwendeten Satz von Grün. Nach Hilfssatz 3 ist

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{N}N^{\mathfrak{G}}, \tag{5.3}$$

wobei $N^{\mathfrak{G}}$ der Normalisator in $\mathfrak{G}$ einer p-Sylowgruppe $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{N}$ ist. Der Normalisator $N^{\mathfrak{N}}$ von $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{N}$ ist Normalteiler von $N^{\mathfrak{G}}$, und zwar ist $N^{\mathfrak{N}} = \mathfrak{N} \cap N^{\mathfrak{G}}$ (Abb. 8). Nach

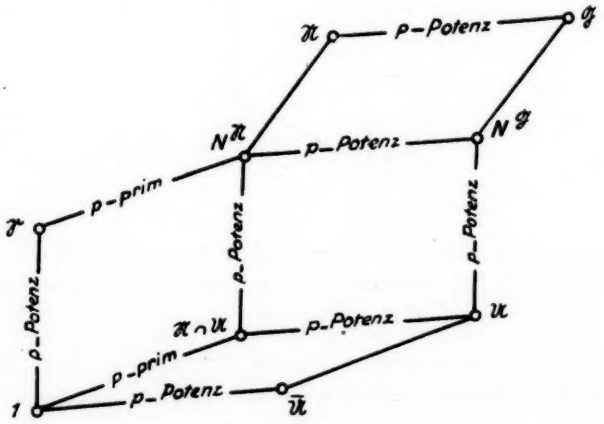

Abb. 8.

dem Satz von Grün bleibt unter $N^{\mathfrak{N}}$ kein Element $\neq 1$ von $\mathfrak{S}$ invariant. Da ferner $(N^{\mathfrak{N}}:\mathfrak{S},\mathfrak{S}:1)=1$ ist, zerfällt $N^{\mathfrak{G}}$ nach Satz 2 über $\mathfrak{S}$:

$$N^{\mathfrak{G}}=\mathfrak{S}\mathfrak{U},\ \mathfrak{S}\cap\mathfrak{U}=1.$$

Damit geht (5.3) über in

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{N}\mathfrak{U}. \tag{5.4}$$

$\mathfrak{N}\cap\mathfrak{U}$ liegt in $\mathfrak{N}\cap N^{\mathfrak{G}}=N^{\mathfrak{N}}$ und hat mit der einzigen in $N^{\mathfrak{N}}$ liegenden p-Sylowgruppe $\mathfrak{S}$ den Durchschnitt 1. Daher ist

$$(\mathfrak{N}\cap\mathfrak{U}:1,p)=1.$$

Nach (5.4) ist

$$\mathfrak{U}:\mathfrak{N}\cap\mathfrak{U}=\mathfrak{G}:\mathfrak{N},$$

also voraussetzungsgemäß p-Potenz. Somit gilt

$$(\mathfrak{U}:\mathfrak{N}\cap\mathfrak{U},\mathfrak{N}\cap\mathfrak{U}:1)=1.$$

Nach der von Zassenhaus gegebenen Verallgemeinerung des Satzes von Schur[2]) zerfällt daher $\mathfrak{U}$ über $\mathfrak{N}\cap\mathfrak{U}$:

$$\mathfrak{U}=(\mathfrak{N}\cap\mathfrak{U})\,\overline{\mathfrak{U}},\ (\mathfrak{N}\cap\mathfrak{U})\cap\overline{\mathfrak{U}}=\mathfrak{N}\cap\overline{\mathfrak{U}}=1.$$

Nach (5.4) zerfällt dann auch $\mathfrak{G}$ über $\mathfrak{N}$:

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{N}\overline{\mathfrak{U}},\ \mathfrak{N}\cap\overline{\mathfrak{U}}=1.$$

Satz 8. *Eine Gruppe $\mathfrak{G}$, deren Sylowgruppen alle elementar-abelsch*[9]) *sind, zerfällt über jedem Normalteiler $\mathfrak{N}$.*

Beweis. Der Satz ist richtig, wenn $\mathfrak{N}:1=1$ ist. Er sei bewiesen für alle Erweiterungen, die die Voraussetzungen des Satzes erfüllen, über Normalteilern, deren Ordnung $<\mathfrak{N}:1$ ist.

Ist $\mathfrak{N}=\mathfrak{A}$ abelsch, so genügt es auf Grund des 1. Reduktionssatzes, in der dortigen Bezeichnungsweise den Zerfall aller Erweiterungen $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}'_{p_\nu}$ über $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'_{p_\nu}$ $(\nu=1,\ldots,r)$,

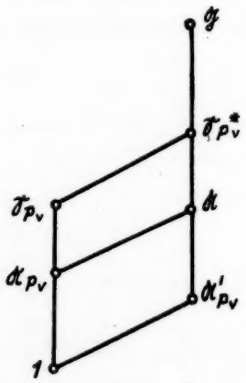

Abb. 9.

und daher auf Grund des 2. Reduktionssatzes für jedes ν den Zerfall einer p_ν-Sylowgruppe $\mathfrak{S}^*_{p_\nu}/\mathfrak{A}'_{p_\nu}$ von $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}'_{p_\nu}$ über $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'_{p_\nu}$ zu beweisen. Wie man leicht verifiziert (Abb. 9), ist

$$\mathfrak{S}^*_{p_\nu}=\mathfrak{A}'_{p_\nu}\mathfrak{S}_{p_\nu},\ \mathfrak{A}'_{p_\nu}\cap\mathfrak{S}_{p_\nu}=1$$

mit einer p-Sylowgruppe $\mathfrak{S}_{p_\nu}$ von $\mathfrak{G}$. Daher ist $\mathfrak{S}^*_{p_\nu}/\mathfrak{A}'_{p_\nu}\cong\mathfrak{S}_{p_\nu}$ und elementar-abelsch. Eine elementar-abelsche Gruppe zerfällt aber über jeder Untergruppe[18]).

[18]) Siehe etwa *B. L. v. d. Waerden*, Moderne Algebra **1**, 3. Auflage, Berlin 1950, S. 157.

Ist $\mathfrak{N}$ nichtabelsch, so ist $\mathfrak{N}$ wegen der Struktur der Sylowgruppen auch nicht nilpotent; denn anderenfalls wäre $\mathfrak{N}$ direktes Produkt seiner Sylowgruppen, die als Untergruppen der Sylowgruppen von $\mathfrak{G}$ abelsch sind. Es gibt also eine Sylowgruppe $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{N}$,

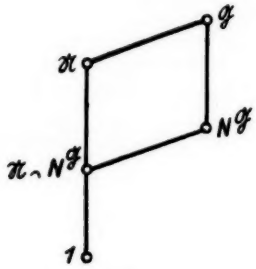

Abb. 10.

die nicht Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist, mit deren Normalisator $N^{\mathfrak{G}}$ nach Hilfssatz 3 $\mathfrak{G} = \mathfrak{N} N^{\mathfrak{G}}$ und $\mathfrak{N} \cap N^{\mathfrak{G}} < \mathfrak{N}$ ist (Abb. 10). Wegen $\mathfrak{N} \cap N^{\mathfrak{G}} < \mathfrak{N}$ erfüllt $N^{\mathfrak{G}}$ als Erweiterung über $\mathfrak{N} \cap N^{\mathfrak{G}}$ die Induktionsvoraussetzung und zerfällt daher:

$$N^{\mathfrak{G}} = (\mathfrak{N} \cap N^{\mathfrak{G}})\, \mathfrak{U}, \; (\mathfrak{N} \cap N^{\mathfrak{G}}) \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{U} = 1.$$

Da $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}\mathfrak{U}$ ist, zerfällt auch $\mathfrak{G}$ über $\mathfrak{N}$.

Eingegangen 2. Mai 1951.

Periodische Ketten linearer Transformationen.

Von *G. Bergmann* *) in Münster.

Einleitung

Über die Ergebnisse der nachfolgenden Untersuchung habe ich April 1950 in einer Sitzung der Mathematiker-Vereinigung Uppsala vorgetragen.

Bekannt ist der Satz von Lagrange, welcher aussagt, daß eine reelle Zahl dann und nur dann einen periodischen Kettenbruch besitzt, wenn sie algebraisch vom 2. Grade über dem Körper der rationalen Zahlen ist. Nach Lagrange[1]) waren mehrere Mathematiker bestrebt, einen analogen Satz für algebraische Zahlen höheren Grades zu beweisen. G. J. Jacobi[2]) definierte ein Verfahren, welches für gewisse reelle algebraische Zahlen 3. Grades periodisch ist; ob sein Verfahren aber für alle diese Zahlen periodisch ausfällt, ist bis heute nicht entschieden. Ähnliche Ergebnisse erhielt Nils Pipping[3]); seine Bestrebungen richten sich indessen vorwiegend auf Kriterien, welche die algebraischen Zahlen und ihren Grad durch *abbrechende* Rechenverfahren charakterisieren, so, wie die Zahlen 1. Grades durch einen abbrechenden Kettenbruch charakterisiert sind. Tiefgehende Untersuchungen über das Jacobi-Verfahren stellte O. Perron[4]) an. H. Minkowskis[5]) Verfahren der sukzessiven Bestimmung von Linearformen in n Veränderlichen ist im Falle $n = 3$ für Zahlen 3. Grades mit negativer Diskriminante periodisch, für die Zahlen 3. Grades mit positiver Diskriminante nicht periodisch. Doch kann der Begriff der Periodizität so gelockert werden, daß ein Kriterium für die Zahlen 3. (und höheren) Grades herauskommt. Angaben über verwandte Literatur findet man bei I. F. Koksma[6]).

Hier wird ein Verfahren behandelt, welches — ähnlich wie das Kettenbruchverfahren — auf sukzessiver Anwendung immer des gleichen Rechenschemas beruht. Objekte sind aber nicht Zahlen, sondern dreireihige Matrizen. Eine vorgegebene (reelle) Matrix (mit geeigneten Voraussetzungen) wird umkehrbar ganz rational in drei weitere transformiert, auf diese werden die gleichen Rechenprozesse angewendet usf. Wir sprechen von einer *Entwicklung* einer Matrix *in eine Kette linearer Transformationen*. Wird für eine solche Entwicklung der Begriff der Periodizität sinngemäß eingeführt, so gilt dem Lagrangeschen Satz entsprechend: Matrizen mit periodischer Entwicklung lassen sich zahlentheoretisch charakterisieren. Der Beweis dieses Satzes (Satz 13, S. 122) ist das Hauptziel der Untersuchung.

*) Früher *G. Bullig*.

[1]) *J. L. Lagrange*, Oeuvres **2**, p. 609.

[2]) *G. J. Jacobi*, Werke **6**, S. 385—426. Siehe auch *E. Heine*, J. reine angew. Math. **69** (1868), S. 29—64.

[3]) *N. Pipping*, Über eine Verallgemeinerung des Eukl. Algorithmus, Acta Acad. Åboens. **1** (1922), 14 S.

[4]) *O. Perron*, Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus, Math. Ann. **64** (1907), S. 1—76. Ein Satz über Jacobi-Ketten zweiter Ordnung, Ann. Scuola norm. sup. Pisa (2) **4** (1935), S. 133—138.

[5]) *H. Minkowski*, Ein Kriterium für die algebraischen Zahlen, Nachr. K. Ges. d. Wiss. Göttingen (Math. Phys. Klasse) 1899, S. 64—88, u. Werke **1**. Über periodische Approximationen algebraischer Zahlen, Acta Math. **26** (1902), S. 333—351, u. Werke **1**.

[6]) *I. F. Koksma*, Diophantische Approximationen, Ergebnisse der Mathematik **4**, Springer 1936, S. 50ff.

Ein a. a. O. von H. Minkowski [7]) dargestelltes Verfahren zur Berechnung von Einheiten in kubischen Zahlkörpern läßt sich ebenfalls als Matrizenverfahren deuten. Seine geometrische Definition ist einfach, die arithmetische jedoch überaus kompliziert. Es wird aber möglich sein, auf dem in der vorliegenden Arbeit gegebenen Weg eine zahlentheoretische Charakterisierung der Matrizen mit periodischer Minkowski-Entwicklung zu liefern. Auch das (kompliziertere) Verfahren von G. T. Voronoi [8]) läßt sich als Matrizenverfahren interpretieren. Die (reellen) Matrizen mit periodischer Voronoi-Entwicklung lassen sich aber nicht zahlentheoretisch charakterisieren, wenn man unter Periodizität naturgemäß die periodische Wiederkehr immer der gleichen Transformationen versteht, nicht derselben Objekte, wie Voronoi erleichternd definiert. Eine zahlentheoretische Charakterisierung der Matrizen mit periodischer Entwicklung in dem hier verwendeten Sinn dürfte aber nach Symmetrisierung des Voronoi-Verfahrens möglich sein. Es bestehen keine Zweifel, daß Periodizitätskriterien auch für Matrizen höheren Grades wenigstens existieren. Nahe verwandt mit solchen Fragestellungen sind insbesondere neuere Untersuchungen C. L. Siegels [9]) über Einheiten einfacher Algebren (endlichen Ranges) über dem Körper der rationalen Zahlen.

Das hier gegebene Verfahren erscheint in besonders einfacher Formulierung, ist aber inhaltlich dasselbe wie in meiner Arbeit Z_2 [10]). Die Einheitentheorie tritt im Vergleich zu meinen früheren Untersuchungen mehr in den Hintergrund. Sätze, welche Einheiten betreffen, werden hier meist nur referiert, wenn sie für den Aufbau entbehrlich oder gar bekannt sind.

Von vornherein gebe ich in der Darstellung den sogenannten *reduzierten* Matrizen (r-Matrizen) (S. 110) und ihrer *Entwicklung* (S. 110, S. 120) den Vorzug (§ 1). Auf r-Matrizen angewendet, liefert das Verfahren wiederum nur r-Matrizen (Satz 1, S. 111). r-Matrizen haben, falls ihre Entwicklung *periodisch* (S. 121) ist, eine *rein* periodische Entwicklung (S. 121), entsprechen den sogenannten reduzierten Zahlen der Kettenbruchtheorie.

Die Übersetzung ins Geometrische (§ 2) bringt große Vereinfachungen. Den r-Matrizen werden hierbei eineindeutig sogenannte *extreme Quader* (S. 114) zugeordnet, das Entwicklungsverfahren wird ins Geometrische übertragen (S. 115). Grundlegend ist dann in § 3 der Nachweis von extremen Quadern in beliebig dünnen, achsenparallelen Prismen (Satz 5, S. 115). Die Existenz solcher Quader gestattet, Matrizen, die nicht reduziert sind, — von einer vorbereitenden Transformation abgesehen — unter Verwendung der Entwicklung einer r-Matrix in bestimmter Weise (Satz 7, S. 117) in reduzierte umkehrbar ganzzahlig zu transformieren (Satz 9, S. 119). Hier liegt der Ausgangspunkt für eine Theorie, welche der klassischen Kettenbruchtheorie besonders nahe steht und bei anderer Gelegenheit behandelt werden soll. Andererseits folgt aus diesen Überlegungen (oder direkt) noch einmal der *Vollständigkeitssatz* (Satz 8, S. 119): Die Entwicklung jeder r-Matrix $\mathfrak{A}$ liefert alle mit ihr *äquivalenten* r-Matrizen, d. h. solche, welche aus $\mathfrak{A}$ durch umkehrbar ganzzahlige vordere Multiplikation hervorgehen. Daraus folgt im § 4 der *Eindeutigkeitssatz* (Satz 11, S. 121): Matrizen mit gleicher Entwicklung unterscheiden sich lediglich um einen hinteren Diagonalmatrix-Faktor (sind proportional). Liegt eine periodische Entwicklung vor, so zeigt man (Beweis Satz 13, S. 122/123) mit Hilfe der hierdurch gelieferten

---

[7]) *H. Minkowski*, Zur Theorie der Kettenbrüche, Ann. École Norm. (3) **13**, pp. 41—60, und Werke **1**.

[8]) *G. T. Voronoi*, Über eine Verallgemeinerung des Kettenbruch-Algorithmus, Warschau 1896 (Russisch). Siehe auch *B. Delaunay*, Interprétation géométrique de la généralisation de l'algorithme des fraction continues donnée par Voronoi. C. R. Acad. Sci. Paris **176** (1923), S. 554—556.

[9]) *C. L. Siegel*, Discontinuous groups, Annals of Math. **44** (1943), S. 674—689.

[10]) *G. Bullig*, Anwendung eines Iterationsverfahrens für diskrete Punktmengen auf Gitter (Z_2). Mitt. d. Math. Ges. Hamburg **8** (1940), S. 164—187.

Diagonalmatrix, daß nur sogenannte kubische Zahlenmatrizen (S. 122) und die mit ihnen proportionalen eine periodische Entwicklung besitzen. Ist andererseits eine reduzierte kubische Zahlenmatrix (oder eine mit ihr proportionale Matrix) gegeben, so muß ihre Entwicklung wegen der Existenz der Einheiten und des Vollständigkeitssatzes eine proportionale Matrix liefern, also, weil proportionale Matrizen gleiche Entwicklung besitzen (Satz 10, S. 121), periodisch sein.

Es gibt mehrere Möglichkeiten, das Verfahren auf Matrizen zu erweitern, die nicht reduziert sind, ohne — wie in § 3 — die Entwicklung inäquivalenter Matrizen zu verwenden. Die in § 5 (S. 124) angegebene Erweiterung ist der numerischen Verwendung zugänglich.

Im Interesse eines von meinen früheren Arbeiten möglichst unabhängigen Aufbaus wurden dort bereits veröffentlichte Sätze in neuem Zusammenhang hergeleitet. Bisher noch nicht bewiesen sind die Sätze von § 3 ab exkl. Satz 8, S. 119.

§ 1. Reduzierte Matrizen, Nachbarn.

Gegeben sei eine dreireihige reelle Matrix $\mathfrak{A} = (\alpha_{ik})$ mit den Zeilenvektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$; $\mathfrak{a}_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3})$. Wir notieren die folgenden Bedingungen, welche wir nach Bedarf einsetzen werden:

(1. 1) $\mathfrak{A}$ ist invertierbar.

(1. 2) Die Elemente jeder Spalte von $\mathfrak{A}$ sind rational linear unabhängig.

(1. 3) Die Elemente jeder Spalte der transponierten Reziproken $(\mathfrak{A}^{-1})'$ sind linear unabhängig.

(2. 1) $\alpha_{ik} > 0 \quad (i, k = 1, 2, 3)$.

(2. 2) $\alpha_{kk} > \alpha_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3;\ i \neq k)$.

(3) Das System der Ungleichungen

$$0 < \xi_1 < \alpha_{11},\ 0 < \xi_2 < \alpha_{22},\ 0 < \xi_3 < \alpha_{33}$$

wird von keinem der drei Vektoren

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3,\ \mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3,\ \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_3$$

erfüllt.

Eine Matrix, welche alle vorstehenden Bedingungen erfüllt, heiße *reduziert* (in der Einleitung wurde die Bezeichnung r-Matrix verwendet). Eine elementare Überlegung zeigt, daß es reduzierte Matrizen gibt, ihre Zahl ist von kontinuierlicher Mächtigkeit. Wir werden später sehen (Satz 2, S. 115), daß jede Matrix mit den Bedingungen (1. 1) bis (1. 3) umkehrbar ganz rational in eine (sogar unendlich viele) reduzierte transformiert werden kann.

Zu einer beliebig vorgegebenen reduzierten Matrix (α_{ik}) bestimmen wir drei weitere Matrizen, *Nachbarn*, welche sich wieder als reduziert erweisen werden:

Sei p eine beliebige der Zahlen 1, 2, 3. Ist α_{sp} das zweitgrößte Element der p-ten Spalte von (α_{ik}), α_{tp} das kleinste, so sei g_0 die kleinste ganze rationale Zahl, für welche die Funktion

$$(4) \qquad f(g) = -\frac{\alpha_{pp}}{\alpha_{tp}} + \left(\frac{\alpha_{sp}}{\alpha_{tp}} - 1\right) g + \left[\left(1 + \frac{\alpha_{pt}}{\alpha_{tt}}\right) + \left(1 - \frac{\alpha_{st}}{\alpha_{tt}}\right) g\right] > 0$$

ist, und

$$h_0 = -g_0 + \left[\left(1 + \frac{\alpha_{pt}}{\alpha_{tt}}\right) + \left(1 - \frac{\alpha_{st}}{\alpha_{tt}}\right) g_0\right]$$

(hierbei ist stets $g_0 \geqq 1$ und $h_0 \leqq 1$).

Dann seien die Zeilenvektoren des p-Nachbars:

$\mathfrak{a}_s$ in p-ter Zeile, $\mathfrak{a}_t$ in t-ter Zeile

$-\mathfrak{a}_p + g_0\mathfrak{a}_s + h_0\mathfrak{a}_t$ in s-ter Zeile.

In dieser Vorschrift bedeutet $[x]$ die größte ganze rationale Zahl $\leqq x$. Die in (4) gegebene Form der Funktion $f(g)$ ist so gewählt, daß alle in den runden Klammern stehenden Ausdrücke positiv sind.

Wir prüfen, ob die Definition des p-Nachbars sinnvoll ist.

Da die Elemente der p-ten Spalte nach Voraussetzung rational linear unabhängig sind, gibt es in dieser Spalte ein zweitgrößtes und ein kleinstes Element.

Da in der Form (4) von $f(g)$ alle Koeffizienten von g positiv sind, ist $f(g)$ für hinreichend großes g positiv. Ferner ist wegen (2. 1), (2. 2)

$$f(0) = -\frac{\alpha_{pp}}{\alpha_{tp}} + \left[\frac{\alpha_{pt}}{\alpha_{tt}}\right] + 1 = -\frac{\alpha_{pp}}{\alpha_{tp}} + 1 < 0.$$

Also existiert das gewünschte minimale g_0 und ist $\geqq 1$. Daraus folgt

$$\alpha_{pt} - g_0\alpha_{st} < \alpha_{tt}, \text{ also } h_0 = 1 + \left[\frac{\alpha_{pt} - g_0\alpha_{st}}{\alpha_{tt}}\right] \leqq 1.$$

Die Ungleichung $f(g+1) > f(g)$ ist für den Beweis nicht erforderlich, aber für numerische Bestimmungen wichtig.

Wir kommen zum Beweis, daß der p-Nachbar wieder reduziert ist. Hierbei muß gesagt werden, daß die Verwendung der aus Z_2 übernommenen Hilfssätze 1 und 2 (S. 115) für den Beweis des folgenden Satzes 1 schneller zum Ziele führen würde als der folgende von Z_2 unabhängige Beweis; die hier befolgte Anordnung der Sätze führt aber zu einem klareren Aufbau des Ganzen.

Satz 1. *Der p-Nachbar einer reduzierten Matrix ist reduziert.*

Beweis. Die Transformation von $\mathfrak{A}$ in ihren p-Nachbarn ist nach Definition vordere Multiplikation mit einer umkehrbar ganz rationalen Matrix. Infolgedessen ist auch der p-Nachbar invertierbar und seine Spalten sowie die Spalten der transponierten Reziproken sind linear unabhängig über dem Körper der rationalen Zahlen.

Damit sind die (1. 1) bis (1. 3) entsprechenden Bedingungen für den p-Nachbarn erfüllt.

Wir schreiben jetzt

$$f(g) = -\frac{\alpha_{pp}}{\alpha_{tp}} + \frac{\alpha_{sp}}{\alpha_{tp}}g + 1 + \left[\frac{\alpha_{pt}}{\alpha_{tt}} - \frac{\alpha_{st}}{\alpha_{tt}}g\right] \text{ und } h_0 = 1 + \left[\frac{\alpha_{pt} - \alpha_{st}g_0}{\alpha_{tt}}\right].$$

Sei $\mathfrak{z} = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = -\mathfrak{a}_p + g_0\mathfrak{a}_s + h_0\mathfrak{a}_t$. Zum Nachweis der Bedingungen (2) für den p-Nachbarn müssen wir besonders ausführen:

$$0 < \zeta_p < \alpha_{sp}, \; 0 < \zeta_t < \alpha_{tt}, \; \alpha_{ss} < \zeta_s.$$

Wir haben

$$0 = -\alpha_{pt} + g_0\alpha_{st} + \left(\frac{\alpha_{pt} - g_0\alpha_{st}}{\alpha_{tt}}\right)\alpha_{tt} < -\alpha_{pt} + g_0\alpha_{st} + h_0\alpha_{tt} = \zeta_t$$

$$\leqq -\alpha_{pt} + g_0\alpha_{st} + \left(1 + \frac{\alpha_{pt} - g_0\alpha_{st}}{\alpha_{tt}}\right)\alpha_{tt} = \alpha_{tt},$$

also $0 < \zeta_t \leqq \alpha_{tt}$, also mit Rücksicht auf (1. 2)

$$0 < \zeta_t < \alpha_{tt}. \tag{5}$$

Weiter folgt

$$\frac{\zeta_p - \alpha_{sp}}{\alpha_{tp}} = -\frac{\alpha_{pp}}{\alpha_{tp}} + g_0\frac{\alpha_{sp}}{\alpha_{tp}} + h_0 - \frac{\alpha_{sp}}{\alpha_{tp}} = -\frac{\alpha_{pp}}{\alpha_{tp}} + (g_0 - 1)\frac{\alpha_{sp}}{\alpha_{tp}} + \left[\frac{\alpha_{pt} - \alpha_{st}g_0}{\alpha_{tt}}\right] + 1$$

$$\leqq -\frac{\alpha_{pp}}{\alpha_{tp}} + (g_0 - 1)\frac{\alpha_{sp}}{\alpha_{tp}} + \left[\frac{\alpha_{pt} - \alpha_{st}g_0}{\alpha_{tt}} + \frac{\alpha_{st}}{\alpha_{tt}}\right] + 1 = f(g_0 - 1) \leqq 0$$

$$< f(g_0) = -\frac{\alpha_{pp}}{\alpha_{tp}} + g_0\frac{\alpha_{sp}}{\alpha_{tp}} + h_0 = \frac{\zeta_p}{\alpha_{tp}},$$

also

$$(6) \qquad 0 < \zeta_p < \alpha_{sp}.$$

(5) und (6) werden zum Nachweis der Bedingung $\alpha_{ss} < \zeta_s$ und der Bedingungen (3) für den p-Nachbarn noch verschärft: Es kann nicht gleichzeitig $\zeta_p > \alpha_{sp} - \alpha_{tp}$ und $\zeta_t < \alpha_{s}$

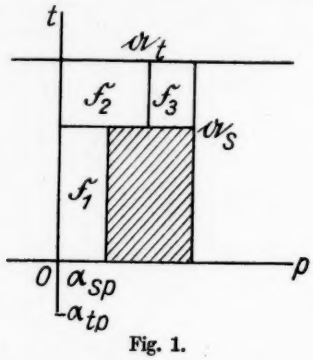

Fig. 1.

gelten, $\mathfrak{z}$ kann also nicht senkrecht über dem schraffierten Bereich der obenstehenden Figur liegen, die durch senkrechte Projektion auf die $x_p x_t$-Ebene gewonnen wurde. Andernfalls würde für $\mathfrak{l} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \mathfrak{z} - \mathfrak{a}_s + \mathfrak{a}_t$

$$(7) \qquad 0 < \zeta_p - \alpha_{sp} + \alpha_{tp} = \lambda_p$$

und $0 < \zeta_t < \zeta_t - \alpha_{st} + \alpha_{tt} = \lambda_t < \alpha_{tt}$, also

$$(8) \qquad 0 < \lambda_t < \alpha_{tt}$$

gelten, und es folgte wegen (8) für die durch $\mathfrak{l} = -\mathfrak{a}_p + g_1\mathfrak{a}_s + h_1\mathfrak{a}_t$ (g_1, h_1 ganz rational) definierte Zahl h_1

$$h_1 = \left[\frac{\alpha_{pt} - g_1\alpha_{st}}{\alpha_{tt}}\right] + 1$$

und also wegen (7)

$$0 < -\alpha_{pp} + g_1\alpha_{sp} + \left(\left[\frac{\alpha_{pt} - g_1\alpha_{st}}{\alpha_{tt}}\right] + 1\right)\alpha_{tp} = \alpha_{tp} \cdot f(g_1),$$

d. h. $0 < f(g_1)$, obwohl $g_1 = g_0 - 1$.

$\mathfrak{z}$ liegt also in dem Bereich $\mathfrak{F}$, welcher durch Subtraktion des Bereiches

$$\alpha_{sp} - \alpha_{tp} < x_p < \alpha_{sp}, \quad 0 < x_t < \alpha_{st}$$

vom Rechteck

$$0 < x_p < \alpha_{sp}, \quad 0 < x_t < \alpha_{tt}$$

gegeben wird.

Dieser Bereich $\mathfrak{F}$ ist bei Hinzunahme gegeigneter Randelemente Fundamentalbereich der Gruppe der Translationen $m\mathfrak{a}_s + n\mathfrak{a}_t$ (m, n ganz rational). Mit Rücksicht auf (1. 2) liegt $\mathfrak{z} = -\mathfrak{a}_p + g_0\mathfrak{a}_s + h_0\mathfrak{a}_t$ in einem der drei Teilbereiche

$\mathfrak{F}_1$: $\quad 0 < x_p < \alpha_{sp} - \alpha_{tp}, \quad 0 < x_t < \alpha_{st},$

$\mathfrak{F}_2$: $\quad 0 < x_p < \alpha_{tp}, \quad \alpha_{st} < x_t < \alpha_{tt},$

$\mathfrak{F}_3$: $\quad \alpha_{tp} < x_p < \alpha_{sp}, \quad \alpha_{st} < x_t < \alpha_{tt}.$

Für den Beweis von $\zeta_s > \alpha_{ss}$ ist ferner die folgende Überlegung wichtig: Liegen in $0 < x_t < \alpha_{tt}$ zwei modd. $\mathfrak{a}_s$, $\mathfrak{a}_t$ äquivalente Punkte $\mathfrak{c} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ und $\mathfrak{d} = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, welche der Einfachheit halber $\not\equiv 0$ modd. $\mathfrak{a}_s$, $\mathfrak{a}_t$ vorausgesetzt werden, und ist $\gamma_p < \delta_p$, so gilt

$$\mathfrak{c} + a\mathfrak{a}_s + b(\mathfrak{a}_s - \mathfrak{a}_t) = \mathfrak{d}$$

mit nichtnegativen a, b, die nicht beide verschwinden. Zum Beweise konstruieren wir mit $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}^{(0)}$ beginnend eine Folge $\mathfrak{d}^{(n)} = (\delta_1^{(n)}, \delta_2^{(n)}, \delta_3^{(n)})$ (welche ganz in $0 < x_t < \alpha_{tt}$ liegt) nach der Induktionsvorschrift:

$$\mathfrak{b}^{(n+1)} = \mathfrak{b}^{(n)} - \mathfrak{a}_s, \quad \text{wenn} \quad \delta_t^{(n)} > \alpha_{st} \text{ ist,}$$
$$\mathfrak{b}^{(n+1)} = \mathfrak{b}^{(n)} - \mathfrak{a}_s + \mathfrak{a}_t, \quad \text{wenn} \quad \delta_t^{(n)} < \alpha_{st} \text{ ist.}$$

Die Koordinaten $\delta_p^{(n)}$ fallen echt monoton. Es gibt ein n_0 mit $\mathfrak{b}^{(n_0)} = \mathfrak{c}$.

Nunmehr folgt der Beweis von $\zeta_s > \alpha_{ss}$.

(*a*) $\mathfrak{z}$ *liege in* $\mathfrak{F}_1$. Der Vektor $-\mathfrak{z} + \mathfrak{a}_s$ liegt in $0 < x_p < \alpha_{sp}$, $0 < x_t < \alpha_{tt}$. Er ist $\equiv \mathfrak{a}_p$ modd. $\mathfrak{a}_s, \mathfrak{a}_t$. Folglich gilt mit zwei nichtnegativen ganzen rationalen a, b, die nicht beide verschwinden,

$$(9) \qquad (-\mathfrak{z} + \mathfrak{a}_s) + a\mathfrak{a}_s + b(\mathfrak{a}_s - \mathfrak{a}_t) = \mathfrak{a}_p.$$

Ist erstens $\zeta_s < \alpha_{ss}$ und $a = 0$, so liegt $-\mathfrak{z} + \mathfrak{a}_s$ im Quader Q: $0 < x_i < \alpha_{ii}$ $(i = 1, 2, 3)$ und $\mathfrak{a}_p - \mathfrak{a}_s + \mathfrak{a}_t$ auf der Verbindungsstrecke von $-\mathfrak{z} + \mathfrak{a}_s$ und $\mathfrak{a}_p$, also ebenfalls in Q, im Widerspruch zu (3).

Ist zweitens $a > 0$, so folgt aus (9)

$$(-\zeta_s + \alpha_{ss}) + \alpha_{ss} \leqq \alpha_{ps}, \quad \zeta_s > \alpha_{ss}.$$

Mit Rücksicht auf (1. 2) folgt also

$$(10) \qquad \zeta_s > \alpha_{ss}.$$

(*b*) $\mathfrak{z}$ *liege in* $\mathfrak{F}_2$. Dann liegt $-\mathfrak{z} + \mathfrak{a}_t \equiv \mathfrak{a}_p$ in $0 < x_p, < \alpha_{tp}$ $0 < x_t < -\alpha_{st} + \alpha_{tt} < \alpha_{tt}$. Folglich gilt $(-\mathfrak{z} + \mathfrak{a}_t) + a\mathfrak{a}_s + b(\mathfrak{a}_s - \mathfrak{a}_t) = \mathfrak{a}_p$ mit nichtnegativen ganzen rationalen a, b, die nicht beide verschwinden.

Bei $a = 1$, $b = 0$ folgt $\mathfrak{z} = -\mathfrak{a}_p + \mathfrak{a}_s + \mathfrak{a}_t$, $\zeta_s > 0$, also mit Rücksicht auf (3) die Ungleichung (10).

Bei $a \geqq 2$, $b = 0$ folgt

$$-\zeta_s + \alpha_{ts} + 2\alpha_{ss} \leqq \alpha_{ps}, \quad \zeta_s \geqq \alpha_{ss} + (\alpha_{ss} - \alpha_{ps} + \alpha_{ts}) > \alpha_{ss},$$

also (10).

Der Fall $a = 0$, $b = 1$ scheidet aus wegen $\mathfrak{z} = \mathfrak{a}_s - \mathfrak{a}_p$, $\zeta_p < 0$ entgegen $\mathfrak{z} < \mathfrak{F}_2$.

Ebenso der Fall $a = 0$, $b \geqq 2$, weil dann

$$\zeta_t = -\alpha_{pt} + \alpha_{st} + (b - 1)(\alpha_{st} - \alpha_{tt}) < \alpha_{st} \text{ entgegen } \mathfrak{z} < \mathfrak{F}_2.$$

Ist aber $a \geqq 1$ und $b \geqq 1$, so gilt

$$-\zeta_s + \alpha_{ts} + \alpha_{ss} + \alpha_{ss} - \alpha_{ts} \leqq \alpha_{ps},$$

also (10).

(*c*) $\mathfrak{z}$ *liege in* $\mathfrak{F}_3$. Wir setzen $\mathfrak{x} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -\mathfrak{z} + \mathfrak{a}_s + \mathfrak{a}_t$. Offenbar ist

$$\alpha_{tp} < \xi_p < \alpha_{sp} \text{ und } \alpha_{st} < \xi_t < \alpha_{tt}.$$

Wir haben

$$(-\mathfrak{z} + \mathfrak{a}_s + \mathfrak{a}_t) + a\mathfrak{a}_s + b(\mathfrak{a}_s - \mathfrak{a}_t) = \mathfrak{a}_p$$

mit nichtnegativen, ganzrationalen a, b, die nicht beide verschwinden, und behaupten sogar

$$(11) \qquad \zeta_s > \alpha_{ss} + \alpha_{ts}.$$

Der Fall $\zeta_s < \alpha_{ss} + \alpha_{ts}$, $a > 0$, $b = 0$ scheidet aus, weil dann $0 < \xi_s < \alpha_{ps} - \alpha_{ss} < 0$.

Sei zweitens $\zeta_s < \alpha_{ss} + \alpha_{ts}$, $a = 0$, $b > 0$. Es folgt $0 < \xi_s < \alpha_{ps}$, $\mathfrak{x}$ liegt im Quader Q: $0 < x_i < \alpha_{ii}$ $(i = 1, 2, 3)$, und der Punkt $\mathfrak{a}_p - (\mathfrak{a}_s - \mathfrak{a}_t)$ liegt auf der Verbindungsstrecke von $\mathfrak{a}_p$ und $\mathfrak{x}$, also ebenfalls in Q im Widerspruch zu (3).

Sei endlich $a \geqq 1$, $b \geqq 1$; dann folgt

$$-\zeta + \alpha_{ss} + \alpha_{ts} + \alpha_{ss} + \alpha_{ss} - \alpha_{ss} \leqq \alpha_{ps},$$

also $\zeta > 2\alpha_{ss} > \alpha_{ss} + \alpha_{ts}$.

Somit sind alle Ungleichungen (2) für den p-Nachbarn sichergestellt. Zum Beweise von Satz 1 muß noch gezeigt werden, daß keiner der drei Gitterpunkte $\mathfrak{z} - \mathfrak{a}_s + \mathfrak{a}_t$, $\mathfrak{z} + \mathfrak{a}_s - \mathfrak{a}_t$, $-\mathfrak{z} + \mathfrak{a}_s + \mathfrak{a}_t$ die Ungleichungen

$$(12) \qquad 0 < x_p < \alpha_{sp}, \; 0 < x_t < \alpha_{tt}, \; 0 < x_s < \zeta_s$$

erfüllt.

Da $\mathfrak{z}$ in $\mathfrak{F}$ liegt, muß die p-Komponente von $\mathfrak{z} - \mathfrak{a}_s + \mathfrak{a}_t$ negativ oder die t-Komponente $> \alpha_{tt}$ sein. Die s-Koordinate von $\mathfrak{z} + \mathfrak{a}_s - \mathfrak{a}_t$ ist wegen $\alpha_{ss} > \alpha_{ts}$ größer als ζ_s. Falls

$\mathfrak{x} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -\mathfrak{z} + \mathfrak{a}_s + \mathfrak{a}_t$ die ersten beiden der vorstehenden Ungleichungen (12) erfüllt, haben wir

$$\xi_p = -\zeta_p + \alpha_{sp} + \alpha_{tp} < \alpha_{sp}, \text{ also } \zeta_p > \alpha_{tp};$$
$$\xi_t = -\zeta_t + \alpha_{st} + \alpha_{tt} < \alpha_{tt}, \text{ also } \zeta_t > \alpha_{st}.$$

In diesem Fall liegt also $\mathfrak{z}$ sogar in $\mathfrak{F}_3$. Nach dem unter (c) behandelten Fall ist hier $\zeta_s > \alpha_{ss} + \alpha_{ts}$, also die s-Koordinate von $\mathfrak{x}$ negativ. Damit ist der Satz 1 bewiesen.

§ 2. Übersetzung ins Geometrische und Folgerungen.

Die auf Seite 110 zusammengestellten Bedingungen sollen ins Geometrische übersetzt werden, was teilweise schon im Beweis von Satz 1 nahelag.

Sei Γ das von $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ aufgespannte Gitter in einem cartesischen System, also die Menge aller $m_1\mathfrak{a}_1 + m_2\mathfrak{a}_2 + m_3\mathfrak{a}_3$ mit ganzen rationalen m_i. Dann folgt aus (1. 1) die folgende Bedingung (1. 1*), ebenso (1. 2*) bzw. (1. 3*) aus (1. 2) bzw. (1. 3).

(1. 1*) Γ ist dreidimensional, d. h. seine Elemente liegen nicht alle in einer Ebene.

(1. 2*) Der Nullpunkt ist das einzige auf den Koordinatenebenen liegende Element von Γ. Oder: Jeder Gitterpunkt ist durch eine beliebige seiner Koordinaten eindeutig bestimmt. Oder: Auf jeder zu einer Koordinatenebene parallelen Ebene liegt höchstens ein Gitterpunkt.

(1. 3*) Der Nullpunkt ist das einzige auf den Koordinatenebenen liegende Element des Gitters Γ^*, welches aus der Menge aller äußeren Produkte je zweier Gittervektoren von Γ besteht.

Wir notieren dazu:

(1. 4*) In jedem Bereich

$$0 < x_i < c_i, \quad 0 < x_k < c_k, \quad 0 < x_l$$
$$(i, k, l \text{ paarweise verschieden } = 1, 2, 3;\ c_i, c_k \text{ beliebig positiv})$$

liegt ein Element von Γ.

Die letztere Eigenschaft von Γ folgt leicht aus (1. 1*), (1. 3*); der Beweis kann übergangen werden.

Umgekehrt folgt aus (1. 1*) die Bedingung (1. 1), aus (1. 2*) bzw. (1. 3*) die Bedingung (1. 2) bzw. (1. 3) für jede Matrix $\mathfrak{A}$, deren Zeilenvektoren Basis von Γ sind.

Aus (1. 4*) folgt (1. 1), aber nicht notwendig (1. 3), vgl. hierzu Satz 5, S. 115.

Aus (2. 1) folgt:

(2. 1*) $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ liegen im Oktanten der Punkte mit positiven Koordinaten.

Aus (2. 1) und (2. 2) folgt:

(2. 2*) Der Punkt $\mathfrak{a}_i$ ($i = 1, 2, 3$) liegt auf der i-ten Seitenfläche des Quaders

$$0 < x_1 < \alpha_{11},\ 0 < x_2 < \alpha_{22},\ 0 < x_3 < \alpha_{33}.$$

(Als *Seitenflächen* oder *Seiten* eines Quaders $0 < x_1 < c_1,\ 0 < x_2 < c_2,\ 0 < x_3 < c_3$ werden hier nur aufgenommen die

1. Seite: $x_1 = c_1,\ 0 < x_2 < c_2,\ 0 < x_3 < c_3$
2. Seite: $0 < x_1 < c_1,\ x_2 = c_2,\ 0 < x_3 < c_3$
3. Seite: $0 < x_1 < c_1,\ 0 < x_2 < c_2,\ x_3 = c_3$.)

Schließlich bedeutet die Bedingung (3), daß die drei Punkte $-\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_3$ nicht im Quader $0 < x_i < \alpha_{ii}$ ($i = 1, 2, 3$) enthalten sind. Sie liegen alle auf der durch $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ gelegten Ebene.

Wir nennen den Quader $0 < x_i < c_i$ ($i = 1, 2, 3$) *für ein Gitter Γ extrem*, wenn er erstens kein Element aus Γ enthält, und wenn zweitens jede seiner Seiten ein Element aus Γ enthält.

In Z_2[10]) wurde bewiesen[11]):

Hilfssatz 1. *$\mathfrak{A}$ mit den Zeilenvektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ sei reduziert*[12]). *Γ sei das von $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ aufgespannte Gitter. Dann ist der Quader Q: $0 < x_1 < \alpha_{11}$, $0 < x_2 < \alpha_{22}$, $0 < x_3 < \alpha_{33}$ extrem für Γ.*

Q heiße *das geometrische Bild* von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^* = Q$.

Hilfssatz 2. *Ist Q extremer Quader für das Gitter Γ mit den Eigenschaften* (1. 1*) *bis* (1. 3*), *und sind $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ die* (zufolge (1. 2*) eindeutig bestimmten) *Gitterpunkte seiner* 1., 2., 3. *Seite, so sind die $\mathfrak{a}_i$ Basis von Γ und die Matrix mit diesen Zeilenvektoren ist reduziert.*

Γ ist durch die Forderung, daß Q extrem für Γ sei, eindeutig bestimmt. $\mathfrak{A}$ heiße *die zu Q gehörige Matrix*, $Q^* = \mathfrak{A}$. Offenbar gilt $\mathfrak{A}^{**} = \mathfrak{A}$, $Q^{**} = Q$.

Einige im Anschluß von Satz 1 interessierende Sätze werden auf Grund dieser Hilfssätze schnell geometrisch bewiesen.

Wir wollen zwei Matrizen *äquivalent* nennen, wenn sie durch vordere Multiplikation mit einer umkehrbar ganzzahligen Matrix ineinander übergeführt werden können. Da für jedes Gitter mit den Eigenschaften (1. 1*) bis (1. 3*) unendlich viele extreme Quader existieren[13]), folgt sofort der

Satz 2. *Zu jeder Matrix mit den Bedingungen* (1. 1) *bis* (1. 3) *gibt es unendlich viele äquivalente reduzierte Matrizen.*

Wir definieren nunmehr in einem Gitter Γ, welches die Eigenschaften (1. 1*) bis (1. 3*) besitzen möge, für jeden extremen Quader drei Nachbarn auf folgende Weise: Sei p eine beliebige der Zahlen 1, 2, 3. Sind $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ die Gitterpunkte auf den Seiten eines extremen Quaders Q, so sei $\mathfrak{a}_s$ der Gitterpunkt mit zweitkleinster p-Koordinate, t sei die von p, s verschiedene der Zellen 1, 2, 3.

Alsdann sei $\mathfrak{b}$ der Gitterpunkt mit kleinster s-Koordinate im Bereich $0 < x_p < \alpha_{sp}$, $0 < x_t < \alpha_{tt}$, $0 < x_s$. $\mathfrak{b}$ existiert wegen (1. 4*) und ist wegen (1. 2*) eindeutig bestimmt. Der durch $\mathfrak{a}_s$ auf der p-ten, $\mathfrak{a}_t$ auf der t-ten, $\mathfrak{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ auf der s-ten Seite bestimmte Quader $0 < x_p < \alpha_{sp}$, $0 < x_t < \alpha_{tt}$, $0 < x_s < \beta_s$ ist wieder extrem und heiße p-Nachbar von Q.

Der p-Nachbar einer reduzierten Matrix $\mathfrak{A}$ werde mit $\mathfrak{A}_p$, der p-Nachbar eines extremen Quaders Q mit Q_p bezeichnet. Dann gilt der

Satz 3. *Aus $\mathfrak{A}^* = Q$ folgt $(\mathfrak{A}_p)^* = Q_p$; aus $Q^* = \mathfrak{A}$ folgt $(Q_p)^* = \mathfrak{A}_p$.*

D. h.: Der p-Nachbar des geometrischen Bildes einer reduzierten Matrix $\mathfrak{A}$ ist gleich dem geometrischen Bild des p-Nachbars, usf.

Beweis. Da $\mathfrak{A}^* = Q$ mit $Q^* = \mathfrak{A}$ und $(\mathfrak{A}_p)^* = Q_p$ mit $(Q_p)^* = \mathfrak{A}_p$ gleichwertig ist, braucht nur die 1. Behauptung bewiesen zu werden. $\mathfrak{A}_p$ ist nach Satz 1 reduziert. Die p-te Seitenfläche des geometrischen Bildes T von $\mathfrak{A}_p$ enthält den Gitterpunkt $\mathfrak{a}_s$, die t-te Seitenfläche den Gitterpunkt $\mathfrak{a}_t$. Da T nach dem 1. Hilfssatz extrem, also keinen Gitterpunkt enthält, muß der Gitterpunkt $\mathfrak{z}$ seiner s-ten Seitenfläche mit $\mathfrak{b}$ übereinstimmen. Es folgt $T = Q_p$.

Satz 4. *$\mathfrak{A}$ ist Nachbar von $\mathfrak{A}_p$; Q ist Nachbar von Q_p.*

Beweis. Die zweite Aussage ist geometrisch klar. Mit Satz 3 folgt die erste.

§ 3. Transformation in reduzierte Matrizen.

Eine wesentliche Verschärfung von (1. 4*) bringt der

Satz 5. *Erfüllt das Gitter Γ die Bedingungen* (1. 1*) *bis* (1. 3*), *so gibt es in jedem Bereich $0 < x_i < c_i$, $0 < x_k < c_k$, $0 < x_l$ (i, k, l paarweise verschieden $= 1, 2, 3$; c_i, c_k*

[11]) Hierzu nur Lektüre S. 171 Mitte bis 176 erforderlich.

[12]) Dort *extrem* genannt.

[13]) *G. Bullig*, Zur Kettenbruchtheorie im Dreidimensionalen (Z_1), Abhdl. Math. Sem. Hbg. **13** (1940), S. 321–343.

beliebig positiv) einen extremen Quader für Γ. Sind $\mathfrak{c}_p = (\gamma_{p1}, \gamma_{p2}, \gamma_{p3})$ $(p = 1, 2, 3)$ die Gitterpunkte seiner Seiten, so kann sogar $\gamma_{li} < \gamma_{ki}$ oder $\gamma_{lk} < \gamma_{ik}$ erfüllt werden.

Wie man sich leicht klar macht, folgt umgekehrt aus der Existenz eines extremen Quaders in jedem Bereich der genannten Beschaffenheit, daß Γ die Eigenschaft (1. 3*) besitzt.

Beweis von Satz 5. ε sei beliebig positiv. In $0 < x_i < \varepsilon$, $0 < x_k < \varepsilon$, $0 < x_l$ existiert wegen (1. 4*) ein Element $\mathfrak{d} = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ von Γ. Wir wählen das mit kleinstem δ_l. Ebenso existiert in $0 < x_i < \delta_i$, $0 < x_k < \delta_k$, $0 < x_l$ eines, $\mathfrak{g} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, mit minimalem γ_l. Das äußere Produkt $\mathfrak{m} = \mathfrak{d} \times \mathfrak{g} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ ist Element von Γ^*; seine l-te Koordinate strebt mit $\varepsilon \to 0$ gegen Null, denn die Determinante $\begin{vmatrix} \delta_i & \delta_k \\ \gamma_i & \gamma_k \end{vmatrix}$ ist dem Betrage nach $< 2\varepsilon^2$. Da Γ^* dreidimensional ist, gibt es im Endlichen keinen Häufungspunkt von Γ, also muß wegen (1. 3*) eine der Koordinaten von $\mathfrak{m}$, sagen wir μ_i, für eine Teilfolge der ε gegen $\pm\infty$ streben. Dann gilt also $\begin{vmatrix} \delta_k & \delta_l \\ \gamma_k & \gamma_l \end{vmatrix} \to \pm\infty$ für diese Teilfolge der ε.

Nehmen wir den extremen Quader Q, auf dessen k-ter Seitenfläche der Gitterpunkt $\mathfrak{d}$ und l-ter Seitenfläche $\mathfrak{g}$ liegt. Auf seiner i-ten liege $\mathfrak{f} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$. Nach einer Abschätzung über die Determinante jeder reduzierten Matrix, welche gleich im Satz 6 geliefert wird, haben wir

$$\Delta > (\varphi_i - \delta_i - \gamma_i) \left\| \begin{matrix} \delta_k & \delta_l \\ \gamma_k & \gamma_l \end{matrix} \right\|.$$

Wir wissen z. B. aus dem 2. Hilfssatz, daß die zu den extremen Quadern eines festen Gitters Γ gehörigen Matrizen alle dem Betrage nach die gleiche Determinante haben. Aus der obigen Ungleichung folgt $\varphi_i \to 0$ für die genannte Teilfolge der ε, und das war zu beweisen. Wird voraussetzungsgemäß $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}_k$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{c}_l$, $\mathfrak{f} = \mathfrak{c}_i$ gesetxt, so folgt $\gamma_{li} < \gamma_{ki}$.

Aus Satz 5 und Hilfssatz 2 folgt nochmals Satz 2.

Satz 6. *Die Determinante Δ jeder reduzierten Matrix (α_{ik}) ist positiv. Überdies gilt die Ungleichung*

$$\Delta > (\alpha_{33} - \alpha_{13} - \alpha_{23}) \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}.$$

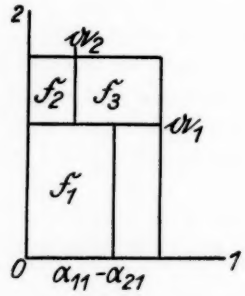

Fig. 2.

Beweis. (*a*) $\mathfrak{a}_3$ *liege in* $\mathfrak{F}_3$ (Figur). Weil dann auch $-\mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_1$ in $\mathfrak{F}_3$ liegt, gilt mit Rücksicht auf (3)

$$\alpha_{33} > \alpha_{13} + \alpha_{23}. \tag{13}$$

Wir haben

$$\Delta - (\alpha_{33} - \alpha_{13} - \alpha_{23})\,(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}) =$$
$$+\alpha_{13}\alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{23}\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{13}\alpha_{12}\alpha_{21} - \alpha_{23}\alpha_{12}\alpha_{21} - \alpha_{23}\alpha_{11}\alpha_{32} + \alpha_{23}\alpha_{12}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31}.$$

Hierin ist der 1. Term größer als der (absolut genommene) 8., der 2. größer als der 5., der 6. größer als der 4., der 7. größer als der 3.

Sei im folgenden $\alpha_{13} > \alpha_{23}$.

(*b*) $\mathfrak{a}_3$ *liege in* $\mathfrak{F}_2$ (Figur). Wir haben $\Delta - (\alpha_{33} - \alpha_{13})\,(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})$

$$= \alpha_{13}(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}) + \alpha_{23}(\alpha_{12}\alpha_{31} - \alpha_{11}\alpha_{32}) + \alpha_{13}(\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{22}\alpha_{31})$$

und, da die zweite Klammer negativ ist,

$$> \alpha_{13}\{(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}) - (\alpha_{11}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{31}) + (\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{22}\alpha_{31})\}.$$

Der in der geschweiften Klammer stehende Ausdruck enthält die Inhalte dreier Dreiecke. Liegt die Projektion von $\mathfrak{a}_3$ *nicht* über dem Dreieck mit den Projektionen von $0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ als Ecken, so ist die geschweifte Klammer der Inhalt eines Vierecks vermindert um den Inhalt eines echt darin enthaltenen Dreiecks. Liegt die Projektion von $\mathfrak{a}_3$ *über* dem Dreieck mit den Projektionen von $0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ als Ecken, so ist der Ausdruck in der geschweiften Klammer der Inhalt eines Dreiecks vermindert um die Summe zweier darin enthaltener bis auf Randpunkte getrennt liegender Dreiecke.

Sei weiter $\alpha_{13} > \alpha_{23}$.

(*c*) $\mathfrak{a}_3$ *liege in* $\mathfrak{F}_1$ (Figur). Wir setzen $\mathfrak{a}_3' = (\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{13}) = (\alpha_{31}', \alpha_{32}', \alpha_{33}')$. Dann gilt

$$\alpha_{32}' < \alpha_{12},\ \alpha_{33}' = \alpha_{13},\ \alpha_{33}' > \alpha_{23}$$

$$\alpha_{13} > \alpha_{23} \text{ (nach Vor.)},\ \alpha_{11} > \alpha_{21} + \alpha_{31}' \text{ (weil } \mathfrak{a}_3' < \mathfrak{F}_1).$$

Ist Δ' die Determinante mit $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3'$ als Zeilen, so folgt durch Vergleich der Terme von $\Delta' - (\alpha_{11} - \alpha_{21} - \alpha_{31}')\,(\alpha_{22}\alpha_{33}' - \alpha_{23}\alpha_{32}')$ paarweise wie in (*a*) $\Delta' > 0$; somit erfüllt $\Delta = (\alpha_{33} - \alpha_{13})\,(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}) + \Delta'$ die zu beweisenden Ungleichungen.

Im Falle $\alpha_{13} > \alpha_{23}$ kann $\mathfrak{a}_3$ wegen (3) keine anderen Lagen als die angegebenen einnehmen.

Ist $\alpha_{13} < \alpha_{23}$, so vertausche man die Rolle der 1. und 2. Koordinatenachse und $\mathfrak{a}_2$ mit $\mathfrak{a}_1$; dann ergibt sich der Beweis wie unter (*b*) und (*c*).

Für den p-Nachbarn eines extremen Quaders verwendeten wir die Bezeichnung Q_p. Im folgenden verstehen wir unter Q_{p_1, p_2} den p_2-Nachbarn von Q_{p_1}, unter Q_{p_1, p_2, p_3} den p_3-Nachbarn von Q_{p_1, p_2} usf. Die gleiche Benennung verwenden wir für die reduzierten Matrizen.

Satz 7. *Das Gitter Γ erfülle die Bedingungen* (1. 1*) *bis* (1. 3*). *Seien* $\mathfrak{m} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, $\mathfrak{n} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ *zwei Gitterpunkte in der Lage*

$$0 < \nu_1 < \mu_1,\quad 0 < \nu_2 < \mu_2,\quad 0 < \mu_3 < \nu_3.$$

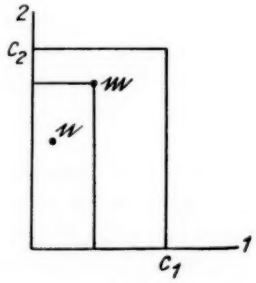

Fig. 3.

Der Quader $0 < x_1 < \mu_1,\ 0 < x_2 < \mu_2,\ 0 < x_3 < \nu_3$ *enthalte keinen Gitterpunkt. Sei* $C: 0 < x_i < c_i$ $(i = 1, 2, 3)$ *ein extremer Quader mit* $c_1 \geqq \mu_1$ $c_2 \geqq \mu_2$ *(Figur). Dann gilt: Ist P ein extremer Quader, dessen Seiten* $\mathfrak{m}$ *und* $\mathfrak{n}$ *enthalten, so ist* $P = C$ *oder* $P = C_{i_1, \ldots, i_k}$, *wo* $i_1, \ldots, i_k = 1$ *oder* 2.

Hierbei ist von Interesse, daß man P, von C ausgehend, lediglich durch Bildung von 1- und 2-Nachbarn erhalten kann.

Beweis des Satzes zunächst in der schwächeren Form: Es *gibt* einen extremen Quader P, dessen Seiten $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ enthalten, mit $P = C$ oder $P = C_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ $(i_1, \ldots, i_k = 1, 2)$.

Sei $\mathfrak{c}_3 = (\gamma_{31}, \gamma_{32}, \gamma_{33})$ der Gitterpunkt der dritten Seite von C. Offenbar ist $\gamma_{33} \leqq \nu_3$, weil sonst $\mathfrak{n}$ in C läge.

(a) $\gamma_{33} = \nu_3$. Dann folgt $\mu_3 < \gamma_{33} = c_3$, also, weil C frei ist, $\mu_1 = c_1$ oder $\mu_2 = c_2$, d. h. C enthält $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ auf seinen Seiten $(P = C)$.

(b) $\gamma_{33} < \nu_3$. $\mathfrak{c}_3$ kann nicht in $0 < x_1 < \mu_1$, $0 < x_2 < \mu_2$ liegen wegen der Voraussetzungen des Satzes; $\mathfrak{c}_3$ liegt also in dem schraffierten Bereich der Figur, und zwar in

$$A_1\colon\ \mu_1 \leqq x_1 \leqq c_1, \quad 0 < x_2 < c_2$$

oder in

$$A_2\colon\ 0 < x_1 < c_1, \quad \mu_2 \leqq x_2 \leqq c_2$$

oder in beiden.

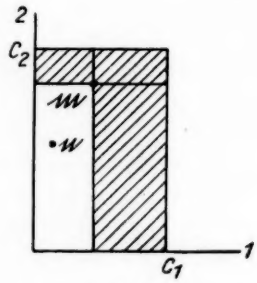

Fig. 4.

Liegt $\mathfrak{c}_3$ in A_1, so folgt $\mu_1 < c_1$; $\mathfrak{c}_3$ muß ja von dem Gitterpunkt der 1. Seite des Quaders C verschieden sein. Entsprechend folgt $\mu_2 < c_2$ bei $\mathfrak{c}_3$ in A_2. Gelte etwa $\mathfrak{c}_3 \prec A_1$. Wir bilden den 1-Nachbarn D von C: $0 < x_i < d_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Nach Definition des 1-Nachbars ist $d_1 \geqq \gamma_{31}$; dies ist $\geqq \mu_1$ wegen $\mathfrak{c}_3 \prec A_1$. Ferner gilt, ebenfalls nach Definition des 1-Nachbars, $d_2 \geqq c_2$, insgesamt $\mu_1 \leqq d_1$, $\mu_2 \leqq d_2$. Der 1-Nachbar von C erfüllt also die entsprechenden Bedingungen, welche für C im Satz gefordert waren. Die gleichen Überlegungen gelten im Falle $\mathfrak{c}_3 \prec A_2$. Die unter (a), (b) für C angestellten Überlegungen können also nun für $D = C_{i_1}$ angestellt werden usf. für $C_{i_1, i_2} \cdots$ solange, wie die dritte Koordinate des Gitterpunktes der dritten Seite von $C_{i_1, \ldots, i_k}$ kleiner ist als ν_3.

Wir verabreden: Liegt der Fall $\mathfrak{c}_3 \prec A_1$ (A_2) vor, so bilden wir sooft nur den 1-Nachbarn (2-Nachbarn), bis ein extremer Quader $C_{i_1, \ldots, i_s}$ resultiert, dessen 3. Seite wirklich höher liegt als die des voraufgehenden. Diese Vorschrift ist sinnvoll, denn aus (1. 4*) folgt, daß es nur endlich viele extreme Quader gibt, deren gleichnumerierte Seite den gleichen Gitterpunkt enthält.

Ohne diese Vorschrift könnte z. B. der Fall eintreten, daß wir durch wechselnde Wahl von 1- und 2-Nachbarn immer wieder zum gleichen Quader C zurückkehrten.

Die Eckpunkte aller so bestimmten $C, C_{i_1}, C_{i_1, i_2}, \cdots$ liegen im Bereich $\mu_1 \leqq x_1$, $\mu_2 \leqq x_2$, $\gamma_{33} \leqq x_3$, der (wegen (1. 4*)) nur endlich viele Eckpunkte extremer Quader überhaupt enthält. Also muß auf Grund unserer eben getroffenen Verabredung der Fall (a) für eines der $C, C_{i_1}, C_{i_1, i_2}, \ldots$ wirklich eintreten.

Damit ist die zu Beginn des Beweises aufgestellte Behauptung bewiesen. Es gibt nun genau zwei extreme Quader, die $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ auf ihren Seiten enthalten: Q^1, dessen 2. Seite $\mathfrak{m}$, 3. Seite $\mathfrak{n}$ und 1. Seite von den Gitterpunkten $\mathfrak{p}$ im Bereich $0 < x_1$, $0 < x_2 < \mu_2$, $0 < x_3 < \nu_3$ den mit kleinster 1. Koordinate enthält; Q^2, dessen 1. Seite $\mathfrak{m}$,

3. Seite $\mathfrak{n}$ und 2. Seite unter den Gitterpunkten im Bereich $0 < x_1 < \mu_1$, $0 < x_2$, $0 < x_3 < \nu_3$ den mit kleinster Koordinate enthält.

Wir haben $(Q^1)_1 = Q^2$ und $(Q^2)_1 = Q^1$. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Satz 8 (Vollständigkeitssatz). *Durch geeignet fortgesetzte Nachbarbildung gelangt man von einer beliebigen reduzierten Matrix zu jeder ihrer (unendlich vielen) äquivalenten reduzierten Matrizen.*

Beweis. Dieser Satz folgt schon aus Z_1 und Z_2 (den hier aufgeführten Hilfssätzen 1 und 2 und Z_1, Satz 12, S. 341). Hier ergibt er sich mit Hilfe von Satz 7 in einfacher Weise: Seien zwei reduzierte Matrizen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{L}$ gegeben. Ihre geometrischen Bilder seien $B: 0 < x_i < \beta_i$ und $L: 0 < x_i < \lambda_i$ $(i = 1, 2, 3)$. In

$$0 < x_1 < \min(\beta_1, \lambda_1),\ 0 < x_2 < \min(\beta_2, \lambda_2),\ 0 < x_3$$

sei dann $\mathfrak{m}$ der Gitterpunkt mit kleinster 3. Koordinate. Danach in

$$0 < x_1 < \mu_1,\ 0 < x_2 < \mu_2,\ 0 < x_3$$

ebenso $\mathfrak{n}$ der Gitterpunkt mit kleinster 3. Koordinate. Für $B = C$ und $L = C$ sind die Voraussetzungen des Satzes 7 erfüllt. Es folgt $B_{i_1,\ldots,i_k} = L_{p_1,\ldots,p_m}$, also $\mathfrak{B}_{i_1,\ldots,i_k} = \mathfrak{L}_{p_1,\ldots,p_m}$ nach Satz 3 und wegen Satz 4 die Behauptung des Satzes 8.

Satz 9. *Sei eine Matrix $\mathfrak{B}$ gegeben mit positiver Determinante und den* (1. 1) *bis* (1. 3) *entsprechenden Voraussetzungen; sie soll mit der reduzierten Matrix $\mathfrak{A}$ die beiden ersten Spalten gemein haben. Dann gibt es eine Matrix $\mathfrak{A}_{i_1,\ldots,i_k} = \mathfrak{T} \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{D}$ $(i_1, \ldots, i_k = 1, 2)$, für welche $\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{B}$ reduziert ist.*

Zunächst soll die Bedeutung des Satzes erklärt werden. Wir sagen: Drei Punkte $\mathfrak{l} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $\mathfrak{m} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, $\mathfrak{n} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ befinden sich *zur $x_1 x_2$-Ebene in reduzierter Lage* (Figur), wenn

$$\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \lambda_2, \mu_2, \nu_2 > 0,\ \lambda_1 > \mu_1,\ \mu_2 > \lambda_2$$

und entweder

$$\nu_1 < \lambda_1 - \mu_1,\ \nu_2 < \lambda_2 \text{ oder } \nu_1 < \lambda_1,\ \lambda_2 < \nu_2 < \mu_2,$$

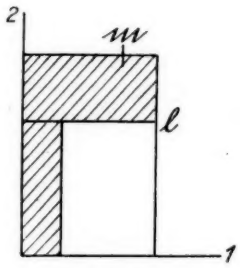

Fig. 5.

wenn also insbesondere $\mathfrak{n}$ in dem Bereich liegt, dessen Projektion in der Figur schraffiert ist. Man überlegt sich leicht, wie drei linear unabhängige Gitter-Punkte (eines Gitters Γ mit den Bedingungen (1. 1*) bis (1. 3*)), deren erste zwei Koordinaten positiv sind (oder nicht einmal diese Bedingung erfüllen) umkehrbar ganz rational in reduzierte Lage zur $x_1 x_2$-Ebene gebracht werden können. Ist also irgendeine Matrix $\mathfrak{G}$ mit den (1. 1) bis (1. 3) entsprechenden Voraussetzungen gegeben, so kann sie erstens in eine Matrix $\mathfrak{B}$ transformiert werden, deren Zeilen sich in reduzierter Lage zur $x_1 x_2$-Ebene befinden. Danach kann eine Matrix $\mathfrak{A}$ gewählt werden, welche in der ersten und zweiten Spalte mit $\mathfrak{B}$ übereinstimmt und deren dritte Zeile willkürliche positive Elemente mit $\alpha_{13} > \alpha_{23}$, und $\alpha_{33} > \alpha_{23} + \alpha_{13}$ enthält unter Wahrung der Bedingungen (1. 1) bis (1. 3).

Man bestätigt, daß $\mathfrak{A}$ reduziert ist. *Nun folgt aus Satz* 9, *daß man von* $\mathfrak{A}$ *ausgehend durch geeignete sukzessive Bildung von* 1- *und* 2-*Nachbarn und Anwendung der dabei auftretenden Transformationen auf* $\mathfrak{B}$ *usf. eine zu* $\mathfrak{B}$ *äquivalente Matrix erhält, die reduziert ist, also auch eine zu* $\mathfrak{G}$ *äquivalente reduzierte Matrix.*

Beweis des Satzes. Wir haben $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{R}$, wo

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \varrho_1 \\ 0 & 1 & \varrho_2 \\ 0 & 0 & \varrho_3 \end{pmatrix} \text{ mit } \varrho_3 > 0.$$

Nach Satz 5 existiert für das von $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ — den Zeilen von $\mathfrak{A}$ — aufgespannte Gitter Γ zu jedem $\varepsilon > 0$ ein extremer Quader D in

$$0 < x_1 < \min(\varepsilon, \alpha_{11}),\ 0 < x_2 < \min(\varepsilon, \alpha_{22}),\ 0 < x_3,$$

mit der zusätzlichen Eigenschaft: Sind $\mathfrak{d}_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$ $(i = 1, 2, 3)$ die Gitterpunkte seiner Seiten, so gilt $\delta_{32} < \delta_{12}$ oder $\delta_{31} < \delta_{21}$. Die Punkte $\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{d}_3$ oder $\mathfrak{d}_2$ und $\mathfrak{d}_3$ erfüllen die Voraussetzungen der Punkte $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ des Satzes 7, wenn das dortige $C = \mathfrak{A}^*$ gesetzt wird. Somit ist $D^* = \mathfrak{D} = \mathfrak{T} \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{i_1, \ldots, i_k}$ $(i_1, \ldots, i_k = 1, 2)$, wobei die i_p und ihre Anzahl k von ε abhängen. Nun ist

$$\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{B} = (\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{A}) \cdot \mathfrak{R} = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \varrho_1 \delta_{11} + \varrho_2 \delta_{12} + \varrho_3 \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \varrho_1 \delta_{21} + \varrho_2 \delta_{22} + \varrho_3 \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \varrho_1 \delta_{31} + \varrho_2 \delta_{32} + \varrho_3 \delta_{33} \end{pmatrix}.$$

Hierbei streben mit $\varepsilon \to 0$ die $\delta_{i1}, \delta_{i2} \to 0$, also auch alle Linearkombinationen $a_1 \delta_{11} + a_2 \delta_{21} + a_3 \delta_{31}$, $a_1 \delta_{12} + a_2 \delta_{22} + a_3 \delta_{32}$ (mit festem a_i) $\to 0$. Weil Γ im Endlichen keinen Häufungspunkt hat und (1. 2*) besteht, folgt $\delta_{i3} \to +\infty$, $a_1 \delta_{13} + a_2 \delta_{23} + a_3 \delta_{33}$ (mit festen ganz-rationalen a_i, die nicht sämtlich verschwinden) $\to \pm\infty$. Insbesondere sind die Koeffizienten der 3. Spalte von $\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{B}$ für hinreichend kleines ε positiv und der letzte maximal; also erfüllt $\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{B}$ die Bedingungen (2. 1), (2. 2) für reduzierte Matrizen.

Genügt irgendeiner der drei Gitterpunkte

$$\mathfrak{x} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -\mathfrak{d}_1 + \mathfrak{d}_2 + \mathfrak{d}_3,\ \mathfrak{d}_1 - \mathfrak{d}_2 + \mathfrak{d}_3,\ \mathfrak{d}_1 + \mathfrak{d}_2 - \mathfrak{d}_3$$

den beiden Ungleichungen $0 < \xi_1 < \delta_{11}$, $0 < \xi_2 < \delta_{22}$, so jedenfalls (weil $\mathfrak{D}$ extrem) nicht der Ungleichung $0 < \xi_3 < \delta_{33}$. Ist dies z. B. $-\mathfrak{d}_1 + \mathfrak{d}_2 + \mathfrak{d}_3$, so folgt

$$-\delta_{13} + \delta_{23} + \delta_{33} < 0 \text{ oder } -\delta_{13} + \delta_{23} + \delta_{33} > \delta_{33}, \text{ d. h. } -\delta_{13} + \delta_{23} > 0;$$

$-\delta_{13} + \delta_{23} + \delta_{33}$ und $-\delta_{13} + \delta_{23}$ streben gegen $\pm\infty$, die δ_{i1}, δ_{i2} aber gegen 0. Also folgt für die 3. Spalte von $\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{Z} = (\zeta_{ik})$

$$-\zeta_{13} + \zeta_{23} + \zeta_{33} < 0 \text{ oder } -\zeta_{13} + \zeta_{23} + \zeta_{33} > \zeta_{33};$$

also ist $\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{B}$ für hinreichend kleines ε reduziert. Damit ist Satz 9 bewiesen.

§ 4. Ketten linearer Transformationen.

Wir bezeichnen die Transformation von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}_{p_1}$ mit $\mathfrak{T}_{p_1}\{\mathfrak{A}\}$, die Transformation von $\mathfrak{A}_{p_1, \ldots, p_{l-1}}$ in $\mathfrak{A}_{p_1, \ldots, p_l}$ mit $\mathfrak{T}_{p_1, \ldots, p_l}\{\mathfrak{A}\}$, so daß

$$\mathfrak{A}_{p_1, \ldots, p_l} = \mathfrak{T}_{p_1, \ldots, p_l}\{\mathfrak{A}\} \cdot \mathfrak{A}_{p_1, \ldots, p_{l-1}}.$$

Zu jedem System von Zahlen $(p_1, \ldots, p_l)$, das nur die Ziffern 1, 2, 3 enthält, gibt es eine $\mathfrak{T}_{p_1, \ldots, p_l}\{\mathfrak{A}\}$. Die Menge der Systeme $(p_1, \ldots, p_l;\ \mathfrak{T}_{p_1, \ldots, p_l}\{\mathfrak{A}\})$ heiße *die Entwicklung von* $\mathfrak{A}$ (*in eine Kette linearer Transformationen*). $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ haben *die gleiche Entwicklung*, wenn $\mathfrak{T}_{p_1, \ldots, p_l}\{\mathfrak{A}\} = \mathfrak{T}_{p_1, \ldots, p_l}\{\mathfrak{B}\}$ für alle Systeme $(p_1, \ldots, p_l)$ gilt.

Zwei Matrizen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ sollen *proportional* heißen, wenn es eine Diagonalmatrix $\mathfrak{C}$ gibt mit $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\mathfrak{C}$; $\mathfrak{C}$ heiße *Proportionalitätsfaktor*. Dann gilt:

Satz 10. *Proportionale reduzierte Matrizen haben gleiche Entwicklung.*

Beweis. Die in der Definition der Nachbarn für reduzierte Matrizen $\mathfrak{A}$ auftretenden Quotienten enthalten im Zähler und Nenner jeweils Elemente der gleichen Spalte. Somit sind die Größen s, t, g_0, h_0 gegenüber hinterer Multiplikation von $\mathfrak{A}$ mit Diagonalmatrizen invariant. Da die Transformation in die Nachbarn eine vordere Multiplikation ist, gilt Satz 10.

Es gilt auch die Umkehrung:

Satz 11 (Eindeutigkeitssatz). *Jede reduzierte Matrix ist durch ihre Entwicklung bis auf einen Proportionalitätsfaktor eindeutig bestimmt.*

Beweis. Seien $\mathfrak{A} = (\alpha_{ik})$, $\mathfrak{B} = (\beta_{ik})$ zwei reduzierte Matrizen mit gleicher Entwicklung. Da $|\alpha_{ik}| \neq 0$, gilt $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C} = (c_{ik})$. Die Spalten von $\mathfrak{B}$ sind also Linearkombinationen der Spalten von $\mathfrak{A}$, die Koeffizienten liefert $\mathfrak{C}$.

Wir nehmen das Gitter Γ, welches von den Zeilenvektoren der Matrix $\mathfrak{A}$ aufgespannt wird. Sei ε irgendeine positive Zahl und $\mathfrak{m} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ in

$$0 < x_1 < \varepsilon, \quad 0 < x_2 < \varepsilon, \quad 0 < x_3$$

der Gitterpunkt mit kleinster 3. Koordinate, und $\mathfrak{n}$ in

$$0 < x_1 < \mu_1, \quad 0 < x_2 < \mu_2, \quad 0 < x_3$$

der Gitterpunkt mit kleinster 3. Koordinate. Mit $\varepsilon \to 0$ strebt $\min(\mu_3, \nu_3) \to \infty$, da das Gitter im Endlichen keinen Häufungspunkt besitzt.

Sei P der extreme Quader, welcher $\mathfrak{m}$ auf der 2., $\mathfrak{n}$ auf der 3. Seite enthält. Nach unserem Satz 8 gilt dann $\mathfrak{P} = \mathfrak{A}_{i_1,\ldots,i_k}$, $\mathfrak{P} = \mathfrak{T} \cdot \mathfrak{A}$ mit umkehrbar ganzzahligem $\mathfrak{T}$. Da $\mathfrak{B}$ die gleiche Entwicklung hat wie $\mathfrak{A}$, ist $\mathfrak{B}_{i_1,\ldots,i_k} = \mathfrak{T} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{T} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C} = \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{C}$. Setzen wir $\mathfrak{P} = (p_{ik})$, $\mathfrak{P}\mathfrak{C} = (q_{ik})$, so folgt

$$q_{22} = p_{21}c_{12} + p_{22}c_{22} + p_{23}c_{32},$$
$$q_{32} = p_{31}c_{12} + p_{32}c_{22} + p_{33}c_{32}.$$

Hierin streben mit $\varepsilon \to 0$

$$p_{21} = \mu_1 \to 0, \quad p_{22} = \mu_2 \to 0, \quad p_{23} = \mu_3 \to \infty,$$
$$p_{31} = \nu_1 \to 0, \quad p_{32} = \nu_2 \to 0, \quad p_{33} = \nu_3 \to \infty.$$

Nun kann c_{32} nicht negativ sein; sonst hätte die reduzierte Matrix (q_{ik}) für hinreichend kleines ε negative Elemente. c_{32} kann aber auch nicht positiv sein, weil dann für hinreichend kleines ε wegen $p_{23} < p_{33}$ die Ungleichung $q_{22} < q_{32}$ folgte, obwohl (q_{ik}) reduziert ist. Also folgt $c_{32} = 0$.

Auf entsprechende Weise wird gezeigt, daß $c_{31} = 0$, indem man an Stelle von P denjenigen extremen Quader wählt, der $\mathfrak{m}$ auf der 1. und $\mathfrak{n}$ auf der 3. Seite enthält. Der Beweis von $c_{23} = 0$ und $c_{21} = 0$ bzw. $c_{13} = 0$ und $c_{12} = 0$ erfolgt durch Auszeichnung der 2. Koordinatenachse bei der Konstruktion von $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ bzw. der 1. Koordinatenachse. Damit ist gezeigt, daß $\mathfrak{C}$ tatsächlich Diagonalmatrix ist.

Die Entwicklung einer (reduzierten) Matrix $\mathfrak{A}$ heiße *periodisch*, wenn es ein System $i_1, \ldots, i_a$ und ein System $k_1, \ldots, k_b$ so gibt, daß

1) $$\mathfrak{A}_{i_1,\ldots,i_a} \neq \mathfrak{A}_{k_1,\ldots,k_b}$$

2) $$\mathfrak{T}_{i_1,\ldots,i_a,l_1,\ldots,l_c}\{\mathfrak{A}\} = \mathfrak{T}_{k_1,\ldots,k_b,l_1,\ldots,l_c}\{\mathfrak{A}\} \text{ für alle Systeme } l_1, \ldots, l_c$$

gilt (m. a. W. wenn $\mathfrak{A}_{i_1,\ldots,i_a}$ und $\mathfrak{A}_{k_1,\ldots,k_b}$ gleiche Entwicklung haben).

Die Entwicklung einer Matrix $\mathfrak{A}$ heiße *rein* periodisch, wenn es ein System $i_1, \ldots, i_a$ gibt, so daß

1) $$\mathfrak{A}_{i_1,\ldots,i_a} \neq \mathfrak{A}$$

2) $$\mathfrak{T}_{i_1,\ldots,i_a,l_1,\ldots,l_c}\{\mathfrak{A}\} = \mathfrak{T}_{l_1,\ldots,l_c}\{\mathfrak{A}\} \text{ für alle Systeme } l_1, \ldots, l_c$$

gilt (m. a. W. $\mathfrak{A}_{i_1,\ldots,i_a}$ und $\mathfrak{A}$ gleiche Entwicklung haben).

Sei P der Körper der rationalen Zahlen. Eine (reelle) Matrix (α_{pq}) $(p, q = 1, 2, 3)$ heiße *kubische Zahlenmatrix*, wenn

die Elemente jeder Spalte rational linear unabhängig sind,

die Körper $\mathsf{P}_q = \mathsf{P}(\alpha_{1q}, \alpha_{2q}, \alpha_{3q})$ vom 3. Grad über P sind,

die Spalten durch (nicht identische) Isomorphismen der P_p auseinanderhervorgehen.

Eine kubische Zahlenmatrix erfüllt stets die Bedingungen (1. 1) bis (1. 3). Ist eine kubische Zahlenmatrix $\mathfrak{A}$ mit einer ihr äquivalenten proportional, $\mathfrak{T}\mathfrak{A} = \mathfrak{A} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 & & \\ & \gamma_2 & \\ & & \gamma_3 \end{pmatrix}$, wo also $\mathfrak{T}$ umkehrbar ganzzahlig ist, so folgt: γ_q ist Einheit der Ordnung des Moduls $\mathfrak{M}_q$ aller ganz rationalen Linearkombinationen von $\alpha_{1q}, \alpha_{2q}, \alpha_{3q}$ [Ordnung von $\mathfrak{M}_q$ = Ring aller Zahlen α mit $\alpha\alpha_{1q}, \alpha\alpha_{2q}, \alpha\alpha_{3q} < \mathfrak{M}_q$]. Ist umgekehrt γ_q Einheit der Ordnung des Moduls $\mathfrak{M}_q (q = 1, 2, 3)$, so ist $\mathfrak{T}$ umkehrbar ganz rational. Es gilt der (weiter nicht benötigte) Satz:

Satz 12. *Die (unendlich vielen) zu einer reduzierten kubischen Zahlenmatrix äquivalenten reduzierten Matrizen sind endlich vielen unter ihnen proportional.*

Beweis. Sei $\mathfrak{A}$ eine reduzierte kubische Zahlenmatrix und $Q: 0 < x_i < \alpha_{ii}$ $(i = 1, 2, 3)$ ihr geometrisches Bild. Die Ordnung des Moduls $(\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31})$ enthält zwei unabhängige Einheiten, also mit deren Quadrat auch zwei *totalpositive* unabhängige Einheiten ε_1, φ_1. Ihre Konjugierten seien bzw. ε_2, φ_2 in P_2 und ε_3, φ_3 in P_3. Wir bestimmen zwei Zahlen x, y aus den Gleichungen $x \log \varepsilon_i + y \log \varphi_i + \log \alpha_{ii} = 0$ $(i = 1, 2)$. Seien a, b die den x, y nächstgelegenen ganzen rationalen Zahlen. Dann ist

$$| a \log \varepsilon_i + b \log \varphi_i + \log \alpha_{ii} | \leqq \frac{1}{2} | \log \varepsilon_i | + \frac{1}{2} | \log \varphi_i | \qquad (i = 1, 2).$$

Setzen wir $g_i = \exp\left(\frac{1}{2} | \log \varepsilon_i | + \frac{1}{2} | \log \varphi_i |\right)$, so folgt, daß der (extreme) Quader mit den Gitterpunkten $(\alpha_{i1} \varepsilon_1^a \varphi_1^b, \alpha_{i1} \varepsilon_2^a \varphi_2^b, \alpha_{i3} \varepsilon_3^a \varphi_3^b)$ auf der i-ten Seitenfläche $(i = 1, 2, 3)$ in dem Bereich $\frac{1}{g_i} \leqq x_i \leqq g_i$ $(i = 1, 2)$ liegt. In jedem solchen Bereich liegen aber nur *endlich viele* Eckpunkte extremer Quader, wie man leicht bestätigt $(0 < x_1 < \frac{1}{g_1}, 0 < x_2 < \frac{1}{g_2}$, $0 < x_3$ enthält einen Gitterpunkt (a_1, a_2, a_3), also liegen alle fraglichen Eckpunkte außerdem in $0 < x_3 < a_3)$.

Satz 13 (Analogon des Satzes von Lagrange). *Unter den reduzierten Matrizen sind die mit einer kubischen Zahlenmatrix proportionalen durch eine periodische Entwicklung charakterisiert. Diese ist stets reinperiodisch.*

Beweis. Die reduzierte Matrix $\mathfrak{A} = (\alpha_{ik})$ sei eine kubische Zahlenmatrix. Wir nehmen eine totalpositive Einheit $\varepsilon_1 \neq 1$ aus der Ordnung des Moduls $(\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31})$. Ihre Konjugierten in $\mathsf{P}_2, \mathsf{P}_3$ seien $\varepsilon_2, \varepsilon_3$. Dann ist mit $H = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \varepsilon_2 & \\ & & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$ auch $\mathfrak{A}H$ reduziert und äquivalent zu $\mathfrak{A}$. Nach Satz 8 gibt es also ein System $i_1, \ldots, i_m$ $(= 1, 2, 3)$ so, daß $\mathfrak{A}_{i_1, \ldots, i_m} = \mathfrak{A}H$. Da proportionale Matrizen gleiche Entwicklung haben, folgt die reine Periodizität der Entwicklung von $\mathfrak{A}$. Damit ist der Satz in einer Richtung bewiesen.

Da die gleiche Überlegung für alle totalpositiven Einheiten der Ordnung von $(\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31})$ angestellt werden kann, folgt überdies der

Satz 14. *Die Entwicklung einer reduzierten kubischen Zahlenmatrix $\mathfrak{A} = (\alpha_{ik})$ liefert alle und nur die totalpositiven Einheiten ε_q der Ordnung von $(\alpha_{1q}, \alpha_{2q}, \alpha_{3q})$: Zu jedem und nur solchen ε_q gibt es ein System $(i_1, \ldots, i_m)$ mit $\mathfrak{A}_{i_1, \ldots, i_m} = \mathfrak{A} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \varepsilon_2 & \\ & & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$.*

Speziell gilt (wie hier nicht bewiesen werden soll): Von einer beliebigen reduzierten kubischen Zahlenmatrix $\mathfrak{A} = (\alpha_{ik})$ ausgehend bestimme man die sukzessiven k-Nachbarn (k fest), $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_k$, $\mathfrak{A}_{k,k}$, ... Unter ihnen gibt es einen ersten, $\mathfrak{W}$, der einem voraufgehenden, $\mathfrak{B}$, proportional ist, $\mathfrak{W} = \mathfrak{B}H$, mit $H = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \varepsilon_2 & \\ & & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$. Sei l von k verschieden gewählt. Unter den sukzessiven l-Nachbarn von $\mathfrak{B}$ gibt es einen ersten, $\mathfrak{Y}$, welcher einem Element $\mathfrak{X}$ des Abschnittes $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_k$, $\mathfrak{B}_{k,k}$, ..., $\mathfrak{B}H$ ($\mathfrak{B}H$ exklusive) der Folge der k-Nachbarn von $\mathfrak{B}$ proportional ist, $\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}Z$ mit $Z = \begin{pmatrix} \zeta_1 & & \\ & \zeta_2 & \\ & & \zeta_3 \end{pmatrix}$ so, daß $Z \neq H^{-1}$. Dann ist ε_q, ζ_q *Basis* der Gruppe der totalpositiven Einheiten der Ordnung des Moduls $\mathfrak{M}_q = (\alpha_{1q}, \alpha_{2q}, \alpha_{3q})$.

Wir kehren zum Beweis von Satz 13 zurück.

Nunmehr werde vorausgesetzt, die Entwicklung der reduzierten Matrix $\mathfrak{A}$ sei periodisch. Dann liefert sie zwei verschiedene Matrizen $\mathfrak{B} = (\beta_{ik})$, $\mathfrak{C}$, welche aus $\mathfrak{A}$ durch umkehrbar ganz rationale Transformation hervorgehen und die gleiche Entwicklung besitzen. Aus dem Eindeutigkeitssatz folgt dann $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \varepsilon_2 & \\ & & \varepsilon_3 \end{pmatrix} = \mathfrak{T} \cdot \mathfrak{B}$. Die Matrix $\mathfrak{T}$ ist umkehrbar ganzzahlig, $\mathfrak{T} = (t_{ik}) \neq \mathfrak{E}$. Hiernach erfüllen die ε_1, ε_2, ε_3 die Gleichung 3. Grades $| - \mathfrak{T} + \varepsilon\mathfrak{E} | = \varepsilon^3 + a\varepsilon^2 + b\varepsilon - 1 = 0$ mit ganz-rationalen a, b. Keines der ε_i kann rational, also $= 1$ sein. Es folgte wegen (1. 2) sonst $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$, $\mathfrak{T} = \mathfrak{E}$.

Die außerhalb der Hauptdiagonale von $\mathfrak{T}$ stehenden Elemente können nicht alle verschwinden. Sonst folgte wiederum $\mathfrak{T} = \mathfrak{E}$. Nehmen wir an, t_{21} und t_{31} wären nicht beide 0 (im Falle: t_{12}, t_{32} nicht beide Null und im Falle: t_{13}, t_{23} nicht beide Null ist analog zu schließen): Dann folgten aus

$$\begin{aligned} t_{21}\beta_{1p} + t_{22}\beta_{2p} + t_{23}\beta_{3p} &= \beta_{2p}\varepsilon_p \\ t_{31}\beta_{1p} + t_{32}\beta_{2p} + t_{33}\beta_{3p} &= \beta_{3p}\varepsilon_p \end{aligned} \qquad (p = 1, 2, 3)$$

mit $\varrho_{2p} = \dfrac{\beta_{2p}}{\beta_{1p}}$ und $\varrho_{3p} = \dfrac{\beta_{3p}}{\beta_{1p}}$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} t_{21} + (t_{22} - \varepsilon_p)\,\varrho_{2p} + t_{23}\varrho_{3p} &= 0, \\ t_{31} + t_{32}\varrho_{2p} + (t_{33} - \varepsilon_p)\,\varrho_{3p} &= 0. \end{aligned}$$

Da ε_p irrational, t_{21}, t_{31} nicht beide 0, hat dieses Gleichungssystem für festes p den Rang 2, und da es die Lösung ϱ_{2p}, ϱ_{3p} besitzt, ist also auch $\begin{vmatrix} t_{22} - \varepsilon_p & t_{23} \\ t_{32} & t_{33} - \varepsilon_p \end{vmatrix} \neq 0$. Es folgt

$$\varrho_{2p} = \frac{\mu_{21} + \mu_{22}\varepsilon_p}{v_{21} + v_{22}\varepsilon_p + v_{23}\varepsilon_p^2}, \quad \varrho_{3p} = \frac{\mu_{31} + \mu_{32}\varepsilon_p}{v_{31} + v_{32}\varepsilon_p + v_{33}\varepsilon_p^2}$$

mit von p unabhängigen rationalen u_{ik}, v_{ik}. Sei

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \varrho_{21} & \varrho_{22} & \varrho_{23} \\ \varrho_{31} & \varrho_{32} & \varrho_{33} \end{pmatrix} = \mathfrak{B}\begin{pmatrix} \beta_{11}^{-1} & & \\ & \beta_{12}^{-1} & \\ & & \beta_{13}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Die ε_p sind paarweise verschieden; sonst folgte die Gleichheit zweier Spalten von $\mathfrak{R}$, also $| \mathfrak{B} | = 0$. Die irrationalen ε_p liefern also alle Wurzeln unserer nunmehr als irreduzibel erkannten Gleichung 3. Grades; sie bilden ein volles System Konjugierter über P. Daher ist $\mathfrak{R}$ kubische Zahlenmatrix, also $\mathfrak{B}$ einer kubischen Zahlenmatrik proportional, also auch $\mathfrak{A}$.

§ 5. Matrizen mit positiven Koeffizienten.

Wir nennen zwei Systeme reeller Zahlen $(a_1, \ldots, a_m)$, $(b_1, \ldots, b_m)$ *vergleichbar*, wenn entweder $a_i \leqq b_i$ für alle i oder $a_i \geqq b_i$ für alle i. Im ersten Fall heißt $(a_1, \ldots, a_m)$ kleiner (oder gleich) $(b_1, \ldots, b_m)$, im zweiten Fall größer (oder gleich) $(b_1, \ldots, b_m)$.

Gegeben sei eine Matrix $\mathfrak{D} = (\delta_{ik})$ mit positiven Elementen, welche die Bedingungen (1. 1) bis (1. 3) erfüllt. Ihre Zeilen seien mit $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3$ bezeichnet.

Definition des p-Nachbars von $\mathfrak{D}$: p, q, r mögen zyklisch aus $1, 2, 3$ hervorgehen. Sind die Zeilen $\mathfrak{d}_q, \mathfrak{d}_r$ vergleichbar, so soll die kleinere stehen bleiben, während die größere um die kleinere vermindert wird. Dieser Verkleinerungsprozeß wird solange fortgeführt, bis die beiden (von $\mathfrak{d}_p$ verschiedenen) Zeilen nicht mehr vergleichbar sind. Sie sollen $\mathfrak{g}_q, \mathfrak{g}_r$ benannt werden, $\mathfrak{g}_i = (\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \gamma_{i3})$. Sind bereits $\mathfrak{d}_q, \mathfrak{d}_r$ nicht vergleichbar, so wird $\mathfrak{d}_q = \mathfrak{g}_q$, $\mathfrak{d}_r = \mathfrak{g}_r$ gesetzt.

Sei jetzt t die erste der Zahlen q, r (in dieser Reihenfolge), für welche $(\gamma_{qp}, \gamma_{qt})$, $(\gamma_{rp}, \gamma_{rt})$ nicht vergleichbar sind, s die andere.

Sei $\mathfrak{a}_p = \mathfrak{d}_p$, $\mathfrak{a}_s$ von $\mathfrak{g}_q, \mathfrak{g}_r$ der mit größerer p-ter Koordinate, $\mathfrak{a}_t$ der andere, $\mathfrak{a}_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3})$.

Danach sei $\mathfrak{b}$ unter den Vektoren $\mathfrak{x} = \pm \mathfrak{a}_p + m\mathfrak{a}_s + n\mathfrak{a}_t$ (m, n ganzrational) derjenige, der im Bereich

$$0 < \xi_p < \alpha_{sp}, \quad 0 < \xi_t < \alpha_{tt}, \quad 0 < \xi_s$$

das minimale ξ_s liefert.

Indem $\mathfrak{a}_s$ an die p-te, $\mathfrak{b}$ an die s-te, $\mathfrak{a}_t$ an die t-te Stelle rückt, resultiert eine neue Matrix mit positiven Koeffizienten, *der p-Nachbar von* $\mathfrak{D}$.

Eine besondere Behandlung benötigt hier die Aufgabe, $\mathfrak{b}$ zu bestimmen. Sie kann in ähnlicher Weise durchgeführt werden, wie die Bestimmung des Gitterpunktes $-\mathfrak{a}_p + g_0\mathfrak{a}_s + h_0\mathfrak{a}_t$ im Falle reduzierter Matrizen auf S. 110.

Ist $\mathfrak{D}$ reduziert, geht die obige Vorschrift in die für reduzierte Matrizen über.

Wird das Verfahren der Nachbarbildung von einer beliebigen Matrix aus unbegrenzt fortgesetzt, so befinden sich unter den so bestimmten unendlich vielen Matrizen nur endlich viele, die nicht reduziert sind. Auf einem beliebigen Wege, der keinen Zykel enthält, resultiert schließlich eine reduzierte Matrix. Ein solcher Weg wird z. B. gegeben durch fortgesetzte Bildung von nur 1-Nachbarn. Der Beweis dieser Tatsache beruht im wesentlichen darauf, daß der durch den p-Nachbarn (β_{ik}) von (δ_{ik}) bestimmte Quader

$$0 < x_1 < \max_i \beta_{i1}, \quad 0 < x_2 < \max_i \beta_{i2}, \quad 0 < x_3 < \max_i \beta_{i3}$$

in dem durch

$$0 < x_1 < \max_i \delta_{i1}, \quad 0 < x_2 < \max_i \delta_{i2}, \quad 0 < x_3 \max_i \delta_{i3}$$

enthalten ist, wenn (β_{ik}) nicht reduziert ist.

Wir bezeichnen wiederum den i_1-Nachbarn von $\mathfrak{D}$ mit $\mathfrak{D}_{i1}$, dessen i_2-Nachbarn mit $\mathfrak{D}_{i1, i2}$ usf. und nennen die Menge aller Symbole $(i_1, \ldots, i_k; \mathfrak{D}_{i_1, \ldots, i_k})$ die *Entwicklung* von $\mathfrak{A}$. *Periodische* und *reinperiodische* Entwicklung definieren wir wie auf S. 121. Wiederum gilt:

Dann und nur dann ist die Entwicklung von $\mathfrak{A}$ *periodisch, wenn* $\mathfrak{A}$ *einer kubischen Zahlenmatrix proportional ist.*

Matrizen, die nicht reduziert sind, können keine reinperiodische Entwicklung haben, andernfalls würde das Verfahren unendlich viele Matrizen liefern, die nicht reduziert sind.

Eingegangen 1. Februar 1951.

Eine Abschätzung für die Dicke bei Überdeckung durch konvexe Körper.

Von *D. Ohmann* in Frankfurt a. Main.

In der Ebene wurde von S. Straszewicz [1]) bei Bedeckung eines konvexen Bereiches B durch zwei konvexe Bereiche B_μ die Ungleichung

$$\Delta(B_1) + \Delta(B_2) \geqq \Delta(B)$$

für die Dicke Δ hergeleitet. Dieses Problem soll hier aufgegriffen und im euklidischen Raum vollständiger Lösung zugeführt werden: Wird im euklidischen R_n der konvexe Körper K durch die konvexen Körper $K_\mu (\mu = 1, \ldots, m)$ vollständig überdeckt, so wird sich die Ungleichung

$$\text{(I)} \qquad \sum_{\mu=1}^{m} \Delta(K_\mu) \geqq \Delta(K)$$

als Verallgemeinerung ergeben.

Der Beweis wird dabei so geführt, daß sich eine Verschärfung der Form,

$$\text{(II)} \qquad \sum_{\mu=1}^{m} \frac{b(K_\mu, \xi_\mu)}{b(K, \xi_\mu)} \geqq 1$$

ergibt, in der $b(\xi)$ die Breite des betreffenden Körpers in der Richtung ξ angibt und die $\xi_\mu (\mu = 1, \ldots, m)$ beliebig vorgebbare Richtungen darstellen, deren Wahl lediglich durch die Forderung $b(K, \xi_\mu) > 0$ eingeschränkt sei. (I) gewinnt man dann wegen $\Delta = \min b(\xi)$ aus (II), indem man die ξ_μ so wählt, daß $b(K_\mu, \xi_\mu) = \Delta(K_\mu)$ statthat.

§ 1.

Ungleichung (II) werde zunächst für den Fall erwiesen, in dem folgende Bedingungen für m, die Richtungen ξ_μ und den zu bedeckenden Körper K erfüllt sind:

a) Es ist $m = n$.

b) Die Richtungen ξ_μ bilden ein orthogonales n-Tupel.

c) Es besteht $b(K, \xi_\mu) = 1$ $(\mu = 1, \ldots, n)$.

d) K besitzt positives Volumen.

Der allgemeine Fall läßt sich dann vermöge affiner Abbildungen und geeigneter Approximationen auf diesen speziellen zurückführen.

Wenn die Bedingungen a)—d) erfüllt sind, stellt der Durchschnitt der K enthaltenden Halbräume, die von den Stützebenen an K der Normalenrichtungen ξ_μ und $-\xi_\mu$ $(\mu = 1, \ldots, n)$ begrenzt werden, offenbar einen Würfel W der Kantenlänge eins dar. Ist S_μ dann der Durchschnitt von W mit den beiden den bedeckenden Körper K_μ enthaltenden Halbräumen, die von den Stützebenen an K_μ der Normalenrichtungen ξ_μ und $-\xi_\mu$ begrenzt werden, so wird K ebenfalls von der Vereinigungsmenge der S_μ bedeckt, so daß sich wegen $b(S_\mu, \xi_\mu) = b(K_\mu, \xi_\mu)$ unsere Aufgabe darauf reduzieren läßt, (II) für die Körper S_μ zu erweisen.

[1]) *S. Straszewicz*, Un théorème sur la largeur des ensembles convexes. Ann. Soc. Polonaise Math. **21**, 90—93 (1949).

Nun wird W durch je $p-1$ äquidistante $(n-1)$-dimensionale Ebenen der Normalenrichtungen ξ_μ einer Würfelunterteilung der Feinheit $\frac{1}{p}$ unterworfen, und jeder so erzeugte Würfel w in einer Weise mit Masse belegt, daß alle zu K punktfremden Würfel die Masse Null erhalten und die Masse sonst so verteilt ist, daß jeder *Elementarschicht* von Würfeln die Gesamtmasse $\frac{1}{p}$ zukommt. Dabei sei unter *Elementarschicht* die Vereinigungsmenge von Unterteilungswürfeln verstanden, die eine zu einer Seitenfläche von W parallele einfache Schicht der Höhe $\frac{1}{p}$ bildet.

Die Möglichkeit einer solchen Massenbelegung voraussetzend, findet man dann: Ist $\overline{K}$ bzw. $\overline{S}_\mu$ die Vereinigungsmenge aller zu K bzw. S_μ nicht punktfremden Teilungswürfel, so setzt die unmittelbar aus $K \leqq \sum_{\mu=1}^{m} S_\mu$ zu folgende Bedeckbarkeit des Körpers $\overline{K}$ durch die $\overline{S}_\mu$ die Ungleichung $\sum_{\mu=1}^{m} M(\overline{S}_\mu) \geqq M(\overline{K})$ zwischen den Massen von $\overline{K}$ und den $\overline{S}_\mu$ voraus. Da wegen der speziellen Massenverteilung zudem

$$M(\overline{S}_\mu) = b(\overline{S}_\mu, \xi_\mu); \quad M(\overline{K}) = b(K, \xi_\mu) = 1$$

besteht, ergibt sich die Notwendigkeit der Ungleichung

$$\sum_{\mu=1}^{m} \frac{b(\overline{S}_\mu, \xi_\mu)}{b(K, \xi_\mu)} \geqq 1$$

Aus dieser läßt sich dann unter Benutzung der sofort ersichtlichen Abschätzung $b(\overline{S}_\mu, \xi_\mu) - b(S_\mu, \xi_\mu) \leqq \frac{2}{p}$ die Ungleichung

$$\sum \frac{b(S_\mu, \xi_\mu)}{b(K, \xi_\mu)} \geqq 1 - \frac{2n}{p}$$

ableiten, die, da p beliebig groß gewählt werden kann, schon auf die Richtigkeit der Ungleichung (II) in diesem Fall schließen läßt.

Zu zeigen bleibt allerdings noch, daß die benutzte Massenverteilung bei hinreichend großem p möglich ist. Dazu verstehen wir unter einer Würfelreihe $R(\xi_\mu)$ eine Anzahl von wenigstens zwei in der Richtung ξ_μ aneinandergereihten Teilungswürfeln $w < \overline{K}$ und unter einer Würfelkette $G(\xi_\mu)$ eine Anzahl einander elementefremder Würfelreihen gleicher Richtung ξ_μ. Wird dabei das erste und letzte Element einer Reihe als Randelement und jedes weitere als Zwischenelement bezeichnet, und heißt ein Randelement von $R(\xi_\mu)$ dann *extrem*, wenn es Punkte mit einer Seitenfläche der Normalenrichtung ξ_μ oder $-\xi_\mu$ des Ursprungswürfels W gemeinsam hat, so soll eine Würfelkette $G(\xi_\mu)$ dann *ausgezeichnet* genannt werden, wenn jede zu ξ_μ senkrechte Elementarschicht wenigstens einen Würfel mit ihr gemeinsam hat; und zwar genau einen Würfel, wenn es sich um ein Zwischenelement oder extremes Randelement handelt, oder aber genau zwei nicht-extreme Randelemente von zu $G(\xi_\mu)$ gehörigen Würfelreihen. Man kann das auch so ausdrücken, daß eine ausgezeichnete Kette die entsprechenden gegenüberliegenden Seitenflächen von W miteinander verbindet, wobei sich ihre aufeinanderfolgenden Würfelreihen jeweils um ein Element überlappen.

Aus der Bedingung, daß K positives Volumen besitzen soll, folgt unmittelbar, daß sich bei beliebiger Unterteilungszahl p in jeder Richtung ξ_μ stets wenigstens je eine ausgezeichnete Würfelkette $G^*(\xi_\mu)$ angeben läßt. Diese $G^*(\xi_\mu)$ kann man dann bei hinreichend großem p noch der Bedingung unterwerfen, daß ihr gemeinsamer Durchschnitt genau ein Element, das mit w^* bezeichnet sei, umfassen soll.

Nun bezeichne noch: $w_j(\xi_\mu)$ $(j = 1, 2)$ die extremen Randelemente der Kette $G^*(\xi_\mu)$; $R^*(\xi_\mu)$ die w^* enthaltende und $G^*(\xi_\mu)$ angehörende Reihe und $R^j_{\lambda_j}(\xi_\mu)$ $(\lambda_j = 1, \ldots, l_j(\xi_\mu))$ die zwischen $w_j(\xi_\mu)$ und $R^*(\xi_\mu)$ liegenden Reihen von $G^*(\xi_\mu)$, die bei der $w_j(\xi_\mu)$ enthaltenden Reihe beginnend in ihrer Aufeinanderfolge numeriert seien $(R^*(\xi_\mu) = R^j_{l_j(\xi_\mu)+1}(\xi_\mu))$. Schließlich sei noch $\overline{w}^j_{\lambda_j}(\xi_\mu)$ das erste und $\underline{w}^j_{\lambda_j}(\xi_\mu)$ das letzte Element von $R^j_{\lambda_j}(\xi_\mu)$ im Sinne der Aufeinanderfolge der $R^j_{\lambda_j}(\xi_\mu)$, und es umfasse $R^j_{\lambda_j}(\xi_\mu)$ eine Anzahl von $n^j_{\lambda_j}(\xi_\mu)$-Elementen.

Alsdann fassen wir ein festes ξ_μ ins Auge und ordnen jedem Zwischenelement von $R^j_{\lambda_j}(\xi_\mu)$ $(j = 1, 2;\ \lambda_j = 1, \ldots, l_j(\xi_\mu))$ die Masse $\frac{1}{p}$, dem ersten Glied $\overline{w}^j_{\lambda_j}(\xi_\mu)$ dagegen die Masse $\frac{1}{p}\left(2 - \lambda_j + \sum_{\sigma=1}^{\lambda_j - 1} n^j_\sigma(\xi_\mu)\right)$ zu, während das letzte Glied $\underline{w}^j_{\lambda_j}(\xi_\mu)$ die Masse $\frac{1}{p}\left(\lambda_j - \sum_{\sigma=1}^{\lambda_j} n^j_\sigma(\xi_\mu)\right)$ erhält. Schließlich ordnen wir auch jedem Zwischenelement von $R^*(\xi_\mu)$ die Masse $\frac{1}{p}$ zu und den Randelementen die Masse $\frac{1}{p}\left(1 - l_1(\xi_\mu) + \sum_{\sigma=1}^{l_1(\xi_\mu)} n^1_\sigma(\xi_\mu)\right)$ bzw. $\frac{1}{p}\left(1 - l_2(\xi_\mu) + \sum_{\sigma=1}^{l_2(\xi_\mu)} n^2_\sigma(\xi_\mu)\right)$, und versehen darüber hinaus w^* zusätzlich mit der Masse -1. Auf diese Art besitzt jede $G^*(\xi_\mu)$ zugehörige Reihe die Gesamtmasse null.

Superponiert man jetzt die für die einzelnen $G^*(\xi_\mu)$ sich ergebenden Massenbelegungen und erteilt jedem nicht beteiligten Würfel die Masse null, so ergibt sich, daß jede Elementarschicht, die w^* nicht enthält, die Masse $\frac{1}{p}$ besitzt. Hat diese nämlich etwa die Normalenrichtung ξ_{μ_0}, so hat sie mit $G^*(\xi_{\mu_0})$ gemäß der Definition der ausgezeichneten Kette entweder ein Zwischenelement, ein extremes Randelement oder ein letztes und ein darauf unmittelbar folgendes erstes Element $(\underline{w}^j_{\lambda_j}(\xi_{\mu_0})$ und $\overline{w}^j_{\lambda_j+1}(\xi_{\mu_0}))$ gemeinsam, so daß ihr von der der Kette $G^*(\xi_{\mu_0})$ in obiger Weise zugeordneten Massenbelegung ersichtlich der Massenanteil $\frac{1}{p}$ zuteil wird. Da sie von jeder weiteren Kette $G^*(\xi_\mu)$ $(\xi_\mu \neq \xi_{\mu_0})$ nur entweder kein Element oder aber eine oder mehrere geschlossene Würfelreihen enthalten kann, können durch deren Massenbelegungen keine weiteren Beiträge hinzukommen, womit sich die Gesamtmasse dieser Elementarschicht in der Tat zu $\frac{1}{p}$ ergibt.

Enthält die Elementarschicht hingegen den Würfel w^*, so wird ihr aus den entsprechenden Erwägungen heraus die Masse $\frac{1}{p} - 1$ zuzusprechen sein, so daß w^* zu den sich überlagernden Massenbelegungen der $G^*(\xi_\mu)$ noch ein Massenzusatz von $+1$ zuzubilligen wäre, um allen gestellten Anforderungen zu genügen.

§ 2.

Die Befreiung von den Bedingungen a)—d) des vorigen Paragraphen soll nun schrittweise erfolgen:

1. Unter Beibehaltung von a)—c) sei K ein Körper verschwindenden Volumens. Dann gilt Ungleichung (II) nach § 1 für jeden Parallelkörper $K_\mu(t)$ zu K im Abstand t. Da die Parallelkörper $K_\mu(t)$ zu den bedeckenden Körpern K_μ nun ihrerseits den Körper $K(t)$ überdecken und zudem $b(K(t), \xi_\mu) = b(K, \xi_\mu) + 2t$ und $b(K_\mu(t), \xi_\mu) = b(K_\mu, \xi_\mu) + 2t$ besteht, hat man also:

$$\sum_{\mu=1}^{m} \frac{b(K_\mu, \xi_\mu) + 2t}{b(K, \xi_\mu) + 2t} \geqq 1,$$

was aber für $t \to 0$ gerade in Ungleichung (II) übergeht.

2. Läßt man nun auch noch die Bedingungen a)—c) wegfallen und betrachtet zunächst den Fall $m \geqq n$, so denke man sich die n-dimensionalen konvexen Körper K und $K_\mu (\mu = 1, \ldots, m)$ in einer n-dimensionalen Hyperebene des m-dimensionalen euklidischen Raumes liegend. Waren die ξ_μ dann so gewählt, daß $b(K, \xi_\mu) \neq 0$ statthatte, so läßt sich auf Grund der gleichmäßigen Stetigkeit der Breite beschränkter konvexer Körper das Richtungs-m-Tupel $\{\xi_\mu\}$ derart durch ein linear unabhängiges m-Tupel $\{\xi_\mu^*\}$ von Richtungen des R_m approximieren, daß

$$(*) \qquad \left| \sum_{\mu=1}^{m} \frac{b(K_\mu, \xi_\mu)}{b(K, \xi_\mu)} - \sum_{\mu=1}^{m} \frac{b(K_\mu, \xi_\mu^*)}{b(K, \xi_\mu^*)} \right| < \varepsilon$$

bei beliebig vorzugebendem $\varepsilon > 0$ besteht.

Wegen der linearen Unabhängigkeit der ξ_μ^* bildet der Durchschnitt der durch die Stützebenen an K der Normalenrichtungen ξ_μ^* und $-\xi_\mu^*$ definierten und K enthaltenden Halbräume ein nicht ausgeartetes Parallelepiped des m-dimensionalen Raumes, das sich also auf einen Würfel der Kantenlänge eins affin abbilden läßt. Durch die gleiche Affinität gehen die Körper K und K_μ jedoch in ein den Bedingungen a)—c) des § 1 genügendes und damit Ungleichung (II) unterworfenes Körpersystem über, so daß man aus der offenkundigen Affininvarianz der Quotienten $\frac{b(K_\mu, \xi_\mu)}{b(K, \xi_\mu)}$ und $\frac{b(K_\mu, \xi_\mu^*)}{b(K, \xi_\mu^*)}$ aus (*) wegen der beliebigen Wahl von $\varepsilon > 0$ auf die Richtigkeit von (II) auch in diesem Fall schließen darf.

3. Im Fall $m < n$ kann man schließlich durch Betrachtung der m-dimensionalen Orthogonalprojektionen auf eine zu den Richtungen ξ_μ parallele m-dimensionale Ebene an den Fall 2. Anschluß gewinnen.

Eingegangen 22. Mai 1951.

Farbensatz für nichtorientierbare Flächen beliebigen Geschlechtes[1].

Von *Gerhard Ringel* in Bonn.

Das seit 100 Jahren bekannte und bisher ungelöste Vier-Farben-Problem gab frühzeitig Anlaß zu ähnlichen Fragestellungen auf Flächen höheren Geschlechtes, die mit mehr Erfolg behandelt worden sind. P. J. Heawood[2], der sich als erster mit dem Farbenproblem für orientierbare Flächen beschäftigte, führte als neue Begriffe ein die *Maximalzahl der Nachbargebiete* ν und die *chromatische Zahl* χ einer gegebenen Fläche $\mathfrak{F}$. Hierbei ist ν definiert als die größte Zahl mit der Eigenschaft: Auf $\mathfrak{F}$ können ν Länder[3] gezeichnet werden, die alle zueinander (jedes zu jedem) längs mindestens einer Kante benachbart sind. Und χ ist definiert als die kleinste Zahl mit der Eigenschaft: Jeder Länderkomplex[3] auf $\mathfrak{F}$ kann mit χ Farben so bemalt werden, daß jedes Land eine Farbe erhält und nie zwei benachbarte Länder die gleiche Farbe bekommen.

Über die Maximalzahl ν_0 und die chromatische Zahl χ_0 auf der Kugel weiß man nur, daß $4 = \nu_0 \leqq \chi_0 \leqq 5$ ist. Die genaue Bestimmung von χ_0 bildet den Inhalt des Vier-Farben-Problems. Bei den Flächen höheren Geschlechtes ist die Hauptschwierigkeit die Berechnung der Maximalzahl, während der Wert der chromatischen Zahl dann meist leicht gefolgert werden kann. Es zeigte sich in allen bisher bekannten Fällen, daß stets $\nu = \chi$ ist. Eine vom Geschlecht der Fläche abhängende obere Schranke für ν und χ gab Heawood an, während L. Heffter[4] zeigen konnte, daß diese obere Schranke wirklich erreicht wird für die orientierbaren Flächen vom Geschlechte $p = 1, 2, \ldots, 7$ und für gewisse p mit einer sehr speziellen arithmetischen Eigenschaft.

In der vorliegenden Arbeit befassen wir uns mit der Maximalzahl ν_q und der chromatischen Zahl χ_q der nichtorientierbaren Fläche $\mathfrak{F}_q$ vom Geschlechte q. Für $\mathfrak{F}_1$ (Möbiusband) zeigten bereits Heffter und H. Tietze[5], daß $\nu_1 = \chi_1 = 6$ ist. Für $q = 2, 3, 4$ und 6 ist ν_q und χ_q von Ph. Franklin und I. N. Kagno[6] bestimmt worden. In den ersten Paragraphen dieser Arbeit behandeln wir diese Fälle erneut unter einem einheitlichen Gesichtspunkt.

---

[1]) Diese Arbeit diente im Wintersemester 1950/51 als Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde an der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Bonn. — Referent war Herr Prof. Dr. E. Sperner, dem ich für wertvolle Ratschläge und Förderung der Arbeit zu danken habe.

[2]) *P. J. Heawood*, Map-colour-theorem, Quarterly Journal of pure and applied Mathematics **24** (1890), p. 332—338.

[3]) Unter *Länderkomplex* verstehen wir eine Einteilung der geschlossenen Fläche $\mathfrak{F}$ in Dreiecke, wobei gewisse zusammenhängende Dreiecke zu Ländern zusammengefaßt sind. Ein Land kann also zunächst mehrfach zusammenhängend sein und sein Rand kann aus mehreren geschlossenen Kurven bestehen.

[4]) *L. Heffter*, Über das Problem der Nachbargebiete, Math. Ann. **38** (1891), S. 477—508.

[5]) *L. Heffter*, a. a. O. 4. — *H. Tietze*, Einige Bemerkungen über das Problem des Kartenfärbens auf einseitigen Flächen, Jahresber. d. D. Math. Ver. **19** (1910), S. 67—68.

[6]) *Ph. Franklin*, A six color problem, Journ. of Math. Massachuetts **13** (1935), p. 363—369. *I. N. Kagno*, A note on the Heawood color formula, Journal of Math. Massachuetts **14** (1934), p. 228—231.

Sodann zeigen wir mit Hilfe von durch innere Eigenschaften definierten Schemata, daß es für alle Zahlen $n > 3$ von der Form $n = 6s + 3$ möglich ist, n $(n - 1)$-Ecke zu einer geschlossenen nichtorientierbaren Fläche derart zusammenzuheften, daß jedes $(n - 1)$-Eck zu jedem anderen $(n - 1)$-Eck längs genau einer Kante benachbart ist und in jedem Eckpunkt genau drei $(n - 1)$-Ecke zusammenstoßen. Wir geben dann eine untere Schranke für ν_q an und beweisen schließlich als Ergebnis den

Farbensatz. *Für nichtorientierbare Flächen beliebigen Geschlechtes ist die Maximalzahl der Nachbargebiete gleich der chromatischen Zahl.*

Um Mißverständnissen vorzubeugen, sei ausdrücklich bemerkt, daß der Verfasser nicht der Ansicht ist, mit der vorliegenden Arbeit einen Beitrag zur Lösung des klassischen Vier-Farben-Problems geliefert zu haben. Vielmehr entzieht sich dieses wiederum den hier verwendeten Methoden.

§ 1. Obere Schranke für ν und χ.

Der Inhalt dieses Paragraphen bezieht sich sowohl auf orientierbare als auch auf nichtorientierbare Flächen. Wir überlegen uns zunächst, daß es bei der Bestimmung von ν und χ genügt, sich nur auf solche Länderkomplexe zu beschränken, bei denen jedes Land Elementarfläche ist und in jedem Eckpunkt genau drei Länder zusammentreffen. Besitzt nämlich ein Länderkomplex einen Eckpunkt, in dem $h > 3$ Länder zusammentreffen, so kann dieser Eckpunkt in $h - 2$ *Drei-Länder-Ecken* und $h - 3$ Kanten verwandelt werden, ohne daß die vorher vorhandenen Kanten verschwinden (Abb. 1).

Abb. 1.

Besitzt ein Länderkomplex ein Land L, dessen Rand aus mehr als einer geschlossenen Kurve besteht, so können wir sicher zwei Punkte finden, die auf zwei verschiedenen Randkurven von L liegen und die zwei verschiedenen Nachbarländern von L als Randpunkte angehören. (Daß L mindestens zwei benachbarte Länder besitzt, dürfen wir voraussetzen, denn es ist für jede geschlossene Fläche bestimmt $4 \leqq \nu \leqq \chi$.) Diese beiden Punkte können wir durch eine einfache Kurve verbinden, die ganz im Innern von L verläuft. Wir verbreitern dieselbe zu einem schmalen Land, das wir zu einem der beiden Nachbarländer von L dazuschlagen, indem wir die entsprechende kurze Grenze löschen. Bei diesem Reduktionsschritt verringert sich die Anzahl der geschlossenen Randkurven von L um eins, und alle benachbarten Länder im ursprünglichen Länderkomplex grenzen auch nachher noch aneinander. Hierdurch können wir also erreichen, daß der Rand von L nur eine einzige geschlossene Kurve wird.

Dann aber kann es noch sein, daß L keine Elementarfläche, sondern eine Fläche höheren Geschlechtes ist. In diesem Falle nehmen wir wieder zwei Punkte auf dem Rand von L, die zwei verschiedenen Nachbarländern von L angehören. Diese beiden Punkte können wir durch eine einfache Kurve verbinden, die ganz im Innern von L verläuft und L nicht in zwei Teile zerstückelt. Dann ziehen wir wieder das eine Nachbarland von L längs dieser Kurve bis zum anderen Nachbarland, wie beim ersten Reduktionsschritt. Nach Anwendung dieses zweiten Reduktionsschrittes kann es sein, daß der Rand von L

aus zwei geschlossenen Kurven besteht, die wir mit Hilfe des ersten Reduktionsschrittes wieder in eine verwandeln können. Beim zweiten Reduktionsschritt nimmt das Geschlecht von L ab, so daß sich jedenfalls erreichen läßt, daß L zur Elementarfläche wird. Wir können also jeden Länderkomplex auf der geschlossenen Fläche $\mathfrak{F}$ in einen solchen verwandeln, bei dem jedes Land Elementarfläche ist und nur Drei-Länder-Ecken vorkommen. Dabei bleiben alle Grenzen erhalten und es kommen höchstens neue dazu. Hat man ν und χ nur für derartige Länderkomplexe auf $\mathfrak{F}$ bestimmt, so ändern sich diese beiden Zahlen nicht mehr, wenn man sämtliche Länderkomplexe auf $\mathfrak{F}$ zur Konkurrenz zuläßt. Es soll daher im folgenden nur von derartigen Länderkomplexen die Rede sein und Land heißt von jetzt ab Elementarfläche.

Für diese Länderkomplexe nimmt die Eulersche Formel

$$-E + K - F = N$$

(E, K, F = Anzahl der Ecken, Kanten, Länder, N = Charakteristik der Fläche $\mathfrak{F}$) die Form

$$K = 3N + 3F \tag{1}$$

an, denn es gilt $3E = 2K$. Bezeichnen wir mit F_s die Anzahl der Länder mit genau s Kanten, so gilt:

$$F = F_2 + F_3 + F_4 + \cdots,$$
$$2K = 2F_2 + 3F_3 + 4F_4 + \cdots,$$
$$4F_2 + 3F_3 + 2F_4 + F_5 + 6N = F_7 + 2F_8 + 3F_9 + \cdots.$$

Daraus folgt sofort

Hilfssatz 1. *In einem Länderkomplex $\mathfrak{K}_m$ mit m Ländern auf $\mathfrak{F}$ sei k die kleinste vorkommende Kantenanzahl eines Landes. Dann gilt:*

$$(k-6)\, m \leqq 6N.$$

Wegen der Bedeutung von χ gibt es auf $\mathfrak{F}$ einen Länderkomplex $\mathfrak{K}_m$ mit möglichst wenig Ländern, der nicht mit $\chi - 1$ Farben bemalbar ist. Für $\mathfrak{K}_m$ muß natürlich $\chi \leqq m$ gelten. Es gilt aber auch $\chi \leqq k+1$. Denn ist $k < \chi - 1$, so kann man eine von den k Kanten des Landes L_k löschen und erhält einen Länderkomplex $\mathfrak{K}_{m-1}$ mit weniger Ländern, der nach Voraussetzung mit $\chi - 1$ Farben bemalbar ist. Diese Bemalung sei durchgeführt und die gelöschte Kante dann wieder eingezeichnet. Für L_k gibt es nun mindestens noch eine Farbe, denn für die Nachbarländer von L_k sind höchstens $\chi - 2$ von den benutzten $\chi - 1$ Farben verbraucht worden. $\mathfrak{K}_m$ wäre dann mit $\chi - 1$ Farben bemalt. Also ist $\chi \leqq k+1$. Nach Hilfssatz 1 folgt aus $\chi - 7 \leqq k - 6$ und $\chi \leqq m$ für $k \leqq 6$

$$(\chi - 7)\, \chi \leqq 6N,$$
$$\chi^2 - 7\chi - 6N \leqq 0,$$
$$\chi \leqq \left[\frac{7 + \sqrt{49 + 24N}}{2}\right] \text{ für } \chi \geqq 7.$$

Diese Ungleichung gilt aber trivialerweise auch für $\chi \leqq 6$ und $N \geqq -1$. Es gilt also

$$\nu \leqq \chi \leqq \left[\frac{7 + \sqrt{49 + 24N}}{2}\right] \text{ für } N \geqq -1. \tag{2}$$

Dieses Ergebnis geht im wesentlichen auf Heawood zurück, wie wir bereits in der Einleitung erwähnten. Da wir uns von jetzt ab nur mit nichtorientierbaren Flächen $\mathfrak{F}_q$ vom Geschlechte q beschäftigen, haben wir in (2) zu setzen $N = q - 2$ (für die orientierbare Fläche vom Geschlechte p ist $N = 2p - 2$).

Im nächsten Paragraphen behandeln wir den bemerkenswerten Ausnahmefall $q = 2$. Vermutlich ist nämlich $\mathfrak{F}_2$ die einzige geschlossene Fläche, für die in (2) nicht beide Gleichheitszeichen gelten. Wir wählten für die Behandlung dieses Falles $q = 2$ eine Form, die uns gestattet, Begriffe, die für den allgemeinen Fall benötigt werden, bereits an diesem Beispiel einzuführen.

§ 2. Der Fall $q = 2$.

a. *Nachweis von* $\nu_2 = 6$. Wegen (2) ist $\nu_2 \leqq 7$. Da nach Tietze $\nu_1 = 6$ ist, kommt für $\mathfrak{F}_2$ nur $\nu_2 = 6$ oder $\nu_2 = 7$ in Frage. Gäbe es auf $\mathfrak{F}_2$ einen Länderkomplex $\mathfrak{K}_7$ mit 7 Nachbarländern, also mit je mindestens 6 Kanten, so ist für $\mathfrak{K}_7$

$$K \geqq \frac{6 \cdot 7}{2}, \quad F = 7.$$

Es folgt weiter wegen (1):

$$E = 14, \quad K = 21, \quad F = 7.$$

Wenn es also einen $\mathfrak{K}_7$ gibt, so besteht er aus genau 7 Sechsecken; diese seien mit 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 bezeichnet. Beim Durchlaufen des Randes von Sechseck 1 wird man die anderen 6 Sechsecke in irgendeiner Reihenfolge berühren; etwa 2 3 5 7 4 6. Schreibt man diese Reihenfolge für jedes Sechseck auf, so erhält man ein Schema (S_7), welches beispielsweise wie folgt aussehen möge:

	1.	2	3	5	7	4	6
	2.	1	6	7	5	4	3
	3.	4	7	6	5	1	2
(S_7)	4.	3	2	5	6	1	7
	5.	3	6	4	2	7	1
	6.	4	5	3	7	2	1
	7.	1	5	2	6	3	4

In Schema (S_7) gelten folgende Änderungen als unwesentlich:

1. Zyklische Vertauschung der Zahlen einer Zeile.
2. Umkehrung der Reihenfolge der Zahlen einer Zeile.
3. Vertauschung zweier Zeilen mit Umnumerierung.

Wenn nun dieses zunächst beliebig angeschriebene Schema (S_7) eine Darstellung für $\mathfrak{K}_7$ sein soll, so muß folgende Regel R gelten (Abb. 2):

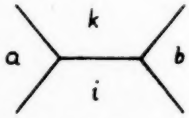

Abb. 2.

Regel R. *Die Zahl k steht in der i-ten Zeile zwischen denselben beiden Zahlen a, b wie die Zahl i in der k-ten Zeile.*

Wir behaupten nun: *Das Schema* (S_7) *ist bis auf unwesentliche Änderungen das einzig mögliche Schema von 7 Zahlen, für welches die Regel* R *gilt.*

Zum Beweise könnten wir alle endlich vielen Schemata mit 7 Zahlen auf die Gültigkeit von Regel R prüfen. Wir werden uns aber besser einer Zeichnung bedienen. Nach Abb. 3a seien zunächst die Sechsecke 1, 2, 3, 4, 5, 6 gezeichnet. Das Sechseck 7 wird sich entweder so verteilen wie in Abb. 3b oder es wird die 7 die dort leergebliebenen Felder

ausfüllen. Da die 1 auch an 4, die 2 auch an 5, die 3 auch an 6 grenzen muß, bleiben nur Abb. 3c oder ihr Spiegelbild mit gewisser Umnumerierung als die beiden einzigen Möglichkeiten. Aus Abb. 3c können wir bereits das ganze Schema (S_7) in eindeutiger Weise ablesen. Das aus der zweiten Möglichkeit abgelesene Schema führt nach Ausführung unwesentlicher Änderungen auf dasselbe Schema (S_7).

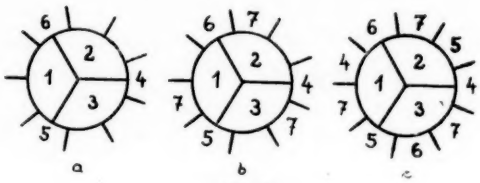

Abb. 3.

Betrachten wir nun (S_7) genauer, so erkennen wir, daß die Regel R mit einer Verschärfung[7]) gilt, die wir gar nicht gefordert hatten, nämlich

Regel R*. *Es steht in der i-ten und k-ten Zeile sogar stets:*

$$\begin{array}{ll} i. & \ldots a\ k\ b \ldots \\ k. & \ldots b\ i\ a \ldots \end{array}$$

Die Zahlen a und b stehen also jeweils vertauscht. Das aber heißt nichts anderes, als daß die durch (S_7) dargestellte Fläche orientierbar ist und zwar der Torus. Da aber (S_7) die einzig mögliche Darstellung für $\mathfrak{K}_7$ ist, kann auf $\mathfrak{F}_2$ ein solches $\mathfrak{K}_7$ gar nicht existieren. Daher ist $\nu_2 = 6$.

b. *Nachweis von* $\chi_2 = 6$. Angenommen, es wäre nicht möglich, jeden Länderkomplex auf $\mathfrak{F}_2$ mit 6 Farben zu bemalen; dann müßte ein Länderkomplex $\mathfrak{K}_m$ existieren mit möglichst wenig Ländern, der nicht mit 6 Farben bemalbar ist.

Wir behaupten jetzt: $\mathfrak{K}_m$ *kann kein Land L mit* 6 *Kanten besitzen.*

Unter den 6 Nachbarländern[8]) von Land L müssen mindestens zwei Länder A, B existieren, die nicht aneinandergrenzen. Sonst hätten wir nämlich mit L insgesamt 7 Länder vor uns, die alle zueinander benachbart sind, was wegen $\nu_2 = 6$ nicht geht. Man lösche nun in $\mathfrak{K}_m$ die beiden Grenzen zwischen A und L und zwischen B und L (Abb. 4).

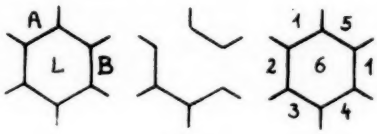

Abb. 4.

Dabei entsteht aus $\mathfrak{K}_m$ ein neuer $\mathfrak{K}_{m-2}$ mit weniger Ländern. $\mathfrak{K}_{m-2}$ sei mit 6 Farben bemalt. Zeichnet man wieder die gelöschten Grenzen ein, so sieht man, daß für L noch mindestens eine Farbe übrig ist; denn A und B haben die gleiche Farbe erhalten (Abb. 4). Noch leichter sieht man ein, daß in $\mathfrak{K}_m$ kein Land existieren kann mit weniger als 6 Kanten. $\mathfrak{K}_m$ besteht daher nur aus Ländern mit mindestens 7 Kanten. Das ist aber wegen Hilfssatz 1 für $N = 0$ nicht möglich.

---

[7]) Natürlich kann die Gültigkeit von Regel R* bei unwesentlicher Änderung von (S_7) eventuell verloren gehen, was hier aber ohne Belang ist.

[8]) Sind diese 6 Nachbarländer nicht alle verschieden, so geht der Schluß natürlich noch einfacher.

§ 3. Die Schemata (S_m) und die Fälle $q \leqq 15$.

Wir fragen uns nun, ob es Länderkomplexe gibt, die aus m Ländern bestehen, die alle zueinander längs genau einer Kante benachbart sind. Jedes Land ist dann also ein $(m-1)$-Eck. Wenn ein solcher Länderkomplex wirklich existiert, so können wir wieder die m Länder numerieren und ein Schema (S_m) angeben mit den Eigenschaften:

(S_m) besteht aus m numerierten Zeilen. In der i-ten Zeile stehen $m-1$ verschiedene Zahlen $\neq i$, die als zyklisch geschlossen anzusehen sind. Die Regel R ist erfüllt.

Nur solche Schemata sollen mit (S_m) bezeichnet werden.

Dieser Sachverhalt läßt sich auch umkehren und wir können sagen, daß es zu jedem Schema (S_m) auch einen dazugehörigen Länderkomplex $\mathfrak{K}_m$ gibt. Zum Beweis sei ein (S_m) gegeben:

$$(S_m)\quad \begin{array}{lllll} 1. & a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1\,m-1} \\ 2. & a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2\,m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \cdots & \cdot \\ m. & a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots & a_{m\,m-1} \end{array}$$

Wir definieren nun eine geschlossene Fläche in der Weise, wie es in der kombinatorischen Flächentopologie üblich ist, wobei also die Grundelemente Kanten sind und die Orientierungen der Kanten durch die Exponenten ± 1 charakterisiert sind. Wir schreiben:

$$((S_m))\quad \begin{array}{lllll} (a_{11}\,1) & (a_{12}\,1) & (a_{13}\,1) & \cdots & (a_{1\,m-1}\,1) \\ (a_{21}\,2) & (a_{22}\,2) & (a_{23}\,2) & \cdots & (a_{2\,m-1}\,2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ (a_{m1}\,m) & (a_{m2}\,m) & (a_{m3}\,m) & \cdots & (a_{m\,m-1}\,m) \end{array}$$

Diese Zweiersymbole sollen die Kanten darstellen. Eine Zeile von diesen Kanten ist ein Polygon $(=(m-1)$-Eck$)$. Wir setzen in $((S_m))$ noch fest:

$$(ik) = (ki), \quad \text{wenn in } (S_m) \text{ steht } \begin{cases} i. & \cdots\, a\,k\,b \cdots \\ k. & \cdots\, a\,i\,b \cdots \end{cases}$$

$$(ik) = (ki)^{-1}, \quad \text{wenn in } (S_m) \text{ steht } \begin{cases} i. & \cdots\, a\,k\,b \cdots \\ k. & \cdots\, b\,i\,a \cdots \end{cases}$$

Das Schema $((S_m))$ definiert nun eine geschlossene Fläche; denn jedes Symbol (ik) kommt genau zweimal vor, nämlich einmal in der i-ten und einmal in der k-ten Zeile. Auf der durch $((S_m))$ dargestellten geschlossenen Fläche $\mathfrak{F}$ ist also ein Länderkomplex gegeben mit m aneinandergrenzenden $(m-1)$-Ecken. Wir müssen noch beweisen, daß in diesem Länderkomplex in jedem Eckpunkt genau drei Länder zusammentreffen. Nehmen wir in (S_m) zwei beliebige, aufeinanderfolgende Zahlen $j\,k$ in der i-ten Zeile, so gibt es in (S_m) für die i-te, j-te, k-te Zeile folgende vier Möglichkeiten:

$$\begin{array}{llll} i. \ldots j\,k \ldots & i. \ldots j\,k \ldots & i. \ldots j\,k \ldots & i. \ldots j\,k \ldots \\ j. \ldots i\,k \ldots & j. \ldots i\,k \ldots & j. \ldots k\,i \ldots & j. \ldots k\,i \ldots \\ k. \ldots i\,j \ldots & k. \ldots j\,i \ldots & k. \ldots i\,j \ldots & k. \ldots j\,i \ldots \end{array}$$

In $((S_m))$ steht also eine der vier Möglichkeiten:

$$\begin{array}{llll} \ldots (ji)\ (ki) \ldots & \ldots (ji)\ (ki) \ldots & \ldots (ji)\ (ki) \ldots & \ldots (ji)\ (ki) \ldots \\ \ldots (ji)\ (kj) \ldots & \ldots (ji)\ (kj) \ldots & \ldots (kj)\ (ji)^{-1} \ldots & \ldots (kj)\ (ji)^{-1} \ldots \\ \ldots (ki)^{-1}\,(kj) \ldots & \ldots (kj)^{-1}\,(ki) \ldots & \ldots (ki)^{-1}\,(kj)^{-1} \ldots & \ldots (kj)\ (ki) \ldots \end{array}$$

In jedem Falle sehen wir, daß mit der Ecke $(ji)\,(ki)$ genau zwei andere Ecken zu identifizieren sind, daß also in unserem Länderkomplex nur Drei-Länder-Ecken auftreten.

Wenn man durch unwesentliche Änderungen in (S_m) nicht erreichen kann, daß in (S_m) die Regel R* gilt, so ist die durch (S_m) dargestellte Fläche nichtorientierbar. In diesem Falle interessieren wir uns für das Geschlecht q dieser Fläche $\mathfrak{F}_q$. Die Anzahl der Kanten ist $K = \frac{m(m-1)}{2}$. Durch Einsetzen in (1) erhalten wir $q = \frac{(m-3)(m-4)}{6}$.

Für eine Zahl $n \equiv 2 \pmod 3$ kann ein Schema (S_n) nicht existieren. Es folgte sonst nämlich, daß die Anzahl der Ecken $E = \frac{n(n-1)}{3}$ keine ganze Zahl ist. Jedoch für alle Zahlen $n \not\equiv 2 \pmod 3$ vermuten wir die Existenz mindestens eines Schemas (S_n). Damit werden wir uns in § 4 und § 7 weiter beschäftigen.

Beim Beweis des Farbensatzes werden wir $\nu_q \geqq 13$ voraussetzen müssen, so daß es zweckvoll ist, zuerst die Fälle $q \leqq 15$ zu behandeln. Hiervon ist $q = 2$ schon in § 2 erledigt.

Wir beweisen: Für $q = 1, 3, \ldots, 9, 11, \ldots, 15$ gilt

$$\nu_q = \chi_q = \left[\frac{7 + \sqrt{1 + 24q}}{2}\right]. \tag{3}$$

Wir nehmen zuerst die Fälle $\mathfrak{F}_q$, für die $m = \frac{7 + \sqrt{1 + 24q}}{2}$ eine ganze Zahl ist. Das trifft für $q = 1, 5, 7, 12, 15$ zu. In diesen einfachen Fällen können wir zugehörige Schemata (S_6), (S_9), (S_{10}), (S_{12}) und (S_{13}) angeben:

1.	2	6	3	4	5
2.	4	3	5	1	6
3.	4	3	5	6	1
4.	6	5	1	3	2
5.	6	4	1	2	3
6.	2	1	3	5	4

1.	12	9	2	7	8	11	4	5	6	3	10
2.	12	3	11	9	1	7	5	4	8	10	6
3.	2	11	4	9	10	1	6	7	8	5	12
4.	2	5	1	11	3	9	7	6	10	12	8
5.	4	1	6	11	12	3	8	9	10	7	2
6.	4	7	3	1	5	11	9	8	12	2	10
7.	6	3	8	1	2	5	10	11	12	9	4
8.	6	9	5	3	7	1	11	10	2	4	12
9.	8	5	10	3	4	7	12	1	2	11	6
10.	8	11	7	5	9	3	1	12	4	6	2
11.	10	7	12	5	6	9	2	3	4	1	8
12.	10	1	9	7	11	5	3	2	6	8	4

1.	3	9	6	5	4	2	7	8
2.	4	1	7	3	5	9	8	6
3.	2	5	8	1	9	4	6	7
4.	6	3	9	8	7	5	1	2
5.	7	4	1	6	8	3	2	9
6.	5	8	2	4	3	7	9	1
7.	9	6	3	2	1	8	4	5
8.	1	7	4	9	2	6	5	3
9.	8	2	5	7	6	1	3	4

1.	2	0	7	8	3	6	9	4	5
2.	4	3	9	7	5	1	0	6	8
3.	4	2	9	0	5	8	1	6	7
4.	6	5	1	9	7	3	2	8	0
5.	6	4	1	2	7	0	3	8	9
6.	8	7	3	1	9	5	4	0	2
7.	8	6	3	4	9	2	5	0	1
8.	0	9	5	3	1	7	6	2	4
9.	0	8	5	6	1	4	7	2	3
0.	2	1	7	5	3	9	8	4	6

1.	2	3	8	11	4	7	9	5	10	6	12	13
2.	3	4	9	12	5	8	10	6	11	7	13	1
3.	4	5	10	13	6	9	11	7	12	8	1	2
4.	5	6	11	1	7	10	12	8	13	9	2	3
5.	6	7	12	2	8	11	13	9	1	10	3	4
6.	7	8	13	3	9	12	1	10	2	11	4	5
7.	8	9	1	4	10	13	2	11	3	12	5	6
8.	9	10	2	5	11	1	3	12	4	13	6	7
9.	10	11	3	6	12	2	4	13	5	1	7	8
10.	11	12	4	7	13	3	5	1	6	2	8	9
11.	12	13	5	8	1	4	6	2	7	3	9	10
12.	13	1	6	9	2	5	7	3	8	4	10	11
13.	1	2	7	10	3	6	8	4	9	5	11	12

Nur bei (S_{12}) haben wir uns zu überzeugen, daß wir durch unwesentliche Änderung nicht erreichen können, daß in (S_{12}) die Regel R* erfüllt ist. Bei den anderen vier Schemata folgt die Nichtorientierbarkeit sofort, weil die zugehörigen Geschlechtszahlen q ungerade sind. Daher:

$$\nu_1 = 6, \quad \nu_5 = 9, \quad \nu_7 = 10, \quad \nu_{12} = 12, \quad \nu_{15} = 13.$$

Schneiden wir aus dem Torus ein Elementarflächenstück heraus und setzen dafür eine Kreuzhaube ein, so erhalten wir $\mathfrak{F}_3$. Wie wir in § 2 sahen, gibt es auf dem Torus 7 Nachbargebiete, also ist $7 \leqq \nu_3$. Nach (2) ist aber auch $\nu_3 \leqq 7$. Es ist natürlich auch stets $\nu_q \leqq \nu_{q+1}$, weil wir von $\mathfrak{F}_q$ durch Hinzufügen einer Kreuzhaube zu $\mathfrak{F}_{q+1}$ gelangen können. Daher:

$$\nu_3 = 7, \quad \nu_6 = 9, \quad \nu_8 = 10, \quad \nu_9 = 10, \quad \nu_{13} = 12, \quad \nu_{14} = 12.$$

Um ν_4 zu bestimmen, schneide man aus der nichtorientierbaren geschlossenen Fläche $\mathfrak{F}_4$ ein Elementarflächenstück heraus. Man erhält ein Modell für $\mathfrak{F}_4$, welches anschaulich gesprochen vier verdrehte Bänder besitzt (Abb. 5). Die Zahl ν_4 behält auch auf diesem Modell ihre Bedeutung. In Abb. 6 ist ein Länderkomplex angegeben, für den die obere Schranke (2) tatsächlich erreicht ist; also ist $\nu_4 = 8$. Daß auch $\nu_{11} = 11$ ist, wird aus Hilfssatz 4 in § 5 folgen. Der Wert von ν_{10} bleibt fraglich. Durch denselben Schluß wie bei $q = 2$ können wir aber jedenfalls sicherstellen, daß $\nu_{10} = \chi_{10}$ ist.

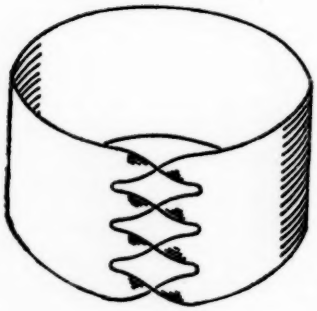

Abb. 5.

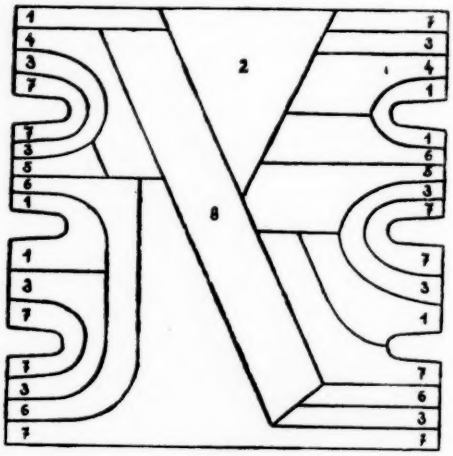

Abb. 6.

§ 4. Konstruktion für Schemata (S_{3n}).

Wir sagen, zwei Zeilen irgendeines Schemas sind zueinander *adjungiert*, wenn für die beiden Zeilen die Regel R gilt. In einem Schema (S_m) sind also alle Zeilen zueinander adjungiert. Anstatt der Zahlen eines Schemas (S_m) werden wir von jetzt ab die Restklassen mod m nehmen. Wir bezeichnen die Zeile, die durch Addition aller Zahlen (auch der ersten numerierenden) mit r aus einer gegebenen Zeile Z entsteht mit $Z + r$:

$$\begin{array}{rlllll} Z: & a_0. & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots\ a_{m-1} \\ Z+r: & a_0+r. & a_1+r & a_2+r & a_3+r & \cdots\ a_{m-1}+r. \end{array}$$

Leicht einzusehen ist

Hilfssatz 2. *Sind die Zeilen Z, Y zueinander adjungiert, so sind auch $Z + r$, $Y + r$ zueinander adjungiert.*

Satz 1. *Für ungerades n existiert stets mindestens ein Schema* (S_{3n}).

Zum Beweis werden wir ein ganz spezielles Schema durch gewisse Festsetzungen beschreiben und dann verifizieren, daß dieses Schema alle Eigenschaften eines (S_{3n}) besitzt. Die im Schema auftretenden Zahlen nehmen wir mod $3n$. Bei ihrer Verteilung werden wir auf ihre Reste mod 3 achten und dementsprechend alle Zahlen die $\equiv 0, 1, 2$ (mod 3) sind, mit a, b, c bezeichnen. Unser Schema soll mit jeder Zeile Z auch die Zeile $Z + 3$ enthalten. Es möge zunächst folgende Gestalt haben:

$$\begin{array}{rrlllllllllll}
 & 1. & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & b_{11} & c_{12} & b_{12} & \cdots & b_{1n-1} & c_{1n} \\
 & 4. & a_{41} & a_{42} & a_{43} & \cdots & a_{4n} & c_{41} & b_{41} & c_{42} & b_{42} & \cdots & b_{4n-1} & c_{4n} \\
(B) & 7. & a_{71} & a_{72} & a_{73} & \cdots & a_{7n} & c_{71} & b_{71} & c_{72} & b_{72} & \cdots & b_{7n-1} & c_{7n} \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
3n-2. & & a_{3n-2,1} & \cdot & \cdot & \cdots & a_{3n-2,n} & c_{3n-2,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & c_{3n-2,n} \\
 & 2. & b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} & a_{21} & c_{21} & a_{22} & c_{22} & \cdots & c_{2n-1} & a_{2n} \\
 & 5. & b_{51} & b_{52} & b_{53} & \cdots & b_{5n} & a_{51} & c_{51} & a_{52} & c_{52} & \cdots & c_{5n-1} & a_{5n} \\
(C) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
3n-1. & & b_{3n-1,1} & \cdot & \cdot & \cdots & b_{3n-1,n} & a_{3n-1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & a_{3n-1,n} \\
 & 3. & c_{31} & c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3n} & b_{31} & a_{31} & b_{32} & a_{32} & \cdots & a_{3,n-1} & b_{3n} \\
 & 6. & c_{61} & c_{62} & c_{63} & \cdots & c_{6n} & b_{61} & a_{61} & b_{62} & a_{62} & \cdots & a_{6,n-1} & b_{6n} \\
(A) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
 & 3n. & c_{3n,1} & c_{3n,2} & \cdot & \cdots & c_{3n,n} & b_{3n,1} & a_{3n,1} & \cdot & \cdot & \cdots & a_{3n,n-1} & b_{3n,n}
\end{array}$$

Der erste Index gibt die Nummer der Zeile an und ist gegebenenfalls auch mod $3n$ zu nehmen. Wir schreiben zur Abkürzung $2m = 3n + 1$ und setzen fest

$$\text{für (B):}\quad \begin{array}{lll} b_{1+6k,k} & = 1 & (k = 1, 2, \ldots, n-1) \\ c_{m-1+3k,k} & = 2 & (k = 1, 2, \ldots, n) \\ a_{1+3\left[\frac{k}{2}\right](-1)^k,k} & = 3 & (k = 1, 2, \ldots, n); \end{array}$$

$$\text{für (C):}\quad \begin{array}{lll} c_{3n+2-3k,k} & = 2 & (k = 1, 2, \ldots, n-1) \\ a_{2+(k-1)(m-2),k} & = 3 & (k = 1, 2, \ldots, n) \\ b_{m+3-6\left[\frac{k}{2}\right](-1)^k,k} & = 1 & (k = 1, 2, \ldots, n); \end{array}$$

$$\text{für (A):}\quad \begin{array}{lll} a_{3+3k,k} & = 3 & (k = 1, 2, \ldots, n-1) \\ b_{3+(k-1)(m+1),k} & = 1 & (k = 1, 2, \ldots, n) \\ c_{3-3\left[\frac{k}{2}\right](-1)^k,k} & = 2 & (k = 1, 2, \ldots, n). \end{array}$$

Durch diese Festsetzung ist nun unser Schema beschrieben. Es kommt nie in eine Zeile zweimal dieselbe Zahl zu stehen; denn n ist mit 2, mit $\frac{n-1}{2}$ und mit $\frac{n+1}{2}$ teilerfremd. Weil mit jeder Zeile Z auch die Zeile $Z+3$ in unserem Schema vorkommen soll, gilt stets

$$(4) \qquad a_{i+3k,e} = a_{i,e} + 3k, \quad b_{i+3k,e} = b_{i,e} + 3k, \quad c_{i+3k,e} = c_{i,e} + 3k.$$

Zu (B). Die Zeilen von (B) sind alle zueinander adjungiert. Wegen Hilfssatz 2 genügt es zu zeigen, daß die 1. Zeile zu allen anderen Zeilen in (B) adjungiert ist. Es steht in der 1. und $(1+6s)$-ten Zeile:

$$\begin{array}{rcccccccc}
1. & \cdots & c_{1,n-s} & & b_{1,n-s} & c_{1,n-s+1} & \cdot & \cdot & \cdots \\
1+6s. & \cdots & \cdot & & \cdot & c_{1+6s,s} & b_{1+6s,s} & c_{1+6s,s+1} & \cdots
\end{array}$$

Das ergibt nach (4) ausgerechnet:

$$\begin{array}{rcccccccc}
1. & \cdots & 4+3s-m & & 1+6s & 1+3s-m & \cdot & \cdot & \cdots \\
1+6s. & \cdots & \cdot & & \cdot & 4+3s-m & 1 & 1+3s-m & \cdots
\end{array}$$

Zu (C). Auch alle Zeilen von (C) sind zueinander adjungiert:

$$\begin{array}{rcccccc}
2. & \cdots & a_{2,2s} & & c_{2,2s} & a_{2,2s+1} & \cdots \\
2. & \cdots & 3+(1-2s)(m-2) & & 2+6s & 3-2s(m-2) & \cdots \\
2+6s. & \cdots & a_{2+6s,n-2s} & & c_{2+6s,n-2s} & a_{2+6s,n-2s+1} & \cdots \\
2+6s. & \cdots & 3+(1-2s)(m-2) & & 2 & 3-2s(m-2) & \cdots
\end{array}$$

Zu (A). Auch alle Zeilen von (A) sind untereinander adjungiert:

$$\begin{array}{rcccccc}
3. & \cdots & b_{3,n-s+1} & & a_{3,n-s+1} & b_{3,n-s+2} & \cdots \\
3. & \cdots & s(m+1)+1 & & 3s & (s-1)(m+1)+1 & \cdots \\
3s. & \cdots & b_{3s,s-1} & & a_{3s,s-1} & b_{3s,s} & \cdots \\
3s. & \cdots & s(m+1)+1 & & 3 & (s-1)(m+1)+1 & \cdots
\end{array}$$

Zu (AB). Um zu beweisen, daß alle Zeilen von (A) zu allen Zeilen von (B) adjungiert sind, müssen wir einige Fälle unterscheiden. Es steht in der $3s$-ten Zeile für $s = 2, 3, \ldots, \frac{n-1}{2}, \frac{n+3}{2}, \ldots, n$:

$$\begin{array}{rcccccc}
3s. & \cdots & a_{3s,2s-2} & & b_{3s,2s-1} & a_{3s,2s-1} & \cdots \\
3s. & \cdots & 6-3s & & 1 & 3-3s & \cdots
\end{array}$$

in der 1. Zeile für $s = 2, 3, \ldots, \frac{n-1}{2}$:

$$\begin{array}{rcccccc}
1. & \cdots & a_{1,2s-2} & & a_{1,2s-1} & a_{1,2s} & \cdots \\
1. & \cdots & 6-3s & & 3s & 3-3s & \cdots
\end{array}$$

in der 1. Zeile für $s = \frac{n+3}{2}, \ldots, n$:

$$\begin{array}{rcccccc}
1. & \cdots & a_{1,2n-2s+1} & & a_{1,2n-2s+2} & a_{1,2n-2s+3} & \cdots \\
1. & \cdots & 3-3s & & 3s & 6-3s & \cdots
\end{array}$$

in der 1. bzw. 3. bzw. $(m+1)$-ten Zeile für die beiden Randfälle $s = 1$ und $s = \frac{n+1}{2}$:

$$\begin{array}{rcccccccccc}
1. & 3 & 3n & \cdots & m+4 & m+1 & m & \cdot & \cdots & \cdot & m+3 \\
3. & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & m+3 & 1 & 3n & \cdots & \cdot & \cdot \\
m+1. & m & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & m+4 & 1
\end{array}$$

In jedem Falle ist also die 1. Zeile zu der $(3s)$-ten Zeile adjungiert, woraus nach Hilfssatz 2 folgt, daß alle Zeilen von (A) zu allen Zeilen von (B) adjungiert sind.

Zu (AC). Auch alle Zeilen von (A) sind zu allen Zeilen von (C) adjungiert. Es steht für $s = 1, 2, \ldots, \frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}, \ldots, n-1$:

$$\begin{array}{lllll} 2+3s. & \cdots & c_{2+3s,\,2n-2s} & a_{2+3s,\,2n-2s+1} & c_{2+3s,\,2n-2s+1} & \cdots \\ 2+3s. & \cdots & 2-3s & 3 & 5-3s & \cdots \end{array}$$

für $s = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$:

$$\begin{array}{lllll} 3. & \cdots & c_{3,\,2s-1} & c_{3,\,2s} & c_{3,\,2s+1} & \cdots \\ 3. & \cdots & 5-3s & 2+3s & 2-3s & \cdots \end{array}$$

für $s = \frac{n+3}{2}, \ldots, n-1$:

$$\begin{array}{lllll} 3. & \cdots & c_{3,\,2n-2s} & c_{3,\,2n-2s+1} & c_{3,\,2n-2s+2} & \cdots \\ 3. & \cdots & 2-3s & 2+3s & 5-3s & \cdots \end{array}$$

und für die beiden noch fehlenden Fälle $s = n$ und $s = \frac{n+1}{2}$:

$$\begin{array}{lcccccccccc} 3. & 2 & 5 & \cdots & m & m+3 & 1 & \cdots & \cdot & 3-m \\ 2. & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & 3-m & 3 & 5 & \cdots & \cdot & \cdot \\ m+3. & 1 & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & m & 3 \end{array}$$

Zu (CB). Auch alle Zeilen von (B) sind zu allen Zeilen von (C) adjungiert. Es steht für $s = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}, \frac{n+3}{2}, \ldots, n-1$:

$$\begin{array}{lllll} 6s-m. & \cdots & b_{6s-m,\,2s-1} & c_{6s-m,\,2s} & b_{6s-m,\,2s} & \cdots \\ 6s-m. & \cdots & 6-6s-m & 2 & -6s-m & \cdots \end{array}$$

für $s = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$:

$$\begin{array}{lllll} 2. & \cdots & b_{2,\,2s-1} & b_{2,\,2s} & b_{2,\,2s+1} & \cdots \\ 2. & \cdots & 6-6s-m & 6s-m & -6s-m & \cdots \end{array}$$

für $s = \frac{n+3}{2}, \ldots, n-1$:

$$\begin{array}{lllll} 2. & \cdots & b_{2,\,2n-2s} & b_{2,\,2n-2s+1} & b_{2,\,2n-2s+2} & \cdots \\ 2. & \cdots & -6s-m & 6s-m & 6-6s-m & \cdots \end{array}$$

und für die beiden Fälle $s = \frac{n+1}{2}$ und $s = n$:

$$\begin{array}{lcccccccccccc} 3-m. & & \cdot & & \cdot & \cdots & \cdot & 3 & 2 & -3-m & \cdots & \cdot & \cdot \\ -m. & 2-m & & \cdot & & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & 6-m & 2 \\ 2. & -m & 6-m & & \cdots & -3-m & & 3-m & 3 & \cdot & \cdots & \cdot & 2-m \end{array}$$

Bezeichnet (BCA) das Schema, das durch Untereinanderschreiben der Schemata (B), (C) und (A) entsteht, so gilt also im Schema (BCA) ausnahmslos die Regel R, und die Existenz eines (S_{3n}) ist somit nachgewiesen. Wir bemerken noch, daß alle so konstruierten Schemata (S_{3n}) für $n > 1$ stets nichtorientierbare Flächen darstellen. Nehmen wir nämlich etwa die 3-te, 6-te und 9-te Zeile, so kann durch unwesentliche Änderungen in (S_{3n}) nicht erreicht werden, daß für diese drei Zeilen untereinander die Regel R* gilt.

1. Beispiel: S_9 in § 3.

2. Beispiel ($n = 7$):

1.	3	21	6	18	9	15	12	11	16	8	10	5	4	2	19	20	13	17	7	14
4.	6	3	9	21	12	18	15	14	19	11	13	8	7	5	1	2	16	20	10	17
7.	9	6	12	3	15	21	18	17	1	14	16	11	10	8	4	5	19	2	13	20
10.	12	9	15	6	18	3	21	20	4	17	19	14	13	11	7	8	1	5	16	2
13.	15	12	18	9	21	6	3	2	7	20	1	17	16	14	10	11	4	8	19	5
16.	18	15	21	12	3	9	6	5	10	2	4	20	19	17	13	14	7	11	1	8
19.	21	18	3	15	6	12	9	8	13	5	7	2	1	20	16	17	10	14	4	11
2.	10	16	4	1	19	7	13	3	5	15	8	6	11	18	14	9	17	21	20	12
5.	13	19	7	4	1	10	16	6	8	18	11	9	14	21	17	12	20	3	2	15
8.	16	1	10	7	4	13	19	9	11	21	14	12	17	3	20	15	2	6	5	18
11.	19	4	13	10	7	16	1	12	14	3	17	15	20	6	2	18	5	9	8	21
14.	1	7	16	13	10	19	4	15	17	6	20	18	2	9	5	21	8	12	11	3
17.	4	10	19	16	13	1	7	18	20	9	2	21	5	12	8	3	11	15	14	6
20.	7	13	1	19	16	4	10	21	2	12	5	3	8	15	11	6	14	18	17	9
3.	2	5	20	8	17	11	14	1	21	10	18	19	15	7	12	16	9	4	6	13
6.	5	8	2	11	20	14	17	4	3	13	21	1	18	10	15	19	12	7	9	16
9.	8	11	5	14	2	17	20	7	6	16	3	4	21	13	18	1	15	10	12	19
12.	11	14	8	17	5	20	2	10	9	19	6	7	3	16	21	4	18	13	15	1
15.	14	17	11	20	8	2	5	13	12	1	9	10	6	19	3	7	21	16	18	4
18.	17	20	14	2	11	5	8	16	15	4	12	13	9	1	6	10	3	19	21	7
21.	20	2	17	5	14	8	11	19	18	7	15	16	12	4	9	13	6	1	3	10

§ 5. Untere Schranke für ν_q.

Hilfssatz 3. *Auf der geschlossenen nichtorientierbaren Fläche $\mathfrak{F}_r$ vom Geschlechte r gibt es einen nur aus drei Ländern bestehenden Länderkomplex, in dem jedes Land zu jedem der beiden anderen längs genau $r + 1$ Kanten benachbart ist* ($r \geqq 1$).

Zum Beweis geben wir eine Vorschrift an, wie drei $(2r + 2)$-Ecke zu einer geschlossenen Fläche zusammenzuheften sind. Wir benützen dabei wieder die in der kombinatorischen Flächentopologie übliche Darstellungsart. Es sei zunächst r ungerade. Die Vorschrift lautet:

$$
(5)\qquad
\begin{array}{l}
b_{r+1}\ c_{r+1}\ b_r\ c_r\ b_{r-1}\ c_{r-1} \cdots \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \cdots b_2\ c_2\ b_1\ c_1^{-1} \\
c_1\ a_1\ c_2\ a_2\ c_3\ a_3 \cdots \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \cdots c_r\ a_r\ c_{r+1}\ a_{r+1} \\
a_{r+1}^{-1}\ b_r\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \cdots a_4^{-1}\ b_3\ a_2^{-1}\ b_1\ a_1\ b_2^{-1}\ a_3\ b_4^{-1} \cdots \cdot\ \cdot\ a_r\ b_{r+1}^{-1}
\end{array}
$$

Die Buchstaben bedeuten Kanten. Die drei Zeilen sind die drei $(2r + 2)$-Ecke. Gleichbezeichnete Kanten sind gleich (entgegengesetzt) orientiert zu identifizieren, wenn sie mit gleichen (verschiedenen) Exponenten ± 1 versehen sind. Der durch (5) definierte Länderkomplex hat die in Hilfssatz 3 gewünschten Eigenschaften. Wir haben zu beweisen, daß in jedem Eckpunkt genau drei Kanten zusammenlaufen. Dazu müssen wir verfolgen, wie die Eckpunkte, die hier als Kantenpaare geschrieben sind, zu identifizieren sind.

In (5) steht für $i = 3, 5, \ldots, r$:

$$
\begin{array}{lll}
\cdots\ \cdot\ b_i\ c_i \cdots & & \cdots\ c_i\ b_{i-1} \cdots \\
\cdots\ \cdot\ a_{i-1}\ c_i \cdots & \text{und} & \cdots\ c_i\ a_i \cdots \\
\cdots\ b_i\ a_{i-1}^{-1}\ \cdot \cdots & & \cdots\ b_{i-1}^{-1}\ a_i \cdots
\end{array}
$$

für $i = 2, 4, \ldots, r+1$:

$$\begin{array}{lllll} \cdots & b_i & c_i & \cdots & \\ \cdots & a_{i-1} & c_i & \cdots & \\ \cdots & a_{i-1} & b_i^{-1} & \cdots & \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{lllll} \cdots & c_i & b_{i-1} & \cdot & \cdots \\ \cdots & c_i & a_i & \cdot & \cdots \\ \cdots & \cdot & a_i^{-1} & b_{i-1} & \cdots, \end{array}$$

für $i = 1$:

$$\begin{array}{lllll} \cdots & b_1 & c_1^{-1} & \cdot & \cdots \\ \cdots & \cdot & c_1 & a_1 & \cdots \\ \cdots & \cdot & b_1 & a_1 & \cdots \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{lllll} \cdots & \cdot & \cdot & c_1^{-1} & b_{r+1} & \cdots \\ \cdots & \cdot & a_{r+1} & c_1 & \cdot & \cdots \\ \cdots & b_{r+1}^{-1} & a_{r+1}^{-1} & \cdot & \cdot & \cdots. \end{array}$$

Wir können in (5) durch eventuelle Änderung der Orientierung der drei $(2r+2)$-Ecke nicht herbeiführen, daß jede Kante einmal den Exponenten $+1$ und einmal -1 erhält. Daher ist die durch (5) dargestellte Fläche nichtorientierbar. Die Anzahl der Kanten im Länderkomplex (5) ist $K = 3(r+1)$. Daraus folgt nach (1), daß das Geschlecht der Fläche gleich r ist.

Für gerades r geht der Beweis genau so, nur müssen wir in (5) die dritte Zeile ersetzen durch:

$$b_{r+1} \; a_r^{-1} \; \cdots \; a_4^{-1} \; b_3 \; a_2^{-1} \; b_1 \; a_1 \; b_2^{-1} \; a_3 \; b_4^{-1} \; \cdots \; b_r^{-1} \; a_{r+1}$$

Hilfssatz 4. *Für jedes q gilt*

$$\nu_q + 1 \leqq \nu_{q+r} \qquad \left(r = \left\lfloor \frac{\nu_q - 2}{2} \right\rfloor\right).$$

Beweis. Wegen der Bedeutung von ν_q gibt es auf $\mathfrak{F}_q$ einen Länderkomplex $\mathfrak{K}$ mit ν_q Nachbarländern. Entweder besitzt $\mathfrak{K}$ ein Land L mit genau $\nu_q - 1$ Kanten oder wir können dies durch geringe Abänderung erreichen. Wir entfernen nun aus $\mathfrak{K}$ das Land L und erhalten eine einfach berandete Fläche $\mathfrak{B}_q$, auf der $\nu_q - 1$ Länder gezeichnet sind. Wir entfernen dann aus dem nach Hilfssatz 3 gebildeten Länderkomplex auf $\mathfrak{F}_r$ eines der drei Länder und erhalten eine einfach berandete Fläche $\mathfrak{B}_r$, auf der zwei Länder A, B gezeichnet sind. Jedes dieser beiden Länder hat genau $r+1$ Kanten mit dem Rand von $\mathfrak{B}_r$ gemeinsam.

Aus $\mathfrak{B}_q$ und $\mathfrak{B}_r$ erhält man durch Identifizieren der beiden Ränder eine geschlossene Fläche und zwar $\mathfrak{F}_{q+r}$. Hierbei können zunächst die beiden Ränder beliebig topologisch

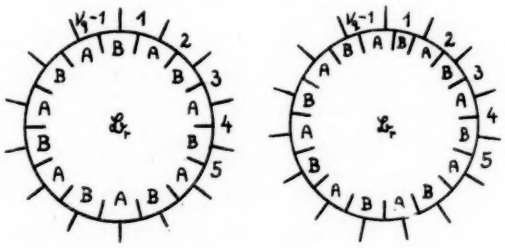

Abb. 7.

aufeinander abgebildet und dann zugeordnete Punkte identifiziert werden. In unserem Falle kann dies bei Wahl von $r = \frac{\nu_q - 3}{2}$ für ν_q ungerade ($r = \frac{\nu_q - 2}{2}$ für ν_q gerade) in der durch Abb. 7 beschriebenen Art so bewerkstelligt werden, daß schließlich auf $\mathfrak{F}_{q+r}$ ein Länderkomplex mit $\nu_q + 1$ Ländern entsteht, die alle zueinander benachbart sind.

Satz 2. *Es gilt die Abschätzung*

$$\left[\frac{7+\sqrt{1+24q}}{2}\right]-2 \leqq \nu_q \leqq \chi_q \leqq \left[\frac{7+\sqrt{1+24q}}{2}\right].$$

Beweis. Nach Satz 1 ist die Existenz eines (S_{6s+3}) gesichert. Die durch (S_{6s+3}) dargestellte nichtorientierbare geschlossene Fläche hat das Geschlecht $6s^2-s$, denn die Anzahl der Kanten ist $K=(6s+3)(3s+1)$, woraus nach (1) das Geschlecht folgt. Wir haben also $6s+3 \leqq \nu_{6s^2-s}$ und nach (2) ist $\nu_{6s^2-s} \leqq 6s+3$, d. h.

$$\nu_{6s^2-s} = 6s+3 \qquad (s=1,2,\ldots).$$

Wenden wir jetzt Hilfssatz 4 dreimal an, nämlich für

$$q=6s^2-s,\quad q=6s^2+2s,\quad q=6s^2+5s+1,$$

beachten dabei, daß $\nu_{q_1} \leqq \nu_{q_2}$ ist für $q_1 < q_2$, und schätzen zugleich mit (2) nach oben ab, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
6s+3 &= \nu_{6s^2-s},\\
6s+4 \leqq \nu_{6s^2+2s} &\leqq \left[\frac{7+\sqrt{1+24(6s^2+2s)}}{2}\right] < 6s+5,\\
6s+5 \leqq \nu_{6s^2+5s+1} &\leqq \left[\frac{7+\sqrt{1+24(6s^2+5s+1)}}{2}\right] = 6s+6,\\
6s+6 \leqq \nu_{6s^2+8s+2} &\leqq \left[\frac{7+\sqrt{1+24(6s^2+8s+2)}}{2}\right] = 6s+7,\\
\nu_{6s^2+11s+4} &\leqq \left[\frac{7+\sqrt{1+24(6s^2+11s+4)}}{2}\right] = 6s+8.
\end{aligned}$$

Es folgt weiter

$$\begin{aligned}
6s+3 \leqq \nu_q \leqq \left[\frac{7+\sqrt{1+24q}}{2}\right] &\leqq 6s+5 \quad \text{für} \quad 6s^2-s \leqq q \leqq 6s^2+2s,\\
6s+4 \leqq \nu_q \leqq \left[\frac{7+\sqrt{1+24q}}{2}\right] &\leqq 6s+6 \quad ,, \quad 6s^2+2s \leqq q \leqq 6s^2+5s+1,\\
6s+5 \leqq \nu_q \leqq \left[\frac{7+\sqrt{1+24q}}{2}\right] &\leqq 6s+7 \quad ,, \quad 6s^2+5s+1 \leqq q \leqq 6s^2+8s+2,\\
6s+6 \leqq \nu_q \leqq \left[\frac{7+\sqrt{1+24q}}{2}\right] &\leqq 6s+8 \quad ,, \quad 6s^2+8s+2 \leqq q \leqq 6s^2+11s+4.
\end{aligned}$$

Für ein beliebig gegebenes q sei s möglichst groß, aber mit $6s^2-s \leqq q$ gewählt; dann liegt q in mindestens einem dieser vier Intervalle, und jedesmal folgt Satz 2.

§ 6. Farbensatz.

Farbensatz. *Für nichtorientierbare Flächen beliebigen Geschlechtes ist die Maximalzahl der Nachbargebiete gleich der chromatischen Zahl, also* $\nu_q = \chi_q$.

Der Beweis, der hier indirekt geführt wird, gilt nur für $q > 15$, wie wir aus dem nachfolgenden Punkt 2 ersehen können. $q > 15$ darf jedoch vorausgesetzt werden, da der Farbensatz für $q \leqq 15$ bereits in § 3 bewiesen worden ist.

Angenommen, es wäre $\nu_q < \chi_q$; dann müßte ein Minimalländerkomplex $\mathfrak{K}_m$ auf $\mathfrak{F}_q$ existieren, der nicht mit ν_q Farben bemalbar ist und aus möglichst wenig Ländern besteht. Die Eigenschaften dieses $\mathfrak{K}_m$ wollen wir studieren und schließlich zeigen, daß $\mathfrak{K}_m$ nicht existieren kann.

1. *$\mathfrak{K}_m$ besitzt kein Land mit weniger als $\nu_q + 1$ verschiedenen Nachbarländern.*

Würde $\mathfrak{K}_m$ ein Land L besitzen mit nur ν_q Nachbarländern, so sind unter diesen ν_q Nachbarländern von L mindestens zwei Länder A, B, die nicht aneinandergrenzen. Sonst hätten wir nämlich mit L insgesamt $\nu_q + 1$ Länder vor uns, die alle aneinandergrenzten. Löschen wir alle Grenzen zwischen A und L und zwischen B und L und verfahren wir wieder so, wie in § 2, Abb. 4, so erhalten wir den Widerspruch. Hätte L weniger als ν_q Nachbarländer, so genügte es, nur alle Grenzen von L mit einem einzigen Nachbarland zu löschen.

2. *$\mathfrak{K}_m$ besteht aus höchstens $\nu_q + 4$ Ländern.*

Nach Punkt 1 besitzt $\mathfrak{K}_m$ kein Land mit weniger als $\nu_q + 1$ Kanten. Wir können also Hilfssatz 1 aus § 1 anwenden. Das ergibt

$$\nu_q + 1 \leqq k, \qquad (\nu_q - 5)\, m \leqq 6q - 12.$$

Aus Satz 2 folgern wir

$$\frac{7 + \sqrt{1 + 24q}}{2} - 3 < \nu_q, \quad \text{d. h.} \quad 6q < \nu_q^2 - \nu_q.$$

Durch Einsetzen kommen wir zu

$$(\nu_q - 5)\, m < \nu_q^2 - \nu_q - 12,$$
$$m < \nu_q + 4 + \frac{8}{\nu_q - 5}.$$

In § 3 zeigten wir, daß $\nu_{13} = 15$ ist. Wegen unserer Voraussetzung $q > 15$ gilt also $\nu_q \geqq 13$ und wir erhalten die Behauptung 2.

3. *$\mathfrak{K}_m$ besteht aus mindestens $\nu_q + 3$ Ländern.*

Nach Punkt 1 hat in $\mathfrak{K}_m$ jedes Land mindestens $\nu_q + 1$ Nachbarländer. Es muß also $\mathfrak{K}_m$ mindestens $\nu_q + 2$ Länder besitzen. Bestünde nun $\mathfrak{K}_m$ aus genau $\nu_q + 2$ Ländern, so folgte nach Punkt 1, daß jedes Land zu jedem anderen benachbart ist, was auf $\mathfrak{F}_q$ nicht vorkommen kann; denn die Maximalzahl ist ja ν_q.

Es ist noch zu zeigen, daß dieses $\mathfrak{K}_m$ nicht existiert. Für diesen Zweck ist es vorteilhaft, eine etwas allgemeinere Aussage über Graphen zu beweisen.

$\mathfrak{G}_m = \{A_1 A_2 A_3 \cdots A_m\}$ sei eine Menge von m Elementen mit der Eigenschaft:

Unter den $\frac{m(m-1)}{2}$ Elementepaaren seien gewisse mit benachbart bezeichnet und die übrigen mit getrennt.

Eine solche Menge soll *Graph* heißen. Wir konstruieren aus $\mathfrak{G}_m$ einen abgeleiteten Graph $\mathfrak{G}'_{m-1}$, indem wir ein beliebiges benachbartes Elementepaar (etwa $A_1 A_2$) aus $\mathfrak{G}_m$ als Element von $\mathfrak{G}'_{m-1}$ betrachten und dazu die restlichen Elemente von $\mathfrak{G}_m$ nehmen:

$$\mathfrak{G}'_{m-1} = \{(A_1 A_2)\, A_3 \cdots A_m\}.$$

Alle Elemente, die in $\mathfrak{G}_m$ mit A_1 oder A_2 benachbart waren, sollen in $\mathfrak{G}'_{m-1}$ mit $(A_1 A_2)$ benachbart sein. Die Elemente $A_3 A_4 \cdots A_m$ untereinander sollen in $\mathfrak{G}'_{m-1}$ dieselben Nachbarbeziehungen haben wie in $\mathfrak{G}_m$. Eine solche Ableitung $\mathfrak{G}'_{m-1}$ kann i. a. auf verschiedene Arten gebildet werden, je nachdem welches benachbarte Elementepaar man zu einem neuen Element zusammenschmelzen läßt. In noch größerem Maß gilt dies für die höheren Ableitungen.

Ein Graph $\mathfrak{G}_m$ heiße *n-separabel*, wenn es eine ganze Zahl n gibt mit den beiden Eigenschaften:

N 1. *Es kommt in $\mathfrak{G}_m$ und in allen seinen auf beliebige Weise gebildeten Ableitungen beliebig hoher Ordnung nie vor, daß n Elemente alle zueinander benachbart sind.*

N 2. *Jedes Element aus $\mathfrak{G}_m$ ist zu mindestens n Elementen benachbart.*

Ein Graph heiße mit χ Farben bemalbar, wenn jedem Element eine von χ Farben so zugeordnet werden kann, daß benachbarten Elementen stets verschiedene Farben zugeordnet sind.

Satz 3. *Für jedes $\nu \geqq 1$ gilt die Aussage: Entweder es gibt keinen $(\nu + 1)$-separablen Graph mit $\nu + 3$ Elementen oder ein solcher ist mit ν Farben bemalbar.*

Beweis. Es ist klar, daß kein 2-separabler Graph existiert[9]). Der Satz 3 gilt also für $\nu = 1$. Er sei bewiesen für alle $\nu \leqq \mu - 1$. Falls alle Graphen mit $\mu + 3$ Elementen nicht $(\mu + 1)$-separabel sind, gilt Satz 3 also auch für $\nu = \mu$. Falls das Gegenteil der Fall ist, so sei $\mathfrak{G}_{\mu+3}$ ein $(\mu + 1)$-separabler Graph, der wegen Eigenschaft N 2 nur solche Elemente enthält, die zu genau einem oder zu genau keinem Element getrennt sind.

a) Wenn in $\mathfrak{G}_{\mu+3}$ ein Element E existiert, das zu allen anderen Elementen benachbart ist, so bilden wir den Graph $\mathfrak{G}_{\mu-1+3} = \mathfrak{G}_{\mu+3} - E$, indem wir das Element E aus $\mathfrak{G}_{\mu+3}$ herausnehmen. $\mathfrak{G}_{\mu-1+3}$ ist ein μ-separabler Graph, denn jede Ableitung von $\mathfrak{G}_{\mu-1+3}$ wird nach Hinzufügen von E zu einer Ableitung von $\mathfrak{G}_{\mu+3}$. Nun ist $\mathfrak{G}_{\mu-1+3}$ nach Induktionsvoraussetzung mit $\mu - 1$ Farben bemalbar. Die μ-te Farbe kann dem E zugesprochen werden und $\mathfrak{G}_{\mu+3}$ ist mit μ Farben bemalt.

b) Wenn in $\mathfrak{G}_{\mu+3}$ jedes Element zu genau einem Element getrennt ist, so folgt, $\mu + 3$ ist gerade und es gibt genau $\frac{\mu+3}{2}$ getrennte Elementepaare. Weil wir hier getrennten Elementen dieselbe Farbe zuordnen können, ist $\mathfrak{G}_{\mu+3}$ mit $\frac{\mu+3}{2}$ Farben bemalbar. Für $\mu > 1$ heißt das, es sind sicher höchstens μ Farben nötig.

Satz 3a. *Für jedes $\nu \geqq 5$ gilt die Aussage: Entweder es gibt keinen $(\nu + 1)$-separablen Graph mit $\nu + 4$ Elementen oder ein solcher ist mit ν Farben bemalbar.*

Wir beweisen auch diesen Satz mit Hilfe vollständiger Induktion nach ν. Induktionsanfang: Für $\nu = 5$ gilt der Satz 3a, denn es gibt keinen aus 9 Elementen bestehenden 6-separablen Graph, was wir uns wie folgt überlegen wollen. Wir zeigen, daß jeder aus 9 Elementen bestehende Graph $\mathfrak{G}_9$, der die Eigenschaft N 2 hat, nicht auch noch die Eigenschaft N 1 besitzen kann. Wegen Eigenschaft N 2 besitzt $\mathfrak{G}_9$ nur Elemente, die entweder

α) zu höchstens einem anderen Element getrennt sind oder

β) zu genau zwei anderen Elementen getrennt sind.

Besitzt nun unser $\mathfrak{G}_9$ zwei benachbarte Elemente von der Sorte α, so wollen wir diese beiden Elemente als getrennt bezeichnen und erhalten dann einen neuen Graph $\mathfrak{G}_9^{(1)}$, der auch noch die Eigenschaft N 2 besitzt. Falls auch $\mathfrak{G}_9^{(1)}$ zwei benachbarte Elemente der Sorte α enthält, so wiederholen wir diesen Schritt. Sehr bald gelangen wir so zu einem Graph $\mathfrak{G}_9^*$, der keine zwei benachbarte Elemente der Sorte α enthält (eventuell ist bereits $\mathfrak{G}_9 = \mathfrak{G}_9^*$). Dieser Graph $\mathfrak{G}_9^*$ hat immer noch die Eigenschaft N 2.

Abb. 8 veranschaulicht neun Graphen mit je 9 Elementen, die hier als Punkte erscheinen. Zwei durch eine Kante verbundene Punkte stellen zwei getrennte Elemente dar. Diese neun Graphen sind, wie leicht zu sehen ist, die einzigen aus 9 Elementen bestehenden Graphen, die die Eigenschaft N 2 haben und keine zwei benachbarte Elemente der Sorte α enthalten. Sie sind also gleichzeitig die einzigen Graphen, die als $\mathfrak{G}_9^*$

[9]) Zu Satz 3 sei erwähnt, daß es einen 8-separablen Graph aus 10 Elementen gibt. Ebenso gibt es als Beispiel zu Satz 3a einen aus 11 Elementen bestehenden 8-separablen Graph.

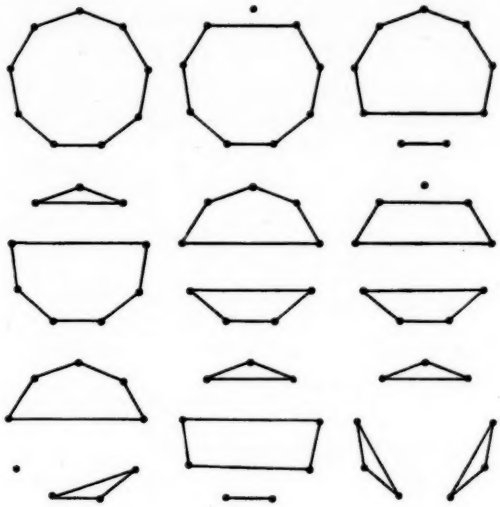

Abb. 8.

auftreten können. Nun kann man sich leicht überzeugen, daß diese neun Graphen nicht die Eigenschaft N 1 besitzen, da man zu jedem dieser Graphen eine dritte oder gar zweite Ableitung finden kann, die aus 6 oder gar 7 zueinander benachbarten Elementen besteht.

Da nun alle $\mathfrak{G}_9^*$ nicht die Eigenschaft N 1 besitzen, folgt dies erst recht auch für die übrigen oben betrachteten $\mathfrak{G}_9$. Für $\nu = 5$ gilt also Satz 3a. Er sei bewiesen für alle $\nu \leqq \mu - 1$. Falls alle Graphen mit $\mu + 4$ Elementen nicht $(\mu + 1)$-separabel sind, gilt Satz 3a auch für $\nu = \mu$. Falls aber ein $(\mu + 1)$-separabler Graph $\mathfrak{G}_{\mu+4}$ existiert, so schließen wir wie folgt:

a) Wenn $\mathfrak{G}_{\mu+4}$ ein Element besitzt, das zu allen anderen Elementen benachbart ist, so folgt wie bei Satz 3, daß $\mathfrak{G}_{\mu+4}$ mit μ Farben bemalbar ist.

b) Wenn $\mathfrak{G}_{\mu+4}$ nur Elemente besitzt, die zu genau einem oder zu genau zwei Elementen getrennt sind, so lassen sich wegen $\mu + 4 \geqq 10$ stets mindestens vier elementfremde, getrennte Elementpaare in $\mathfrak{G}_{\mu+4}$ auswählen. Das aber garantiert uns die Bemalbarkeit von $\mathfrak{G}_{\mu+4}$ mit μ Farben.

Nunmehr gelingt der Beweis des Farbensatzes von S. 142 mühelos. Es sei $q > 15$ fest gegeben. Unser Minimalländerkomplex $\mathfrak{K}_m$ sei als Graph aufgefaßt und bleibe als solcher mit demselben Buchstaben bezeichnet. Benachbarte Länder seien benachbarte Elemente. Wenn wir in $\mathfrak{K}_m$ alle Grenzen zwischen zwei benachbarten Ländern löschen, so bedeutet dies, daß wir eine Ableitung des Graphen $\mathfrak{K}_m$ bilden. Aber auch jede Ableitung des Graphen $\mathfrak{K}_m$ kann in dieser Weise gedeutet werden. Der Graph $\mathfrak{K}_m$ ist also $(\nu_q + 1)$-separabel. Weil aber $m = \nu_q + 3$ oder $m = \nu_q + 4$ ist, folgt weiter nach Satz 3 oder Satz 3a, daß entweder $\mathring{\mathfrak{K}}_m$ nicht existiert oder mit ν_q Farben bemalbar ist. $\mathfrak{K}_m$ war aber als nicht bemalbar mit ν_q Farben vorausgesetzt. Also existiert unser Minimalländerkomplex $\mathfrak{K}_m$ überhaupt nicht und der Farbensatz ist hiermit bewiesen.

§ 7. Zur Bestimmung von ν_q.

Um für möglichst viele Geschlechtszahlen q die Maximalzahl ν_q und damit auch die chromatische Zahl χ_q bestimmen zu können, wird man danach trachten, für möglichst viele Zahlen n Schemata (S_n) anzugeben. Wir beweisen zu diesem Zweck

Satz 4. *Aus der Existenz eines Schemas* (S_n) *mit geradem* n *folgt die Existenz eines Schemas* (S_{2n-2}).

Zum Beweis geben wir ein Verfahren an, wie ein (S_{2n-2}) aus (S_n) konstruiert werden kann. Wir schreiben zunächst nur die ungeradzahligen Zeilen an, die alle aus der ersten Zeile Z durch Addition mit 2 hervorgehen sollen:

$$
(\mathrm{U})\qquad
\begin{array}{rcccccc}
Z = & 1. & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,2n-3} \\
Z+2 = & 3. & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,2n-3} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
Z+2n-4 = & 2n-3. & a_{2n-3,1} & \cdot & \cdot & \cdots & a_{2n-3,2n-3}.
\end{array}
$$

Nehmen wir aus jeder Spalte ein a und geben ihm einen bestimmten Wert, so sind hiermit alle a eindeutig bestimmt. Wir setzen:

$$
a_{11} = 2, \quad \begin{array}{l} a_{k,k-1} = 2 \\ a_{k,k} = 2n-k \end{array} \qquad (k = 3, 5, \ldots, 2n-3).
$$

Durch diese Festsetzung kommt in der i-ten Zeile jede der Restklassen $\not\equiv i \pmod{2n-2}$ genau einmal vor, wie es sein soll. $Z+k-1$ und $Z+2n-k-1$ sind zueinander adjungiert, denn es steht:

$$
\begin{array}{rcccccccc}
Z+k-1 = & k. & \cdots & 2 & 2n-k & 2n-2 & \cdot & \cdot & \cdots \\
Z+2n-k-1 = & 2n-k. & \cdots & \cdot & \cdot & 2 & k & 2n-2 & \cdots
\end{array}
$$

Nach Hilfssatz 2 folgt: Für $k = 1, l = 2, 4, 6, \ldots, 2n-2$ ist

$$
Z+k-1+l \text{ zu } Z+2n-k-1+l \text{ adjungiert}.
$$

Das heißt aber, zwei beliebige ungerade Zeilen $Z+2i$ und $Z+2j$ sind zueinander adjungiert. Wir brauchen nämlich nur zu setzen:

$$
l = i+j-1, \quad k = i-j+2.
$$

Die geraden Zeilen sollen nun nicht durch Addition mit 2 aus einer einzigen Zeile hervorgehen. Das soll gewissermaßen nur für den linken Teil zutreffen, genauer gesagt, die geraden Zeilen mögen so aussehen:

$$
(\mathrm{G})\qquad
\begin{array}{rcccccccccc}
2. & 4 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & 2n-2 & b_{2,n+1} & b_{2,n+2} & \cdots & b_{2,2n-3} \\
4. & 6 & a_{22}+2 & a_{23}+2 & \cdots & a_{2n}+2 & 2 & b_{4,n+1} & b_{4,n+2} & \cdots & b_{4,2n-3} \\
6. & 8 & a_{22}+4 & a_{23}+4 & \cdots & a_{2n}+4 & 4 & b_{6,n+1} & b_{6,n+2} & \cdots & b_{6,2n-3} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
2n-2. & 2 & a_{22}-2 & a_{23}-2 & \cdots & a_{2n}-2 & 2n-4 & b_{2n-2,n+1} & \cdot & \cdots & b_{2n-2,2n-3}
\end{array}
$$

Für die zweite Zeile setzen wir (k ungerade):

$$
2.\quad 4\ 3\ 2n-3\ 7\ 2n-7 \cdots 2n-k+4\ k\ 2n-k \cdots 2n-5\ 5\ 1\ b_{2,n+1} \cdots b_{2,2n-3}.
$$

Dadurch werden alle a_{2i} bestimmt und zwar sind alle ungerade. Die zweite Zeile ist adjungiert zu jeder (ungeraden) Zeile von (U), denn in den ungeraden Zeilen steht:

$$
\begin{array}{rcccccccccl}
k. & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & 2n-k+4 & 2 & 2n-k & \cdots & \cdot & (k = 5, 7, \ldots 2n-3) \\
1. & 2 & 2n-2 & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & 5 & \\
3. & 4 & 2 & 2n-3 & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot &
\end{array}
$$

Nach Hilfssatz 2 sind also alle (ungeraden) Zeilen von (U) zu allen (geraden) Zeilen von (G) adjungiert. Es fehlt nur noch die Adjungiertheit aller geraden Zeilen untereinander, die wir durch geschickte Festsetzung der geraden Zahlen b erreichen werden. Hierbei machen

wir endlich Gebrauch von der vorausgesetzten Existenz eines (S_n). Die Zahlen dieses (S_n) bezeichnen wir mit $0, 2, 4, \ldots, 2n-2$. Nach Ausführung unwesentlicher Änderungen kann (S_n) auf die Form

$$\begin{array}{rlllll}
0. & 2 & 4 & 6 & 8 & \cdots\ 2n-2 \\
2. & 4 & 0 & 2n-2 & c_{24} & \cdots\ c_{2,n-1} \\
4. & 6 & 0 & 2 & c_{44} & \cdots\ c_{4,n-1} \\
6. & 8 & 0 & 4 & c_{64} & \cdots\ c_{6,n-1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots\ \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots\ \cdot \\
2n-2. & 2 & 0 & 2n-4 & c_{2n-2,4} & \cdots\ c_{2n-2,n-1}
\end{array}$$

gebracht werden.

Wir setzen nun

$$c_{2i,k} = b_{2i,n+k-3} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ k = 4, 5, \ldots, n-1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist unser Schema (S_{2n-2}) vollständig beschrieben und zugleich nachgewiesen, daß ausnahmslos die Regel R erfüllt ist.

Man beachte, daß alle so konstruierten Schemata nichtorientierbare Flächen darstellen. Nimmt man nämlich drei beliebige ungerade Zeilen, so kann durch unwesentliche Änderung in (S_{2n-2}) nicht erreicht werden, daß diese drei Zeilen die Regel R* befolgen.

1. Beispiel: (S_{10}) in § 3.

2. Beispiel $(n = 10)$:

1.	2	18	15	16	11	14	7	12	3	10	17	8	13	6	9	4	5
3.	4	2	17	18	13	16	9	14	5	12	1	10	15	8	11	6	7
5.	6	4	1	2	15	18	11	16	7	14	3	12	17	10	13	8	9
7.	8	6	3	4	17	2	13	18	9	16	5	14	1	12	15	10	11
9.	10	8	5	6	1	4	15	2	11	18	7	16	3	14	17	12	13
11.	12	10	7	8	3	6	17	4	13	2	9	18	5	16	1	14	15
13.	14	12	9	10	5	8	1	6	15	4	11	2	7	18	3	16	17
15.	16	14	11	12	7	10	3	8	17	6	13	4	9	2	5	18	1
17.	18	16	13	14	9	12	5	10	1	8	15	6	11	4	7	2	3
2.	4	3	17	7	13	11	9	15	5	1	18	14	16	10	12	6	8
4.	6	5	1	9	15	13	11	17	7	3	2	8	16	12	18	10	14
6.	8	7	3	11	17	15	13	1	9	5	4	14	18	10	16	12	2
8.	10	9	5	13	1	17	15	3	11	7	6	2	4	16	18	12	14
10.	12	11	7	15	3	1	17	5	13	9	8	14	4	18	6	16	2
12.	14	13	9	17	5	3	1	7	15	11	10	2	6	16	4	18	8
14.	16	15	11	1	7	5	3	9	17	13	12	8	10	4	6	18	2
16.	18	17	13	3	9	7	5	11	1	15	14	2	10	6	12	4	8
18.	2	1	15	5	11	9	7	13	3	17	16	8	12	4	10	6	14

Wir vermuten für alle $q \neq 2$:

$$\nu_q = \chi_q = \left[\frac{7 + \sqrt{1 + 24q}}{2}\right]. \tag{3}$$

Für ein gegebenes q können wir versuchen mit Hilfe von Satz 1, Satz 4, Hilfssatz 4 und (2) die Maximalzahl ν_q zu bestimmen, so wie wir es bereits in § 3 begonnen haben. Wir kommen auf diese Weise zu einem Beweis von (3) für die Geschlechtszahlen $q = 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 28, 29, 30, 35, 36, 37, 38, 39, \ldots\ldots$

Eingegangen 3. Februar 1951.

Arithmetische Untersuchung des Charakterringes einer endlichen Gruppe.

Mit Anwendungen auf die Bestimmung des minimalen Darstellungskörpers einer endlichen Gruppe und in der Theorie der Artinschen L-Funktionen.

Von *Peter Roquette* in Hamburg*).

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung 148
§ 1. Allgemeine Strukturtheorie des $\mathfrak{p}$-adischen Charakterringes einer endlichen Gruppe.
1. Der $\mathfrak{p}$-adische Charakterring. Funktionenkonvergenz 152
2. Die Zerlegung des $\mathfrak{p}$-adischen Charakterringes in seine Blöcke. Definition der $\mathfrak{p}$-Oberklassen 153
3. Bestimmung des einzigen Primideals eines Blocks. Folgerungen für die arithmetische Struktur des $\mathfrak{p}$-adischen Charakterringes 154
§ 2. Gruppentheoretische Bestimmung der $\mathfrak{p}$-Oberklassen einer endlichen Gruppe.
4. Charakterisierung der $\mathfrak{p}$-Oberklassen 156
5. Erster Schritt zur Bestimmung der $\mathfrak{p}$-Oberklassen 157
6. Zweiter Schritt zur Bestimmung der $\mathfrak{p}$-Oberklassen 158
§ 3. Gruppeninvariante Beschreibung der Struktur eines Blocks.
7. Erzeugung eines Blocks aus einem Elementarblock mit Hilfe des Induktionsprozesses 159
8. Die Isomorphie eines Blocks zu einem Teilring des $\mathfrak{p}$-adischen Charakterringes einer $\mathfrak{p}$-Untergruppe 161
§ 4. Die beiden gruppentheoretischen Induktionsprinzipien und ihre Anwendung zur Bestimmung des minimalen Darstellungskörpers einer endlichen Gruppe sowie in der Theorie der Artinschen L-Funktionen.
9. Das Induktionsprinzip für elementare Charaktere 163
10. Das Induktionsprinzip für zyklische Charaktere 165
11. Bestimmung des minimalen Darstellungskörpers einer endlichen Gruppe 166
12. Aus der Theorie der Artinschen L-Funktionen 167
Schlußbemerkung über die direkte Herleitung der Induktionsprinzipien 167

Einleitung.

In der Theorie der Darstellungen einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ über einem Körper der Charakteristik 0 spielt der Begriff des zu einer Darstellung $\mathfrak{D}$ gehörigen *Charakters* eine große Rolle. Darunter versteht man diejenige Funktion ξ, die jedem Gruppenelement G die Spur der darstellenden Matrix $\mathfrak{D}(G)$ zuordnet:

$$\xi(G) = \operatorname{Spur} \mathfrak{D}(G).$$

Umgekehrt ist die Darstellung $\mathfrak{D}$ durch ihren Charakter bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt. Aus diesem Grunde kann man bei der Behandlung vieler Probleme die Darstellungen von $\mathfrak{G}$ durch ihre Charaktere ersetzen, was oft den Vorteil bietet, daß man mit diesen besser rechnen kann als mit jenen. Die Untersuchung der Charaktere ist daher seit jeher eine der Hauptaufgaben der Darstellungstheorie gewesen.

*) Den Herren *H. Hasse* und *E. Witt* bin ich für zahlreiche wertvolle Verbesserungsvorschläge und Anregungen und dem ersteren für eine eingehende kritische Durchsicht dieser Arbeit sehr dankbar.

Die Zusammensetzung von gegebenen Darstellungen zu neuen spiegelt sich in einer algebraischen Verknüpfung der zugehörigen Charaktere wider: der diagonalen Aneinanderreihung zweier Darstellungen entspricht die *Addition*, der Kroneckerschen Produktbildung die *Multiplikation* der Charaktere als Gruppenfunktionen. Demnach besitzt die Menge X_0 der Charaktere von $\mathfrak{G}$ eine durch $\mathfrak{G}$ eindeutig bestimmte algebraische Struktur, deren Untersuchung sich die vorliegende Arbeit zum Ziele setzt. Dabei sollen hauptsächlich die *arithmetischen* Eigenschaften von X_0 betrachtet werden.

Bezüglich der *Addition* läßt sich diese Struktur leicht angeben: Gemäß der Reduzierbarkeit der Darstellungen von $\mathfrak{G}$ auf ihre absolut irreduziblen Bestandteile, welche nach dem Jordan-Hölderschen Satz eindeutig bestimmt sind, kann jeder Charakter ξ in eine eindeutig bestimmte Summe von absolut irreduziblen Charakteren zerlegt werden. Dies kann man durch die Formel

$$\xi = \sum_{\chi} a_\chi \chi \qquad (a_\chi \text{ in } \Gamma_0) \tag{1}$$

mitteilen, in welcher über alle absolut irreduziblen Charaktere χ von $\mathfrak{G}$ summiert wird. Γ_0 bezeichnet dabei den Bereich der ganzrationalen nichtnegativen Zahlen. Demnach ist X_0 bezüglich der Addition eine Halbgruppe ohne Elemente endlicher Ordnung, in der die absolut irreduziblen Charaktere χ eine Basis bezüglich Γ_0 bilden. Die Länge dieser Basis, d. h. die Anzahl der absolut irreduziblen Charaktere, ist bekanntlich gleich der Anzahl k der Klassen konjugierter Elemente von $\mathfrak{G}$. Durch diese Angaben, verbunden mit der expliziten Formel

$$a_\chi = \frac{1}{(\mathfrak{G}:1)} \sum_{X \text{ in } \mathfrak{G}} \xi(X)\, \chi(X^{-1})$$

zur Berechnung der in (1) auftretenden Vielfachheiten a_χ, ist die additive Struktur von X_0 vollständig bestimmt.

Um zu weitergehenden Aussagen zu gelangen, hat man auch die *Multiplikation* heranzuziehen. Zweckmäßig erweitert man vorher noch den Bereich X_0 der Charaktere, indem man zu diesen noch die sämtlichen Differenzen von Charakteren hinzunimmt. Das ermöglicht leichteres Rechnen. Der neue Bereich X besteht aus allen Linearkombinationen

$$\sum_{\chi} a_\chi \chi \qquad (a_\chi \text{ in } \Gamma), \tag{2}$$

wo Γ den Integritätsbereich *aller* ganzrationalen Zahlen bezeichnet.

Die Multiplikation der Charaktere (1) aus X_0 überträgt sich auf alle Funktionen (2) aus X, wodurch X zu einem assoziativen und kommutativen Ring wird, welcher der *Charakterring* von $\mathfrak{G}$ heißen soll, weil er durch die Charaktere von $\mathfrak{G}$ erzeugt wird; der Name „Charakter" wird jedoch für die Spurfunktionen (1) von Darstellungen vorbehalten. Der Charakterring X besitzt ein Einselement, nämlich den zur identischen Darstellung gehörigen Charakter, welchen wir mit der Zahl 1 identifizieren können.

Die arithmetischen Eigenschaften des Charakterringes geben sich in seiner Primidealstruktur kund, sowie in der Zerlegung der Primzahlen p von Γ in X. Zu deren Untersuchung erweitern wir den Koeffizientenbereich Γ von X auf den Bereich Γ_p der ganzen rationalen p-adischen Zahlen, d. h. wir betrachten alle Gruppenfunktionen der Form (2) mit beliebigen Vielfachheiten a_χ aus Γ_p. So entsteht der *p-adische Charakterring* X_p. Für die Arithmetik bedeutet der Übergang von X zu X_p die Nichtbeachtung aller derjenigen Teilbarkeitsbeziehungen, welche sich auf Primzahlen $\neq p$ beziehen, während sich die p-Teilbarkeiten isomorph übertragen.

Die arithmetische Struktur von X_p wird weitgehend durch die Struktur der Restklassenalgebra $\mathfrak{X}_p = \mathsf{X}_p/p\mathsf{X}_p$ von X_p nach dem durch p erzeugten Ideal $p\mathsf{X}_p$ beschrieben: $\mathfrak{X}_p$ ist als kommutative Algebra über dem Primkörper der Charakteristik p eine direkte Summe von vollständig primären Ringen, deren Radikalrestklassenringe Körper sind und eindeutig den Primidealen von X_p als deren Restklassenkörper entsprechen. Zur Untersuchung dieser Algebra ist es zweckmäßig, eine nochmalige Erweiterung des Koeffizientenbereiches vorzunehmen, und zwar so, daß sie vollständig zerfällt. Dann kann man ja aus der Struktur der zerfallenden Algebra Rückschlüsse auf die Struktur von $\mathfrak{X}_p$ selbst ziehen. Es wird sich nun herausstellen, daß ein Zerfall bereits bei Adjunktion der g_0-ten Einheitswurzeln stattfindet, wenn man mit g_0 den Exponenten von $\mathfrak{G}$ bezeichnet. Demgemäß adjungieren wir zum Körper P_p der rationalen p-adischen Zahlen die g_0-ten Einheitswurzeln. Mit $\mathfrak{p}$ bezeichnen wir den Primdivisor des so entstehenden Körpers $\mathsf{K}_\mathfrak{p} = \mathsf{P}_p\left(\sqrt[g_0]{1}\right)$ und mit $\mathsf{I}_\mathfrak{p}$ den Integritätsbereich der $\mathfrak{p}$-adisch ganzen Zahlen aus $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$, welcher bekanntlich aus Γ_p durch Ringadjunktion der g_0-ten Einheitswurzeln entsteht. Indem wir nun in (2) beliebige Vielfachheiten aus $\mathsf{I}_\mathfrak{p}$ zulassen, erweitern wir X_p zum *$\mathfrak{p}$-adischen Charakterring* $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$, dem unsere weiteren Untersuchungen hauptsächlich gelten werden.

Wir betrachten die Zerlegung

$$\mathsf{X}_\mathfrak{p} = \sum_{\mathsf{B}} \mathsf{B} \tag{3}$$

von $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ in direkt unzerlegbare Ideale B, welche wir die *Blöcke* von $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ nennen[1]). Man erhält offenbar alle Primideale von $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$, wenn man zu den Primidealen V eines jeden Blocks B die direkten Summen $\hat{\mathsf{B}} + \mathsf{V}$ bildet, wobei $\hat{\mathsf{B}}$ die direkte Summe der von B verschiedenen Blöcke ist. *So entsteht die Aufgabe, die direkte Zerlegung von $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ in seine Blöcke zu konstruieren und die Struktur eines solchen Blocks in gruppeninvarianter Weise zu beschreiben.* Zur Lösung dieser Aufgabe werden wir in dieser Arbeit die folgenden Sätze beweisen:

I. *Jeder Block B von $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ enthält genau ein Primideal V, welches aus allen denjenigen Funktionen aus B besteht, deren Funktionswerte sämtlich durch $\mathfrak{p}$ teilbar sind*[2]).

II. *Die Blöcke von $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ können umkehrbar eindeutig den p-regulären*[3]) *Klassen von $\mathfrak{G}$ zugeordnet werden. Insbesondere ist ihre Anzahl gleich der Anzahl k_p dieser Klassen.*

Das genaue Studium jener Zuordnung der Blöcke zu den p-regulären Klassen, welche in gruppeninvarianter Weise vor sich geht, liefert aber weit mehr als nur die angegebene Anzahlaussage. Es ergibt sich nämlich noch:

III. *Jeder Block B ist auf genau angebbare Weise zu einem Teilring T des $\mathfrak{p}$-adischen Charakterringes Π einer gewissen p-Untergruppe von $\mathfrak{G}$ isomorph. Diese ist durch B bis auf willkürliche Transformationen aus $\mathfrak{G}$ bestimmt, nämlich als eine p-Sylowgruppe $\mathfrak{P}$ des Normalisators $\mathfrak{N}_R$ eines Elements R, welches aus derjenigen p-regulären Klasse stammt, die nach* II *dem Block B zugeordnet ist.*

Natürlich ist es unbefriedigend, wenn man nur weiß, daß B zu „irgendeinem" Teilring von Π isomorph ist. Es handelt sich daher weiter darum, diesen Teilring T innerhalb Π invariant zu kennzeichnen. Dazu beweisen wir:

---

[1]) Diese Definition befindet sich im Einklang mit den bisher üblichen Definitionen der Blöcke eines Ringes. Vgl. dazu *R. Brauer*, On the arithmetic in a group ring, Proc. Nat. Acad. Sc. **30** (1944), S. 109; sowie *Artin-Nesbitt-Thrall*, Rings with minimum condition, University of Michigan Publ. **1** (1948), S. 107.

[2]) Dieser Satz ist ganz analog zu dem aus der Algebrentheorie bekannten Satz, daß jede (Maximal-)Ordnung einer einfachen $\mathfrak{p}$-adischen Algebra nur ein einziges Primideal enthält. Vgl. *Deuring*, Algebren, Erg. d. Math. **4**, 1 (1935), S. 99, Satz 10.

[3]) Eine Klasse heißt p-regulär, wenn die gemeinsame Ordnung aller ihrer Elemente prim zu p ist.

IV. T *besteht aus all denjenigen Funktionen aus* Π, *deren Funktionswerte nur von der Klasse in* $\mathfrak{N}_R$ *des Arguments abhängen. Daher ist die Struktur von* B *schon durch die Struktur von* $\mathfrak{P}$ *und die Einbettung von* $\mathfrak{P}$ *in* $\mathfrak{N}_R$ *bestimmt.*

Darüber hinaus werden wir in invarianter Weise ein Erzeugendensystem von T angeben.

Der Zusammenhang zwischen B und Π ergibt sich mit Hilfe des *Induktionsprozesses*: Bekanntlich entsteht aus einer gegebenen Darstellung $\mathfrak{D}$ einer Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ durch Überlagerung mit der Permutationsdarstellung der Restklassen von $\mathfrak{G}$ modulo $\mathfrak{H}$ eine „induzierte Darstellung" $\mathfrak{D}^*$ von $\mathfrak{G}$. Die Charaktere ξ von $\mathfrak{D}$ und ξ^* von $\mathfrak{D}^*$ hängen dabei durch die Formel

$$\xi^*(G) = \frac{1}{(\mathfrak{H} : 1)} \sum_{X \text{ in } \mathfrak{G}} \xi(G^X) \qquad (G^X = X^{-1} G X) \tag{4}$$

zusammen, in welcher $\xi(G^X) = 0$ zu setzen ist, wenn G^X nicht in $\mathfrak{H}$ liegt. Durch dieselbe Formel erklären wir für jede beliebige Funktion auf $\mathfrak{H}$ eine *induzierte Funktion* auf $\mathfrak{G}$ und erhalten auf diese Weise eine lineare Abbildung des $\mathfrak{p}$-adischen Charakterringes von $\mathfrak{H}$ in den von $\mathfrak{G}$.

V. *Es zeigt sich nun, daß zwar nicht* Π *selbst, jedoch ein gewisser anderer, zu* Π *isomorpher* $\mathfrak{p}$*-adischer Funktionenring durch den Induktionsprozeß in den Block* B *übergeht, wodurch der Zusammenhang zwischen* Π *und* B *hergestellt wird.*

Auf eine genaue Darlegung dieses Sachverhalts, die sich im Text findet, verzichten wir an dieser Stelle, weil sie zu sehr in Einzelheiten führen würde.

Die Sätze I—V bieten in der angegebenen Form ein schönes Beispiel für die gruppentheoretische Methode der Reduktion von Aussagen über die Gruppe $\mathfrak{G}$ auf Aussagen über ihre p-Untergruppen. Dabei ist besonders beachtenswert, daß die Struktur eines Blocks B bereits durch die Einbettung der zugehörigen p-Gruppe $\mathfrak{P}$ in eine Untergruppe $\mathfrak{N}_R$ bestimmt ist (IV), die im allgemeinen eine *echte* Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist (außer wenn R im Zentrum von $\mathfrak{G}$ liegt).

Die Methode, Aussagen über die Charaktere von $\mathfrak{G}$ auf Aussagen über einfachere Charaktere ihrer Untergruppen zu reduzieren, bedarf jedoch noch weiterer Ausarbeitung, um eine für die Anwendungen brauchbare Form zu erhalten. Demgemäß werden in § 4 zwei gruppentheoretische Induktionsprinzipien aus unseren Resultaten hergeleitet, welche zwar weniger besagen als die Struktursätze I—V, aber für viele Anwendungen ausreichen. Besonders das zweite Induktionsprinzip spielt in der Zahlentheorie eine hervorragende Rolle; aus ihm ergeben sich zum Beispiel die folgenden beiden Sätze:

VI. *Zu jeder Darstellung einer endlichen Gruppe* $\mathfrak{G}$ *vom Exponenten* g_0 *gibt es eine äquivalente Darstellung über dem Körper der* g_0*-ten Einheitswurzeln.*

VII. *Die Artinschen L-Funktionen einer galoisschen Zahlkörpererweiterung sind meromorph.*

Beide Sätze, deren erster Beweis von R. Brauer gegeben wurde[4]), konnten bisher nur auf recht umständliche Weise bewiesen werden, wogegen die hier gegebenen Herleitungen bedeutende Vereinfachungen darstellen (vgl. die Schlußbemerkung). Es sei ferner bemerkt, daß das zweite Induktionsprinzip auch die Grundlage für die neue Hassesche Theorie der verallgemeinerten Gaußschen Summen darstellt, die von Hasse im November 1951 in Hamburg vorgetragen wurde[5]). Aus diesen Gründen ist das Induktions-

[4]) *R. Brauer*, Applications of induced characters, Amer. J. of Math. **69** (1947), S. 710, Satz 1. — *R. Brauer*, On Artin's *L*-series with general group characters, Ann. of Math. 48 (1947) S. 502—14.

[5]) *H. Hasse*, Gaußsche Summen zu Normalkörpern über endlich-algebraischen Zahlkörpern, Abh. Deutsche Akad. d. Wiss. Berlin, Math.-naturw. Kl., Jahrg. 1952, Nr. 1.

prinzip (38) aus § 4, **10** wohl als die wichtigste Folgerung der hier entwickelten Theorie anzusehen. Andere Folgerungen, besonders in der Theorie der modularen Darstellungen, beabsichtige ich in einer weiteren Arbeit aufzuzeigen. Schließlich sei auch auf die in diesem Heft abgedruckte Arbeit von E. Witt hingewiesen, in welcher ein Teil meiner Sätze (allerdings in gehöriger Verallgemeinerung) zur Anwendung kommt.

§ 1. Allgemeine Strukturtheorie des $\mathfrak{p}$-adischen Charakterringes einer endlichen Gruppe.

1. Der $\mathfrak{p}$-adische Charakterring. Funktionenkonvergenz.

Gemäß den Ausführungen in der Einleitung seien:

$\mathfrak{G}$	eine endliche Gruppe der Ordnung g und vom Exponenten g_0;
X	der Charakterring von $\mathfrak{G}$, bestehend aus allen Linearkombinationen $\sum_\chi a_\chi \chi$ der irreduziblen Charaktere von $\mathfrak{G}$ mit ganzrationalen Vielfachheiten a_χ;
p	eine beliebige, aber festgewählte Primzahl;
P_p	der Körper der rationalen p-adischen Zahlen;
Γ_p	der Integritätsbereich der p-adisch ganzen Zahlen in P_p;
$\mathsf{K}_\mathfrak{p} = \mathsf{P}_p\left(\sqrt[g_0]{1}\right)$	der Körper der g_0-ten Einheitswurzeln über P_p $\left(\text{dabei ist } \mathfrak{p} \text{ der Primdivisor von } \mathsf{P}_p\left(\sqrt[g_0]{1}\right)\right)$;
$\mathsf{I}_\mathfrak{p} = \Gamma_p\left[\sqrt[g_0]{1}\right]$	der in $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$ enthaltene Integritätsbereich der $\mathfrak{p}$-adisch ganzen Zahlen;
$\mathfrak{K}_\mathfrak{p} = \mathsf{I}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}\,\mathsf{I}_\mathfrak{p}$	der Restklassenkörper von $\mathsf{I}_\mathfrak{p}$[6]).

Wir bilden dann den $\mathfrak{p}$-*adischen Charakterring* $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{G}$, bestehend aus allen Linearkombinationen $\sum_\chi a_\chi \chi$ mit Vielfachheiten aus $\mathsf{I}_\mathfrak{p}$. Dieser ist ein Teilring des Ringes *aller* Funktionen auf $\mathfrak{G}$ mit Werten aus $\mathsf{I}_\mathfrak{p}$; denn da die Werte $\chi(G)$ der irreduziblen Charaktere als g_0-te Einheitswurzelsummen in $\mathsf{I}_\mathfrak{p}$ liegen, so liegen auch die Werte $\sum_\chi a_\chi \chi(G)$ einer beliebigen Funktion aus $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ in $\mathsf{I}_\mathfrak{p}$. Demgemäß können wir in $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ neben den algebraischen Operationen der Addition und der Multiplikation noch eine arithmetische Operation der $\mathfrak{p}$-*adischen Konvergenz* einführen: Eine Folge $\xi^{(n)}$ von Funktionen aus $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ konvergiere $\mathfrak{p}$-adisch gegen die Funktion ξ, wenn für jedes Gruppenelement G der $\mathfrak{p}$-adische Limes der Funktionswerte $\xi^{(n)}(G)$ existiert und gleich $\xi(G)$ ist. Wir schreiben dann

$$\mathfrak{p}\text{-}\lim_{n\to\infty} \xi^{(n)} = \xi .$$

Daß $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ bei dieser Konvergenz abgeschlossen ist, sieht man so ein: Die Vielfachheiten a_χ und die Funktionswerte $\xi(G)$ einer willkürlichen Funktion ξ aus $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ stehen auf Grund der Orthogonalitätsrelationen für die irreduziblen Charaktere χ in dem umkehrbar eindeutigen Zusammenhang:

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi(G) &= \sum_\chi a_\chi \chi(G) \\ a_\chi &= \frac{1}{g} \sum_G \xi(G)\, \chi(G^{-1}) \end{aligned} \right\},$$

[6]) Es kommt uns nur darauf an, daß $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{K}_\mathfrak{p}$ die g_0-ten Einheitswurzeln enthalten. Daher sind alle Sätze dieser Arbeit auch gültig, wenn der Körper $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$ eine *beliebige*, die g_0-ten Einheitswurzeln enthaltende endlich algebraische Erweiterung von P_p sowie $\mathsf{I}_\mathfrak{p}$ sein maximaler Integritätsbereich und $\mathfrak{K}_\mathfrak{p}$ sein Restklassenkörper ist.

wobei das eine Mal über alle irreduziblen Charaktere χ und das andere Mal über alle Gruppenelemente G summiert wird. Hieraus liest man ab, daß für eine Funktionenfolge $\xi^{(n)}$ aus $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ die $\mathfrak{p}$-adische Konvergenz der Funktionswerte $\xi^{(n)}(G)$ mit der $\mathfrak{p}$-adischen Konvergenz der Vielfachheiten $a_\chi^{(n)}$ gleichbedeutend ist, und daß die Grenzfunktion $\xi = \mathfrak{p}\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} \xi^{(n)}$ die Vielfachheiten $a_\chi = \mathfrak{p}\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} a_\chi^{(n)}$ besitzt. Wegen der Perfektheit von $\mathsf{I}_\mathfrak{p}$ liegen daher die a_χ wie die $a_\chi^{(n)}$ in $\mathsf{I}_\mathfrak{p}$, so daß ξ in der Tat gleichzeitig mit den $\xi^{(n)}$ in $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ liegt. — Mit der gleichen Methode zeigt man:

(6) *Jeder* $\mathsf{I}_\mathfrak{p}$*-Teilmodul* H *von* $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ *ist gegenüber der Funktionenkonvergenz abgeschlossen.*

Zum Beweis hat man statt der $\mathsf{I}_\mathfrak{p}$-Basis (χ) von $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ eine $\mathsf{I}_\mathfrak{p}$-Basis (η) von H zugrunde zu legen, und statt mit den a_χ mit den entsprechenden Koeffizienten b_η zu rechnen, die bei der Darstellung $\xi = \sum\limits_\eta b_\eta\, \eta$ der Funktionen aus H auftreten. Den ersten Gleichungen (5) entsprechen die Gleichungen $\xi(G) = \sum\limits_\eta b_\eta\, \eta(G)$, welche sich jedoch im allgemeinen nicht mehr eindeutig, sondern auf mehrere Weisen nach den b_η auflösen lassen. Legt man eine dieser Auflösungen zugrunde, so erhält man ein zu dem zweiten Gleichungssystem (5) analoges Gleichungssystem $b_\eta = \sum\limits_G \xi(G) c_{\eta,G}$ mit Koeffizienten $c_{\eta,G}$ aus $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$. Jetzt kann man dieselben Schlüsse durchführen wie oben und damit die Abgeschlossenheit von H zeigen.

Die so erklärte Funktionenkonvergenz in $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ ersetzt das Rechnen mit Kongruenzen „nach beliebig hohen Potenzen von $\mathfrak{p}$", simultan für alle Funktionswerte bzw. Vielfachheiten. Durch sie werden manche der folgenden Beweise sehr vereinfacht.

2. Die Zerlegung des $\mathfrak{p}$-adischen Charakterringes in seine Blöcke. Definition der $\mathfrak{p}$-Oberklassen.

Wir untersuchen die direkte Zerlegung von $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ in unzerlegbare Ideale B, welche wir die *Blöcke* von $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ nennen. Dieser Zerlegung entspricht eine Zerlegung der 1 in unzerlegbare und paarweise orthogonale Idempotente $\varepsilon^{(B)}$ aus $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$, deren jedes durch B als die in B gelegene Komponente von 1 bestimmt ist, aber auch umgekehrt B vermöge $\mathsf{B} = \mathsf{X}_\mathfrak{p}\, \varepsilon^{(B)}$ bestimmt. Für die Blockzerlegung von $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ ist daher die Zerlegung

$$(7) \qquad 1 = \sum_B \varepsilon^{(B)} \qquad (\varepsilon^{(B)} \varepsilon^{(B')} = 0 \text{ für } \mathsf{B} \neq \mathsf{B}')$$

charakteristisch. Da ein Idempotent $\varepsilon^{(B)}$ als Funktion auf $\mathfrak{G}$ wegen seiner Idempotenz nur die Werte 0 oder 1 annimmt, so ist es eindeutig bestimmt durch seine „1-Menge", d. h. durch diejenige Teilmenge von $\mathfrak{G}$, auf der es den Wert 1 annimmt. Diese Teilmenge setzt sich aus vollen Klassen von $\mathfrak{G}$ zusammen, weil wie die irreduziblen Charaktere χ auch alle Funktionen aus $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$, also insbesondere die $\varepsilon^{(B)}$ Klassenfunktionen sind. Daher nennen wir die 1-Menge von $\varepsilon^{(B)}$ die zu B gehörige $\mathfrak{p}$-*Oberklasse* von $\mathfrak{G}$. Wegen (7) sind die verschiedenen $\mathfrak{p}$-Oberklassen von $\mathfrak{G}$ paarweise fremd und erfüllen zusammen ganz $\mathfrak{G}$. Demnach entspricht der Zerlegung (7) die $\mathfrak{p}$-Oberklassenzerlegung von $\mathfrak{G}$:

$$(8) \qquad \mathfrak{G} = \sum_{\mathfrak{O}} \mathfrak{O} \qquad (\mathfrak{O} \cap \mathfrak{O}' = 0 \text{ für } \mathfrak{O} \neq \mathfrak{O}').$$

Jeder Block B von $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ ist durch seine zugehörige $\mathfrak{p}$-Oberklasse $\mathfrak{O}$ bestimmt als das Ideal aller derjenigen Funktonen aus $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$, die außerhalb $\mathfrak{O}$ den Wert 0 annehmen. Wir schreiben dann

$$\mathsf{B} = \mathsf{B}_\mathfrak{O}$$

und auch

$$\varepsilon^{(B)} = \varepsilon_\mathfrak{O}\,.$$

In § 2 werden wir die $\mathfrak{p}$-Oberklassen von $\mathfrak{G}$ in einfacher Weise aus der Gruppentafel berechnen.

3. Bestimmung des einzigen Primideals eines Blocks. Folgerungen für die arithmetische Struktur des $\mathfrak{p}$-adischen Charakterringes.

Wir gehen jetzt an den Beweis des Satzes I der Einleitung. Demgemäß seien:

$\mathsf{B} = \mathsf{B}_{\mathfrak{C}}$ ein festgewählter Block von $\mathsf{X}_{\mathfrak{p}}$;

$\mathfrak{O}$ die zugehörige $\mathfrak{p}$-Oberklasse;

$\varepsilon = \varepsilon_{\mathfrak{C}}$ das Idempotent von B;

$\mathsf{V} = \mathsf{V}_{\mathfrak{C}}$ das Ideal derjenigen Funktionen aus B, deren Funktionswerte sämtlich durch $\mathfrak{p}$ teilbar sind.

Der zu beweisende Satz I behauptet, daß V das einzige Primideal von B ist. Nun ist der Restklassenring eines jeden Primideals von B als einfache kommutative Algebra über dem endlichen Körper $\mathsf{K}_{\mathfrak{p}}$ selbst ein Körper, also jedes Primideal von B *maximal*. Demnach besagt Satz I:

(9) V *ist das einzige maximale Ideal von* B.

Dies bedeutet, daß jede nicht in V gelegene Funktion ξ aus B eine Einheit in B ist, daß also eine „inverse" Funktion ξ^{-1} existiert, für die $\xi\xi^{-1} = \varepsilon$ ist. Die nun folgende Konstruktion des Inversen von ξ, die von *E. Witt* stammt, beruht auf der Tatsache, daß das Idempotent ε als $\mathfrak{p}$-adischer Limes von Potenzen von ξ dargestellt werden kann:

$$\varepsilon = \mathfrak{p}\text{-}\lim_{n\to\infty} \xi^{\varphi(\mathfrak{p}^n)}, \tag{10}$$

wo $\varphi(\mathfrak{p}^n)$ die Eulersche Funktion ist, welche für jedes natürliche $n \geqq 1$ die Anzahl der Restklassen von $\mathsf{I}_{\mathfrak{p}}$ modulo $\mathfrak{p}^n$ angibt. Zum Beweis der Formel (10), deren Richtigkeit auf der direkten Unzerlegbarkeit von B beruht, betrachten wir einen willkürlich gewählten Funktionswert $\xi(G)$. Für diesen gilt nach dem kleinen Fermatschen Satz:

$$\xi(G)^{\varphi(\mathfrak{p}^n)} \equiv \begin{cases} 1 \bmod \mathfrak{p}^n, & \text{wenn } \xi(G) \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{p} \\ 0 \bmod \mathfrak{p}^{\varphi(\mathfrak{p}^n)}, & \text{wenn } \xi(G) \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}. \end{cases}$$

Da $\varphi(\mathfrak{p}^n)$ mit n beliebig groß wird, so folgen hieraus die $\mathfrak{p}$-adischen Limesbeziehungen

$$\mathfrak{p}\text{-}\lim_{n\to\infty} \xi(G)^{\varphi(\mathfrak{p}^n)} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \xi(G) \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{p} \\ 0, & \text{wenn } \xi(G) \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}, \end{cases} \tag{11}$$

welche besagen, daß der $\mathfrak{p}$-adische Limes $\mathfrak{p}\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} \xi^{\varphi(\mathfrak{p}^n)}$ existiert, und daß die Grenzfunktion ζ, welche nach (6) in B liegt, nur die Werte 0 oder 1 annimmt. ζ ist also idempotent. Da zu der Peirceschen Zerlegung $\varepsilon = \zeta + (\varepsilon - \zeta)$ eine entsprechende direkte Zerlegung von B gehört, so folgt aus der direkten Unzerlegbarkeit des Blocks B, daß entweder $\zeta = 0$ oder $\varepsilon - \zeta = 0$ ist. Im ersten Falle besäße ξ nach (11) lauter durch $\mathfrak{p}$ teilbare Funktionswerte, läge also in V. Da dies voraussetzungsgemäß nicht der Fall ist, so ist in der Tat $\varepsilon = \zeta$. Die $\mathfrak{p}$-adische Grenzbeziehung (10) ist damit bewiesen.

Jetzt ist es klar, wie die zu ξ inverse Funktion ξ^{-1} aussieht:

$$\xi^{-1} = \mathfrak{p}\text{-}\lim_{n\to\infty} \xi^{\varphi(\mathfrak{p}^n)-1}.$$

Denn zunächst existiert dieser Grenzwert, weil der Grenzwert (10) existiert, und ferner stellt er wegen $\varphi(\mathfrak{p}^n) - 1 \geqq 0$ nach (6) eine in B gelegene Funktion ξ^{-1} dar. Für diese ist nach (10) offenbar $\xi^{-1}\xi = \mathfrak{p}\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} \xi^{\varphi(\mathfrak{p}^n)} = \varepsilon$, sie ist also in der Tat die Inverse zu ξ. — Mit dieser Konstruktion ist nach dem oben Gesagten der Satz (9) und damit I bewiesen. Als unmittelbare Folge erwähnen wir noch den folgenden Satz:

(12) *Ist Q ein Vertreter aus $\mathfrak{D}$, so gilt für jede Funktion ξ aus* B *die Kongruenz* $\xi \equiv \xi(Q)\varepsilon$ *mod* V.

Man kann ihn offenbar auch so aussprechen:

(13) *Der Restklassenkörper* B/V *ist zu* $\mathfrak{K}_\mathfrak{p}$ *isomorph.*

Beweis. Konstruktionsgemäß besitzen die Funktionen ξ und $\xi(Q)\varepsilon$ für das Gruppenelement Q denselben Funktionswert $\xi(Q)$, sie sind also kongruent nach dem Ideal A aller derjenigen Funktionen aus B, die für Q den Wert 0 besitzen:

$$\xi \equiv \xi(Q)\varepsilon \bmod \mathsf{A}. \tag{14}$$

Da ε nicht in A liegt (denn ε nimmt für Q den Wert 1 an), so ist A von B verschieden und daher nach (9) in V enthalten. Somit folgt aus der Kongruenz (14) modulo A erst recht die behauptete Kongruenz modulo V.

Bevor wir nun zum Beweis der Sätze II—V der Einleitung übergehen, wollen wir einen Augenblick verweilen, um die eigentliche Bedeutung der bisherigen Ergebnisse herauszuarbeiten. Dabei denken wir uns die $\mathfrak{p}$-Oberklasse $\mathfrak{D}$ nicht länger festgehalten, vielmehr durchlaufe $\mathfrak{D}$ jetzt die *sämtlichen* $\mathfrak{p}$-Oberklassen von $\mathfrak{G}$. Wir betrachten das Ideal W aller Funktionen aus $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ mit durch $\mathfrak{p}$ teilbaren Werten, das sich auf Grund der Blockzerlegung von $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ in die direkte Summe der Ideale $\mathsf{V}_\mathfrak{D} = \mathsf{W}\varepsilon_\mathfrak{D} = \mathsf{W} \cap \mathsf{B}_\mathfrak{D}$ aufspaltet. Die Restklassenalgebra $\mathsf{X}_\mathfrak{p}/\mathsf{W}$ ist daher die direkte Summe der Algebren $\mathsf{B}_\mathfrak{D}/\mathsf{V}_\mathfrak{D}$. Aus (12) und (13) erhalten wir so durch Summation den folgenden Satz:

(15) *Die Restklassenalgebra* $\mathsf{X}_\mathfrak{p}/\mathsf{W} = \overline{\mathsf{X}}_\mathfrak{p}$ *ist eine direkte Summe von zu* $\mathfrak{K}_\mathfrak{p}$ *isomorphen Körpern. Diese direkte Summenzerlegung geht aus der direkten Blockzerlegung von* $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ *durch Restklassenbildung modulo* W *hervor und wird formelmäßig durch die Kongruenzen*

$$\xi \equiv \sum_{\mathfrak{D}} \xi(Q)\, \varepsilon_\mathfrak{D} \bmod \mathsf{W}$$

gegeben, wo Q ein Vertretersystem der $\mathfrak{p}$-Oberklassen $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{G}$ durchläuft.

Um hieraus eine Aussage über die Struktur der Restklassenalgebra $\mathfrak{X}_\mathfrak{p} = \mathsf{X}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ zu bekommen, welche ja das Verhalten von $\mathfrak{p}$ in $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ beschreibt, hat man folgendes zu beachten:

(16) W *enthält* $\mathfrak{p}\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ *und liefert durch Restklassenbildung modulo* $\mathfrak{p}\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ *das Radikal* $\mathfrak{W}$ *von* $\mathfrak{X}_\mathfrak{p}$[7]).

Beweis. $\mathsf{W} \geqq \mathfrak{p}\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ ist klar, weil eine Funktion mit durch $\mathfrak{p}$ teilbaren Vielfachheiten erst recht durch $\mathfrak{p}$ teilbare Werte besitzt. Ist daher $\mathfrak{W}$ das aus W durch Restklassenbildung modulo $\mathfrak{p}\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ hervorgehende Ideal von $\mathfrak{X}_\mathfrak{p}$, so ist die Restklassenalgebra $\mathfrak{X}_\mathfrak{p}/\mathfrak{W}$ zu $\mathsf{X}_\mathfrak{p}/\mathsf{W} = \overline{\mathsf{X}}_\mathfrak{p}$ isomorph, also nach (15) halbeinfach. Demnach ist nur noch zu zeigen, daß jede Funktion ξ aus W nilpotent modulo $\mathfrak{p}\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ ist, und dies folgt so: Für einen beliebigen Funktionswert $\xi(G)$ ist $\xi(G) \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}$, also $\xi(G)^n \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}^n$ für jedes natürliche n und daher $\mathfrak{p}\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} \xi(G)^n = 0$. Dies bedeutet, daß die Potenzfolge ξ^n gegen 0 konvergiert, und daher sind nach 1 auch die Folgen der Vielfachheiten der ξ^n nullkonvergent. Insbesondere sind für hinreichend hohes N die sämtlichen Vielfachheiten von ξ^N durch $\mathfrak{p}$ teilbar, also $\xi^N \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}\mathsf{X}_\mathfrak{p}$. Übrigens gestattet der im zweiten der Gleichungssysteme (5) auftretende Nenner g die obere Abschätzung von N durch die Gruppenordnung g.

Nach (16) ist $\overline{\mathsf{X}}_\mathfrak{p}$ zur Radikalrestklassenalgebra $\overline{\mathfrak{X}}_\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{X}_\mathfrak{p}$ isomorph und kann mit dieser identifiziert werden. Daher liefert die Strukturaussage (15) über $\overline{\mathsf{X}}_\mathfrak{p}$ auch eine solche über $\mathfrak{X}_\mathfrak{p}$, insbesondere eine Aussage über die direkte Zerlegung von $\mathfrak{X}_\mathfrak{p}$ in voll-

[7]) Die einfache Formulierung und der Beweis dieses Satzes stammen von *H. Hasse.*

ständig primäre Komponenten, weil diese durch Radikalrestklassenbildung in die direkte Körperzerlegung von $\overline{\mathfrak{X}}_\mathfrak{p}$ übergeht. Indem man den Homomorphismus von $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ auf $\overline{\mathsf{X}}_\mathfrak{p}$ in zwei Schritte zerlegt:

$$\mathsf{X}_\mathfrak{p} \xrightarrow[\text{mod } \mathfrak{p}\mathsf{X}_\mathfrak{p}]{} \mathfrak{X}_\mathfrak{p}, \qquad \mathfrak{X}_\mathfrak{p} \xrightarrow[\text{mod } \mathfrak{W}]{} \overline{\mathfrak{X}}_\mathfrak{p} = \overline{\mathsf{X}}_\mathfrak{p},$$

erhält man so aus (15):

(17) *Die direkte Summenzerlegung von $\mathfrak{X}_\mathfrak{p}$ in direkt unzerlegbare Ideale geht aus der Blockzerlegung von $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ durch Restklassenbildung modulo $\mathfrak{p}\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ hervor. Die direkten Summanden sind vollständig primär und ihre Radikalrestklassenringe sind zu $\mathfrak{K}_\mathfrak{p}$ isomorphe Körper.*

Die eigentliche Bedeutung des Satzes (9) ist darin zu sehen, daß er fast unmittelbar die beiden Strukturaussagen (15) und (17) liefert, also

1. den Zusammenhang zwischen den direkten Zerlegungen von $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$, denen von $\mathfrak{X}_\mathfrak{p}$ und denen von $\overline{\mathfrak{X}}_\mathfrak{p} = \overline{\mathsf{X}}_\mathfrak{p}$;
2. den vollständigen Zerfall der Algebren $\mathfrak{X}_\mathfrak{p}$ und $\overline{\mathfrak{X}}_\mathfrak{p}$ (der schon in der Einleitung erwähnt wurde), verbunden mit der expliziten Formel in (15).

Man bemerke, daß wir die allgemeinen Struktursätze über $\mathfrak{p}$-adische Algebren hier nicht verwendet haben, daß sich vielmehr die Beweise ganz einfach führen ließen. Dies liegt natürlich daran, daß $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ ein $\mathfrak{p}$-adischer Ring von Funktionen mit Werten aus $\mathsf{I}_\mathfrak{p}$ ist.

§ 2. Gruppentheoretische Bestimmung der $\mathfrak{p}$-Oberklassen einer endlichen Gruppe.

4. Charakterisierung der $\mathfrak{p}$-Oberklassen.

Wir kommen jetzt zum Beweis von Satz II der Einleitung, wozu der Weg durch unsere Überlegungen in 2 schon vorgezeichnet ist: Da die Blockzerlegung von $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ durch die Zerlegung von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{p}$-Oberklassen gegeben wird, so haben wir die $\mathfrak{p}$-Oberklassen von $\mathfrak{G}$ zu untersuchen und sie mit den p-regulären Klassen von $\mathfrak{G}$ in Verbindung zu bringen. Dies wollen wir jetzt tun, setzen uns also zum Ziel die gruppentheoretische Bestimmung der $\mathfrak{p}$-Oberklassen.

Wir beginnen mit folgender Feststellung:

(18) *Die $\mathfrak{p}$-Oberklassen von $\mathfrak{G}$ sind die maximalen Teilmengen von $\mathfrak{G}$, auf denen alle Funktionen ξ des $\mathfrak{p}$-adischen Charakterringes $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ konstant modulo $\mathfrak{p}$ sind.*

Zwei Gruppenelemente G und G' gehören demnach genau dann zur selben $\mathfrak{p}$-Oberklasse, wenn für alle ξ die Kongruenz $\xi(G) \equiv \xi(G')$ mod $\mathfrak{p}$ gilt.

Beweis. Das Rechnen mit den Funktionswerten modulo $\mathfrak{p}$ bedeutet in $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ das Rechnen modulo dem Ideal W aller derjenigen Funktionen, deren Werte durch $\mathfrak{p}$ teilbar sind. Dabei können wir nach (15) jede Funktion ξ aus $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ durch die andere Funktion

$$\sum_{\mathfrak{O}} \xi(Q)\, \varepsilon_\mathfrak{O} \qquad (Q \text{ wie in (15)})$$

ersetzen, welche sich aus den unzerlegbaren Idempotenten $\varepsilon_\mathfrak{O}$ durch lineare Zusammensetzung ergibt. Folglich ist die Behauptung damit gleichbedeutend, daß die $\mathfrak{p}$-Oberklassen $\mathfrak{O}$ die maximalen Teilmengen von $\mathfrak{G}$ sind, auf denen die $\varepsilon_\mathfrak{O}$ konstant modulo $\mathfrak{p}$ sind. Dies ist aber nach Definition der $\mathfrak{p}$-Oberklassen klar, weil jedes $\varepsilon_\mathfrak{O}$ auf der zugehörigen $\mathfrak{p}$-Oberklasse $\mathfrak{O}$ den Wert 1, sonst aber den Wert 0 annimmt.

Die damit erreichte Charakterisierung der $\mathfrak{p}$-Oberklassen erlaubt den folgenden Weg zu ihrer Bestimmung: Wir geben zuerst in $\mathfrak{G}$ gewisse Teilsysteme an, aus deren Konstruktion unmittelbar ersichtlich ist, daß alle Funktionen aus $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ auf ihnen konstant

modulo $\mathfrak{p}$ sind. Dann weisen wir nach, daß diese Teilsysteme nicht mehr erweitert werden können, ohne die angegebene Konstanzeigenschaft zu verlieren; daher sind sie dann wegen (18) mit den $\mathfrak{p}$-Oberklassen identisch.

Wir werden dies in den folgenden beiden Abschnitten ausführen.

5. Erster Schritt zur Bestimmung der $\mathfrak{p}$-Oberklassen.

Jedes Element G aus $\mathfrak{G}$ gestattet eine eindeutig bestimmte „p-Zerlegung"

$$G = RP \tag{19}$$

in einen p-regulären Faktor R, dessen Ordnung zu p teilerfremd ist, und einen mit R vertauschbaren p-Faktor P, dessen Ordnung eine p-Potenz ist[8]). Es zeigt sich nun, daß der Funktionswert $\xi(G)$ modulo $\mathfrak{p}$ einer beliebigen Funktion ξ aus $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ nur von dem p-regulären Faktor R abhängt:

$$\xi(G) \equiv \xi(R) \bmod \mathfrak{p} \qquad (R \text{ der } p\text{-reguläre Faktor von } G). \tag{20}$$

Zum Beweise dieser Kongruenz genügt es, statt der beliebigen Funktion ξ aus $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ einen irreduziblen Charakter χ zu betrachten. Der Wert $\chi(G)$ ist die Summe der Eigenwerte von G bei einer zu χ gehörigen Darstellung $G \to \mathfrak{D}(G)$. Diese Eigenwerte sind die Produkte der Eigenwerte von R mit den Eigenwerten von P, was man etwa erkennt, wenn man die Darstellung $\mathfrak{D}$ zu χ so wählt, daß $\mathfrak{D}(R)$ und $\mathfrak{D}(P)$ Diagonalmatrizen sind[9]). Da nun die Eigenwerte von P Einheitswurzeln sind, deren Ordnungen Teiler der Ordnung von P und daher p-Potenzen sind, so liegen sie erstens in $\mathsf{I}_\mathfrak{p}$ und sind zweitens sämtlich $\equiv 1 \bmod \mathfrak{p}$. Daher sind die Eigenwerte von G zu denen von R in einer gewissen Reihenfolge kongruent modulo $\mathfrak{p}$, und durch Summation folgt in der Tat $\chi(G) \equiv \chi(R) \bmod \mathfrak{p}$.

Man kombiniere nun die Kongruenzeigenschaft (20) der Funktionen ξ aus $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ mit ihrer Klassenfunktioneneigenschaft, welche besagt, daß die Funktionswerte für konjugierte Elemente R und R' gleich sind. *So sieht man, daß die Funktionswerte $\xi(G)$ und $\xi(G')$ für zwei beliebige Gruppenelemente G und G' sicher dann kongruent modulo $\mathfrak{p}$ sind, wenn G und G' konjugierte p-reguläre Faktoren R und R' besitzen.* Demgemäß zerlegen wir $\mathfrak{G}$ dergestalt in Teilsysteme $\tilde{\mathfrak{D}}$, daß je zwei Gruppenelemente genau dann zum selben $\tilde{\mathfrak{D}}$ gehören, wenn sie konjugierte p-reguläre Faktoren besitzen. Jedes Teilsystem $\tilde{\mathfrak{D}}$ enthält also genau eine p-reguläre Klasse $\mathfrak{R}$ und besteht aus allen den Gruppenelementen, deren p-reguläre Faktoren gerade in $\mathfrak{R}$ liegen. Die $\tilde{\mathfrak{D}}$ sind konstruktionsgemäß paarweise fremd und erfüllen ganz $\mathfrak{G}$, außerdem setzen sie sich aus vollen Klassen von $\mathfrak{G}$ zusammen[10]). Wir wollen nun nachweisen, daß sie mit den $\mathfrak{p}$-Oberklassen $\mathfrak{O}$ von $\mathfrak{G}$ identisch sind. Dazu haben wir zu verwerten, was wir bereits von den $\tilde{\mathfrak{D}}$ wissen, nämlich die Konstanz modulo $\mathfrak{p}$ aller Funktionen ξ aus $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ auf ihnen. Im Hinblick auf Satz (18) genügt es daher nachzuweisen, daß die $\tilde{\mathfrak{D}}$ *maximale* Teilsysteme von $\mathfrak{G}$ mit der angegebenen Konstanzeigenschaft sind.

---

[8]) Die Existenz und gleichzeitig die Eindeutigkeit dieser p-Zerlegung sieht man so ein: Man zerlege die Ordnung m von G in einen zu p primen Faktor m' und eine p-Potenz p^b und wähle dann zwei ganzrationale Zahlen u und v gemäß den Kongruenzen

$$\begin{aligned} u &\equiv 1, & v &\equiv 0 & &\bmod m', \\ u &\equiv 0, & v &\equiv 1 & &\bmod p^b. \end{aligned}$$

Dann ist $u + v \equiv 1 \bmod m$, also $G = G^u G^v$ eine p-Zerlegung von G, und bei jeder p-Zerlegung (19) von G ist $G^u = R$, $G^v = P$. — Außerdem ergibt sich hieraus die für uns bedeutsame Tatsache, daß die p-regulären (bzw. p-)Faktoren zweier konjugierten Elemente G und G^X ihrerseits konjugiert sind; denn es ist $(G^X)^u = (G^u)^X$ bzw. $(G^X)^v = (G^v)^X$.

[9]) Das bedeutet, daß $\mathfrak{D}(G)$ eine Diagonalmatrix ist, kann also stets durch Transformation mit einer geeigneten regulären Matrix erreicht werden.

[10]) Dies ersieht man aus der letzten Bemerkung in Fußnote [8]).

6. Zweiter Schritt zur Bestimmung der $\mathfrak{p}$-Oberklassen.

Wir werden also zeigen, daß es zu jedem der eben konstruierten Teilsysteme $\tilde{\mathfrak{D}}$ eine Funktion $\xi_{\tilde{\mathfrak{D}}}$ aus $\mathsf{X}_{\mathfrak{p}}$ gibt, welche außerhalb $\tilde{\mathfrak{D}}$ den Wert 0, aber auf $\tilde{\mathfrak{D}}$ selbst nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbare Werte annimmt:

$$\xi_{\tilde{\mathfrak{D}}}(G) = 0, \qquad \text{wenn } G \text{ nicht in } \tilde{\mathfrak{D}},$$
$$\xi_{\tilde{\mathfrak{D}}}(G) \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}, \text{ wenn } G \text{ in } \tilde{\mathfrak{D}}.$$

Zum Beweis der zweiten Inkongruenz genügt es, für einen p-regulären Vertreter R aus $\tilde{\mathfrak{D}}$ zu zeigen, daß

$$\xi_{\tilde{\mathfrak{D}}}(R) \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}$$

ist, weil wir ja nach (20) wissen, daß alle Funktionen aus $\mathsf{X}_{\mathfrak{p}}$ auf $\tilde{\mathfrak{D}}$ konstant modulo $\mathfrak{p}$ sind. Wir werden daher den folgenden Satz beweisen:

(21) *Ist $\tilde{\mathfrak{D}}$ festgewählt und R ein p-regulärer Vertreter aus $\tilde{\mathfrak{D}}$, so gibt es eine Funktion $\xi_{\tilde{\mathfrak{D}}}$ aus $\mathsf{X}_{\mathfrak{p}}$ mit den Werten: $\xi_{\tilde{\mathfrak{D}}}(G) = 0$, wenn G nicht in $\tilde{\mathfrak{D}}$; $\xi_{\tilde{\mathfrak{D}}}(R) \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}$.*

Um eine solche Funktion $\xi_{\tilde{\mathfrak{D}}}$ aufzufinden, ist die folgende Konstruktion von Nutzen, die uns einen Einblick in den Aufbau von $\tilde{\mathfrak{D}}$ gibt, und die für die Ausführungen des nächsten Paragraphen von fundamentaler Bedeutung ist[11]): Es sei

$\mathfrak{N}_R$	der Normalisator von R in $\mathfrak{G}$;
$\mathfrak{P}$	eine p-Sylowgruppe von $\mathfrak{N}_R$;
$\mathfrak{E} = R\mathfrak{P}$	der in $\tilde{\mathfrak{D}}$ enthaltene Komplex derjenigen Elemente, deren p-regulärer Faktor gleich R ist und deren p-Faktoren in $\mathfrak{P}$ liegen;
$\mathfrak{H} = (R) \times \mathfrak{P}$	die von $\mathfrak{E}$ erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{G}$, welche wegen der Vertauschbarkeit von R mit den Elementen aus $\mathfrak{P}$ und der Teilerfremdheit ihrer Ordnungen das direkte Produkt von $\mathfrak{P}$ mit (R) ist;
(R)	die von R erzeugte zyklische Gruppe;
λ	durchlaufe die irreduziblen Charaktere von (R), welche wir vermöge der Isomorphie $(R) \cong \mathfrak{H}/\mathfrak{P}$ als Charaktere von $\mathfrak{H}$ auffassen, deren Funktionswerte nur von der Restklasse modulo $\mathfrak{P}$ des Arguments abhängen.

Wir bilden nun die Funktion

$$\varepsilon = \frac{1}{r} \sum_{\lambda} \lambda(R^{-1})\, \lambda \qquad (r \text{ die Ordnung von } R),$$

welche wegen der Orthogonalitätsrelationen der irreduziblen Charaktere λ idempotent ist und für R den Wert 1, aber für alle anderen Potenzen von R den Wert 0 annimmt. Als Funktion auf $\mathfrak{H}$ besitzt ε demnach die 1-Menge $\mathfrak{E}$; wir schreiben daher $\varepsilon = \varepsilon_{\mathfrak{E}}$. Da der bei der Bildung von $\varepsilon_{\mathfrak{E}}$ auftretende Nenner r als Ordnung von R prim zu p ist, und da außerdem die r-ten Einheitswurzeln $\lambda(R^{-1})$ in $\mathsf{I}_{\mathfrak{p}}$ liegen, so ist $\varepsilon_{\mathfrak{E}}$ im $\mathfrak{p}$-adischen Charakterring von $\mathfrak{H}$ enthalten.

Nun wenden wir den in der Einleitung besprochenen Induktionsprozeß an, der eine lineare Abbildung des $\mathfrak{p}$-adischen Charakterringes von $\mathfrak{H}$ in den von $\mathfrak{G}$ darstellt. Das Idempotent $\varepsilon_{\mathfrak{E}}$ geht dabei in eine Funktion $\varepsilon^*_{\mathfrak{E}}$ aus $\mathsf{X}_{\mathfrak{p}}$ über, deren Werte sich nach der Formel (4) berechnen:

$$\varepsilon^*_{\mathfrak{E}}(G) = \frac{1}{(\mathfrak{H}:1)} \sum_{X \text{ in } \mathfrak{G}} \varepsilon_{\mathfrak{E}}(G^X) \qquad (\varepsilon_{\mathfrak{E}}(G^X) = 0, \text{ wenn } G^X \text{ nicht in } \mathfrak{E}). \tag{22}$$

---

[11]) Diese Konstruktion geht auf *R. Brauer* zurück. Vgl. die in Fußnote [4]) zitierten Arbeiten, sowie *R. Brauer-C. Nesbitt*, On the modular characters of groups, Annals of Math. 42 (1941), III, § 18.

Wir behaupten nun, daß $\varepsilon_{\mathfrak{E}}^*$ eine Funktion $\xi_{\tilde{\mathfrak{D}}}$ mit der in (21) verlangten Wertverteilung ist. Dies erkennt man durch Auswertung der Formel (22): Ist G nicht in $\tilde{\mathfrak{D}}$ gelegen, so ist der p-reguläre Faktor von $\mathfrak{G}$ nicht zu R konjugiert, also liegt dann kein G^X in $\mathfrak{E}$. Dann ist stets $\varepsilon_{\mathfrak{E}}(G^X) = 0$, also $\varepsilon_{\mathfrak{E}}^*(G) = 0$. Um $\varepsilon_{\mathfrak{E}}^*(R)$ auszurechnen, beachte man, daß $\varepsilon_{\mathfrak{E}}(R^X)$ genau dann $\neq 0$ ist, wenn R^X in $\mathfrak{E} = R\mathfrak{P}$ liegt. Dies bedeutet $R^X = R$, also $X \in \mathfrak{N}_R$. Für diese X ist $\varepsilon_{\mathfrak{E}}(R^X) = \varepsilon_{\mathfrak{E}}(R) = 1$. Da die Anzahl dieser X gleich der Ordnung des Normalisators $\mathfrak{N}_R$ ist, so ergibt sich aus (22)

$$\varepsilon_{\mathfrak{E}}^*(R) = \frac{(\mathfrak{N}_R : 1)}{(\mathfrak{H} : 1)} = (\mathfrak{N}_R : \mathfrak{H}). \tag{22a}$$

Dieser Index ist nun aber prim zu $\mathfrak{p}$, weil $\mathfrak{H}$ nach Konstruktion die p-Sylowgruppe $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{N}_R$ enthält. $\varepsilon_{\mathfrak{E}}^*$ besitzt also in der Tat die in (21) verlangte Wertverteilung.

Mit dem damit bewiesenen Satz (21) ist die Identität der $\mathfrak{p}$-Oberklassen von $\mathfrak{G}$ mit den in 5 konstruierten Teilsystemen festgestellt. Wir formulieren dieses Ergebnis in einem besonderen Satz:

(23) *Jede $\mathfrak{p}$-Oberklasse von $\mathfrak{G}$ enthält genau eine p-reguläre Klasse $\mathfrak{R}$ und besteht aus all denjenigen Gruppenelementen, deren p-reguläre Faktoren in $\mathfrak{R}$ liegen.*

Insbesondere ist hiermit der Satz II der Einleitung bewiesen.

§ 3. Gruppeninvariante Beschreibung der Struktur eines Blocks.

7. Erzeugung eines Blocks aus einem Elementarblock mit Hilfe des Induktionsprozesses.

Die Sätze III—V der Einleitung ergeben sich durch eine Ausgestaltung der eben dargebotenen Beweise, wozu die in 6 angegebene Konstruktion wichtig ist, die wir der Übersichtlichkeit halber noch einmal durchführen wollen. Es sei also:

B	ein festgewählter Block von $\mathsf{X}_{\mathfrak{p}}$;
$\mathfrak{D}$	seine $\mathfrak{p}$-Oberklasse, deren Struktur durch Satz (23) beschrieben wird;
R	ein festgewähltes p-reguläres Element aus $\mathfrak{D}$;
$\mathfrak{P}$	eine festgewählte p-Sylowgruppe des Normalisators $\mathfrak{N}_R$;
$\mathfrak{E} = R\mathfrak{P}$	der Komplex derjenigen Gruppenelemente, deren p-regulärer Faktor gleich R ist und deren p-Faktor in $\mathfrak{P}$ liegt;
$\mathfrak{H} = (R) \times \mathfrak{P}$	die von $\mathfrak{E}$ erzeugte Untergruppe;
$\Psi = \Lambda \times \Pi$	der $\mathfrak{p}$-adische Charakterring von $\mathfrak{H}$, der gemäß der direkten Produktdarstellung von $\mathfrak{H}$ das direkte Produkt von Λ mit Π ist;
Λ	der $\mathfrak{p}$-adische Charakterring von (R);
Π	der $\mathfrak{p}$-adische Charakterring von $\mathfrak{P}$[12]. Dabei sollen sowohl Λ als auch Π vermöge der Isomorphien $(R) \cong \mathfrak{H}/\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{P} \cong \mathfrak{H}/(R)$ als Funktionenringe auf $\mathfrak{H}$ aufgefaßt werden.

$\mathfrak{E}$ ist eine $\mathfrak{p}$-Oberklasse von $\mathfrak{H}$, was man unter Beachtung von (23) der Tatsache entnimmt, daß R im Zentrum von $\mathfrak{H}$ liegt, also in $\mathfrak{H}$ für sich allein eine p-reguläre Klasse bildet. Zu $\mathfrak{E}$ gehört daher ein Block $\mathsf{E} = \Psi\varepsilon_{\mathfrak{E}}$ von Ψ, welcher im Hinblick auf seinen einfachen Aufbau ein *Elementarblock für* B genannt werden soll. In gleicher Weise wird $\mathfrak{E}$ eine *elementare $\mathfrak{p}$-Oberklasse* und $\mathfrak{H}$ eine *elementare Untergruppe für* B genannt.

Die Sätze III—V der Einleitung, welche einen Zusammenhang zwischen B und Π behaupten, werden wir dadurch beweisen, daß wir erstens einen Zusammenhang zwischen

[12]) Konsequent wäre es gewesen, wenn wir $\Psi_{\mathfrak{p}}$, $\Lambda_{\mathfrak{p}}$, $\Pi_{\mathfrak{p}}$ statt Ψ, Λ, Π geschrieben hätten. Wir können jedoch den Index $\mathfrak{p}$ zur Vereinfachung der Schreibweise in diesem Paragraphen weglassen, weil die entsprechenden ganzrationalen Charakterringe gar nicht auftreten werden. Im nächsten Paragraphen werden wir jedoch wieder $\Psi_{\mathfrak{p}}$ schreiben.

B und E herstellen, und zweitens eine Isomorphie zwischen E und Π angeben. Der Zusammenhang zwischen B und E wird, wie schon in der Einleitung gesagt, durch den *Induktionsprozeß* vermittelt, welcher den Elementarblock E, der ja ein Ring von Funktionen auf $\mathfrak{H}$ ist, linear auf einen $\mathsf{I}_\mathfrak{p}$-Teilmodul E^* von $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ abbildet. E^* ist in B enthalten, weil jede Funktion η^* aus E^* außerhalb $\mathfrak{O}$ den Wert 0 annimmt, was man genau so sieht, wie bei (22) für $\varepsilon^*_\mathfrak{E}$ statt η^*. Es ist nun von großer Bedeutung, daß E^* sogar ganz B erschöpft. Zum Beweise bemerken wir zunächst, daß E^* nicht nur ein $\mathsf{I}_\mathfrak{p}$-Modul, sondern sogar ein *Ideal* aus B ist. Um dies einzusehen, beachte man erstens, daß sich E als Ring von Funktionen auf $\mathfrak{H}$ bei der Multiplikation mit dem $\mathfrak{H}$ zugeordneten Idempotent $\varepsilon_\mathfrak{H}$ reproduziert, so daß $\mathsf{X}_\mathfrak{p}\mathsf{E} = \mathsf{X}_\mathfrak{p}\varepsilon_\mathfrak{H}\mathsf{E}$ ist. Zweitens beachte man, daß $\mathsf{X}_\mathfrak{p}\varepsilon_\mathfrak{H}$ ein Teilring von Ψ ist, weil jeder Charakter ξ von $\mathfrak{G}$ durch Einschränkung des Definitionsbereiches auf $\mathfrak{H}$ einen Charakter $\xi\varepsilon_\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{H}$ liefert. Daher ist wegen der Idealeigenschaft von E

$$\mathsf{X}_\mathfrak{p}\mathsf{E} \leqq \Psi\mathsf{E} = \mathsf{E}. \tag{24a}$$

Demnach wird die Idealeigenschaft von E^* durch die Formel

$$\mathsf{X}_\mathfrak{p}\mathsf{E}^* = (\mathsf{X}_\mathfrak{p}\mathsf{E})^* \tag{24b}$$

in Evidenz gesetzt, welche man beweist, indem man willkürliche Funktionen ξ aus $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ und η^* aus E^* wählt, und dann für jedes Gruppenelement G nach (4) so rechnet:

$$(\xi\eta^*)(G) = \xi(G)\,\eta^*(G) = \frac{1}{(\mathfrak{H}:1)}\sum_{X \text{ in } \mathfrak{G}} \xi(G)\,\eta(G^X) =$$

$$= \frac{1}{(\mathfrak{H}:1)}\sum_{X \text{ in } \mathfrak{G}} \xi(G^X)\,\eta(G^X) = (\xi\eta)^*(G).$$

Damit hat sich ergeben, daß E^* ein Ideal aus B ist. Um die behauptete Gleichung $\mathsf{E}^* = \mathsf{B}$ zu beweisen, ist daher nach (9) nur nachzuweisen, daß E^* nicht in V liegt, daß es also in E^* eine Funktion gibt, die nicht lauter durch $\mathfrak{p}$ teilbare Funktionswerte besitzt. Dies ist aber gerade im vorigen Abschnitt geschehen, in welchem nachgewiesen wurde, daß $\varepsilon^*_\mathfrak{E}(R) \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}$ ist. Wir haben also den folgenden Satz bewiesen:

(25) *Jeder Block* B *von* $\mathsf{X}_\mathfrak{p}$ *besteht aus den Induzierten der Funktionen eines festen zu* B *gehörigen Elementarblocks* E:

$$\mathsf{B} = \mathsf{E}^*.$$

Damit ist die Struktur von B auf die Struktur von E und die Einbettung von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{G}$, welche ja den Induktionsprozeß beeinflußt, zurückgeführt. Bevor wir daran gehen, diesen Satz zum Beweis der Sätze III—V zu verwenden, bemerken wir folgendes zu seiner Formulierung. Die angegebene Erzeugung von B durch die Induzierten der Funktionen aus E hängt nur scheinbar von der Wahl des zu B gehörigen Elementarblocks E ab; der Satz (25) liefert vielmehr eine *gruppeninvariante Erzeugung* von B. Sei nämlich E' ein anderer zu B gehöriger Elementarblock mit der zugehörigen elementaren $\mathfrak{p}$-Oberklasse $\mathfrak{E}' = R'\mathfrak{P}'$. Da es nach (23) nur eine einzige p-reguläre Klasse in $\mathfrak{O}$ gibt, so sind die beiden p-regulären Elemente R und R' aus $\mathfrak{O}$ durch ein Element X aus $\mathfrak{G}$ zueinander konjugiert: $R' = R^X$; nach dem Satz von Sylow sind ferner die beiden p-Sylowgruppen $\mathfrak{P}^X$ und $\mathfrak{P}'$ von $\mathfrak{N}_{R'}$ durch ein Element Y aus $\mathfrak{N}_{R'}$ konjugiert: $\mathfrak{P}^{XY} = \mathfrak{P}'$. Daher führt die Transformation mit $Z = XY$ die elementare $\mathfrak{p}$-Oberklasse $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{E}'$ über und stiftet somit eine eindeutige Korrespondenz $\eta \leftrightarrow \eta^Z$ zwischen den Funktionen η aus E und den Funktionen η^Z aus $\mathsf{E}' = \mathsf{E}^Z$, wobei η^Z durch die Werte $\eta^Z(G^Z) = \eta(G)$ gegeben ist. Wir nennen η und η^Z (durch Z) konjugiert und lesen aus der Formel (4) ab, daß die Induzierten zweier konjugierten Funktionen gleich sind: $(\eta^Z)^* = \eta^*$. Demnach ist $(\mathsf{E}')^* = (\mathsf{E}^Z)^* = \mathsf{E}^*$, so daß (25) in der Tat eine gruppeninvariante Erzeugung von B ergibt.

In diesem Sinne sind übrigens auch alle weiteren Abbildungen gruppeninvariant.

Wir wollen noch ein Ergebnis festhalten, auf das wir uns nachher berufen werden und das sich aus den eben angestellten Überlegungen ergeben hat:

(26) *Jedes Element aus* $\mathfrak{O}$ *ist zu einem Element aus* $\mathfrak{E}$ *konjugiert.*

Denn jedes Element $G' = R'P'$ aus $\mathfrak{O}$ liegt in einer elementaren p-Oberklasse $\mathfrak{E}' = R'\mathfrak{P}'$ für $\mathfrak{O}$, weil der p-Faktor P' in einer p-Sylowgruppe $\mathfrak{P}'$ von $\mathfrak{N}_{R'}$ liegt, und $\mathfrak{E}'$ ist nach Obigem zu $\mathfrak{E}$ konjugiert.

8. Die Isomorphie eines Blocks zu einem Teilring des $\mathfrak{p}$-adischen Charakterringes einer p-Untergruppe.

Im Hinblick auf (25) wird der Beweis von Satz V der Einleitung durch folgenden Satz erbracht:

(27) Π *ist zu* E *vermöge* $\Pi \leftrightarrow \varepsilon_{\mathfrak{E}}\Pi$ *und* $\varepsilon_{\mathfrak{E}}\Pi = \mathsf{E}$ *isomorph.*

Beweis. Erstens ist der Homomorphismus $\Pi \to \varepsilon_{\mathfrak{E}}\Pi$, welcher für die Funktionen aus Π die Einschränkung des Definitionsbereiches auf $\mathfrak{E}$ bedeutet, sogar ein Isomorphismus. Jede Funktion aus Π ist nämlich schon durch ihre Werte auf $\mathfrak{E}$ bestimmt, weil ihre Funktionswerte nur von der Restklasse modulo (R) des Arguments abhängen, und weil jede Restklasse $(R)P$ von $\mathfrak{H}/(R)$ einen Vertreter RP aus $\mathfrak{E}$ enthält. *Zweitens* ist das isomorphe Bild $\varepsilon_{\mathfrak{E}}\Pi$ gleich E. Zum Beweise bemerken wir zunächst, daß die Funktionswerte jeder Funktion λ aus Λ nur von der Restklasse modulo $\mathfrak{P}$ des Arguments abhängen, und daß demnach λ auf $\mathfrak{E} = R\mathfrak{P}$ konstant mit dem Wert $\lambda(R)$ ist. Daher ist $\lambda\varepsilon_{\mathfrak{E}}\Pi = \lambda(R)\,\varepsilon_{\mathfrak{E}}\Pi \leqq \varepsilon_{\mathfrak{E}}\Pi$ und folglich

$$\mathsf{E} = \Psi\varepsilon_{\mathfrak{E}} = (\Lambda \times \Pi)\,\varepsilon_{\mathfrak{E}} = \Lambda\varepsilon_{\mathfrak{E}}\Pi = \varepsilon_{\mathfrak{E}}\Pi.$$

Damit ist (27) bewiesen.

Die noch ausstehenden Beweise der Sätze III und IV der Einleitung ergeben sich als unmittelbare Folge aus den bisher erhaltenen Resultaten, insbesondere aus (27) und (25), was wir nun zeigen wollen.

Zum Beweis von III genügt es wegen (27), die Isomorphie von B zu einem Unterring von E anzugeben. Dazu bilden wir den Homomorphismus $\mathsf{B} \to \mathsf{B}\varepsilon_{\mathfrak{E}}$, welcher für die Funktionen aus B die Einschränkung des Definitionsbereiches $\mathfrak{O}$ auf den kleineren Bereich $\mathfrak{E}$ bedeutet. Dieser Homomorphismus ist sogar ein Isomorphismus: Die Funktionen aus B sind nämlich als Klassenfunktionen schon durch ihre Werte auf $\mathfrak{E}$ eindeutig bestimmt, weil jede Klasse aus $\mathfrak{O}$ nach (26) mindestens einen Vertreter in $\mathfrak{E}$ besitzt. Ferner ist das isomorphe Bild $\mathsf{B}\varepsilon_{\mathfrak{E}}$ ein Teilring von E, was man wegen $\mathsf{B} \leqq \mathsf{X}_{\mathfrak{p}}$ der Formel (24a) entnimmt. Daher bedeutet die Abbildung $\mathsf{B} \to \mathsf{B}\varepsilon_{\mathfrak{E}}$ in der Tat einen Isomorphismus von B in E. — Das erhaltene Resultat formulieren wir in folgendem Satz:

(28) *Der Block* B *ist zu einem Teilring* T *von* Π *isomorph, und zwar wird dieser Isomorphismus dadurch gegeben, daß man jeder Funktion* ξ *aus* B *diejenige eindeutig bestimmte Funktion* τ *aus* Π *zuordnet, für die* $\xi\varepsilon_{\mathfrak{E}} = \varepsilon_{\mathfrak{E}}\tau$ *ist, die also auf* $\mathfrak{E}$ *mit* ξ *übereinstimmt.*

Damit ist der Satz III bewiesen. Den Beweis von Satz IV führen wir durch einen Vergleich des Isomorphismus $\mathsf{B} \to \mathsf{T}$, welcher gemäß (28) durch

$$\mathsf{B}\varepsilon_{\mathfrak{E}} = \varepsilon_{\mathfrak{E}}\mathsf{T} \tag{29}$$

definiert ist, mit der linearen Abbildung $\Pi \to (\varepsilon_{\mathfrak{E}}\Pi)^*$, welche Π nach (27) und (25) auf B abbildet. Es handelt sich darum nachzuweisen, daß T gleich dem Ring $\tilde{\mathsf{T}}$ aller derjenigen Funktionen aus Π ist, deren Funktionswerte nur von der Klasse in $\mathfrak{N}_R$ des Arguments abhängen. Und zwar werden wir der Reihe nach folgendes zeigen:

(30a) $$\mathsf{T} \leqq \tilde{\mathsf{T}};$$

(30b) $$(\varepsilon_{\mathfrak{E}}\mathsf{T})^* = \mathsf{B};$$

(30c) *Die lineare Abbildung* $\tilde{\mathsf{T}} \to (\varepsilon_{\mathfrak{E}}\tilde{\mathsf{T}})^*$ *ist treu.*

Aus (30a) und (30b) folgt nämlich $(\varepsilon_{\mathfrak{E}}\mathsf{T})^* = (\varepsilon_{\mathfrak{E}}\tilde{\mathsf{T}})^*$ $(= \mathsf{B})$, und daher ergibt sich nach (30a) und (30c), daß in der Tat $\mathsf{T} = \tilde{\mathsf{T}}$ ist.

Zu (30a). Dies ist eine Folge der Klassenfunktioneneigenschaft der Funktionen ξ aus B: Nach (28) sind nämlich die Funktionen τ aus T dadurch gekennzeichnet, daß es zu ihnen eine Funktion ξ aus B gibt, für die $\xi(RP) = \tau(P)$ ist, bei beliebigem P aus $\mathfrak{P}$. Sind nun die Elemente P und P' aus $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{N}_R$ konjugiert, so sind auch RP und RP' in $\mathfrak{N}_R$ konjugiert; also ist $\tau(P') = \xi(RP') = \xi(RP) = \tau(P)$, weil ξ eine Klassenfunktion ist.

Zu (30b). Der $\mathsf{I}_{\mathfrak{p}}$-Modul $(\varepsilon_{\mathfrak{E}}\mathsf{T})^*$ aus B ist sogar ein *Ideal*, was sich aus den Gleichungen $\mathsf{B}(\varepsilon_{\mathfrak{E}}\mathsf{T})^* = (\mathsf{B}\varepsilon_{\mathfrak{E}}\mathsf{T})^* = (\varepsilon_{\mathfrak{E}}\mathsf{T})^*$ ergibt, deren erste genau so wie in (24b) bewiesen wird und deren zweite aus (29) folgt. Nun verwenden wir eine schon öfter angewandte Schlußweise: Das Ideal $(\varepsilon_{\mathfrak{E}}\mathsf{T})^*$ von B enthält die Funktion $\varepsilon^*_{\mathfrak{E}}$, die nach (22a) nicht lauter durch $\mathfrak{p}$ teilbare Funktionswerte besitzt. Daher ist $(\varepsilon_{\mathfrak{E}}\mathsf{T})^*$ wegen der Blockeigenschaft (9) von B gleich B selbst.

Zu (30c). Es sei

P ein beliebiges Element aus $\mathfrak{P}$;

$\mathbf{P}$ seine Klasse in $\mathfrak{N}_R$ mit der Elementezahl $g_{\mathbf{P}} = (\mathfrak{N}_R : \mathfrak{N}_R \cap \mathfrak{N}_{\mathbf{P}})$;

$\mathbf{P} \cap \mathfrak{P}$ ihr Durchschnitt mit $\mathfrak{P}$, mit der Elementezahl $g_{\mathbf{P} \cap \mathfrak{P}}$.

Dann berechnen wir für eine Funktion $\tilde{\tau}$ aus $\tilde{\mathsf{T}}$ den Funktionswert der Induzierten:

$$(\varepsilon_{\mathfrak{E}}\tau)^*(RP) = \frac{1}{(\mathfrak{H} : 1)} \sum_{X \text{ in } \mathfrak{G}} (\varepsilon_{\mathfrak{E}}\tilde{\tau})(R^X P^X).$$

Liegt X nicht in $\mathfrak{N}_R$, so liegt $R^X P^X$ nicht in $\mathfrak{E}$, also ist der zugehörige Summand $(\varepsilon_{\mathfrak{E}}\tilde{\tau})(R^X P^X) = 0$. Dasselbe gilt auch, falls zwar X in $\mathfrak{N}_R$ liegt, aber P^X nicht in $\mathfrak{P}$. Wir können daher in der obigen Summe die Summationsbeschränkung einführen, daß über alle X aus $\mathfrak{N}_R$ zu summieren sei, für die P^X in $\mathfrak{P}$ liegt. Als Argumente RP^X treten dann bei der Summation nur solche Elemente auf, für die P^X in $\mathbf{P} \cap \mathfrak{P}$ liegt. Jedes P' aus $\mathbf{P} \cap \mathfrak{P}$ tritt dabei so oft auf, wie es die Ordnung des Normalisators $\mathfrak{N}_{RP} = \mathfrak{N}_R \cap \mathfrak{N}_P$ angibt; denn alle X aus $\mathfrak{N}_R$, die RP in RP' überführen, bilden eine Restklasse von $\mathfrak{N}_R$ modulo $\mathfrak{N}_{RP}$. Es folgt also

$$(\varepsilon_{\mathfrak{E}}\tilde{\tau})^*(RP) = \frac{(\mathfrak{N}_R \cap \mathfrak{N}_P : 1)}{(\mathfrak{H} : 1)} \sum_{P' \text{ in } \mathbf{P} \cap \mathfrak{P}} (\varepsilon_{\mathfrak{E}}\tilde{\tau})(RP')$$

(31a) $$= (\mathfrak{N}_R : \mathfrak{H}) \frac{1}{g_{\mathbf{P}}} \sum_{P' \text{ in } \mathbf{P} \cap \mathfrak{P}} \tilde{\tau}(P').$$

Nun nützen wir aus, daß $\tilde{\tau}$ in $\tilde{\mathsf{T}}$ liegt, daß also $\tilde{\tau}(P') = \tilde{\tau}(P)$ für jedes P' aus $\mathbf{P} \cap \mathfrak{P}$ ist. So ergibt sich aus (31a)

(31b) $$(\varepsilon_{\mathfrak{E}}\tilde{\tau})^*(RP) = (\mathfrak{N}_R : \mathfrak{H}) \frac{g_{\mathbf{P} \cap \mathfrak{P}}}{g_{\mathbf{P}}} \tilde{\tau}(P).$$

Hieraus liest man nun unmittelbar ab, daß $(\varepsilon_{\mathfrak{E}}\tilde{\tau})^* = 0$ mit $\tilde{\tau} = 0$ gleichbedeutend ist, was zu zeigen war.

Nach dem oben Gesagten ist hiermit der Satz IV bewiesen, der letzte Satz unter den Struktursätzen I—V, welcher noch zu beweisen war. Wie in der Einleitung ausgeführt, ist damit die Reduktion der Struktur von $\mathsf{X}_{\mathfrak{p}}$ auf die Struktur von p-Untergruppen und deren Einbettung in Untergruppen von $\mathfrak{G}$ vollständig durchgeführt.

Wir schließen noch einige kleine Bemerkungen an, welche die explizite Konstruktion von T betreffen, wenn sowohl der Charakterring Π von $\mathfrak{P}$ bekannt ist (etwa durch Angabe der irreduziblen Charaktere von $\mathfrak{P}$) als auch die Einbettung von $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{N}_R$.

Aus (30b), (30c) und Satz IV ergibt sich, daß T ein Vertretermodul für die lineare Abbildung $\Pi \to (\varepsilon_{\mathfrak{G}} \Pi)^*$ ist. Das soll heißen: Ist N der durch $(\varepsilon_{\mathfrak{G}} \mathsf{N})^* = 0$ definierte Teilmodul von Π, so ist T ein Vertretermodul des Faktormoduls Π/N. Demnach ist Π die direkte Modulsumme

$$\Pi = \mathsf{T} + \mathsf{N}, \tag{32}$$

welche natürlich im allgemeinen keine direkte Ringsumme ist, weil Π als $\mathfrak{p}$-adischer Charakterring der p-Gruppe $\mathfrak{P}$ nach (23) direkt unzerlegbar ist. Die Funktionen ν aus N sind nach (31a) unter den Funktionen aus Π durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß für jedes Element P aus $\mathfrak{P}$

$$\frac{1}{\mathfrak{g}_{\mathbf{P}} \cap \mathfrak{P}} \sum_{P' \text{ in } \mathbf{P} \cap \mathfrak{P}} \nu(P') = 0$$

ist, während die Funktionen τ aus T nach IV durch

$$\frac{1}{\mathfrak{g}_{\mathbf{P}} \cap \mathfrak{P}} \sum_{P' \text{ in } \mathbf{P} \cap \mathfrak{P}} \tau(P') = \tau(P)$$

charakterisiert sind. Hieraus gewinnen wir eine konstruktive Beschreibung der Zerlegung (32): Zu jeder Funktion π aus Π bilde man die Funktion $T\pi$, definiert durch

$$T\pi(P) = \frac{1}{\mathfrak{g}_{\mathbf{P}} \cap \mathfrak{P}} \sum_{P' \in \mathbf{P} \cap \mathfrak{P}} \pi(P'),$$

welche offenbar die Bedingung für die Funktionen aus T erfüllt. Ferner ist nach (31a) und (31b) $(\varepsilon_{\mathfrak{G}} T\pi)^* = (\varepsilon_{\mathfrak{G}} \pi)^*$, also $\pi \equiv T\pi \bmod \mathsf{N}$. Demnach ist $T\pi$ die Komponente von π in T, und die Zerlegung von π gemäß (32) wird durch

$$\pi = T\pi + (1 - T)\pi$$

gegeben. Durchläuft π ein $\mathsf{I}_{\mathfrak{p}}$-Erzeugendensystem von Π, etwa die irreduziblen Charaktere von $\mathfrak{P}$, so durchläuft $T\pi$ ein $\mathsf{I}_{\mathfrak{p}}$-Erzeugendensystem von T. Diese Angaben ermöglichen die Konstruktion von T.

§ 4. Die beiden gruppentheoretischen Induktionsprinzipien und ihre Anwendung zur Bestimmung des Zerfällungskörpers einer endlichen Gruppe sowie in der Theorie der Artinschen L-Funktionen.

9. Das Induktionsprinzip für elementare Charaktere.

Wie in der Einleitung gesagt, wollen wir in diesem Paragraphen die in §§ 1—3 erzielten Resultate so zurechtlegen, daß sie für die Anwendungen bequem zu handhaben sind. Wir knüpfen dabei an den Satz (25) an, welcher besagt, daß der $\mathfrak{p}$-adische Charakterring $\mathsf{X}_{\mathfrak{p}}$ von $\mathfrak{G}$ die direkte Ringsumme

$$\mathsf{X}_{\mathfrak{p}} = \sum_{E} \mathsf{E}^* \tag{33}$$

ist, wenn E ein volles System nichtkonjugierter Elementarblöcke für $\mathsf{X}_{\mathfrak{p}}$ durchläuft. Man erhält diese E, wie wir gesehen haben, auf folgende Weise: Man wähle ein volles System nichtkonjugierter p-regulärer Gruppenelemente R und zu jedem eine p-Sylowgruppe $\mathfrak{P}_R$ des Normalisators $\mathfrak{N}_R$; dann bilde man die zugehörigen elementaren Untergruppen $\mathfrak{H} = (R) \times \mathfrak{P}_R$ und deren $\mathfrak{p}$-Oberklassen $\mathfrak{E} = R\mathfrak{P}_R$; zu den letzteren gehören in den jeweiligen $\mathfrak{p}$-adischen Charakterringen $\Psi_{\mathfrak{p}}$ der $\mathfrak{H}$ die Elementarblöcke $\mathsf{E} = \Psi_{\mathfrak{p}} \varepsilon_{\mathfrak{E}}$, welche durch den Induktionsprozeß gerade die Blöcke von $\mathsf{X}_{\mathfrak{p}}$, jeden genau ein Mal, liefern.

Indem wir an die Stelle der Elementarblöcke E die vollen $\mathfrak{p}$-adischen Charakterringe $\Psi_{\mathfrak{p}}$ der zugehörigen elementaren Untergruppen $\mathfrak{H}$ setzen, erhalten wir aus (33) die nichtdirekte Modulzerlegung

$$\mathsf{X}_{\mathfrak{p}} = \sum_{\mathfrak{H}} \Psi_{\mathfrak{p}}^{*}, \tag{34}$$

summiert über ein volles System nichtkonjugierter elementarer Untergruppen für die Blöcke von $\mathsf{X}_{\mathfrak{p}}$. Dies Resultat „im Kleinen", welches sich auf die willkürlich gewählte Primzahl p und den zugehörigen $\mathfrak{p}$-adischen Charakterring $\mathsf{X}_{\mathfrak{p}}$ bezieht, soll nun zu einer Aussage „im Großen", welche sich auf den ganzrationalen Charakterring X bezieht, umgeformt werden. Dazu definieren wir:

Eine Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$ heißt schlechthin „*elementar*", wenn es eine Primzahl p gibt, so daß sich $\mathfrak{U}$ als direktes Produkt einer p-regulären zyklischen Gruppe mit einer p-Gruppe schreiben läßt[13]). Der ganzrationale Charakterring Ω von $\mathfrak{U}$ heißt ein *elementarer Untergruppencharakterring* von $\mathfrak{G}$.

Wir untersuchen nun den Modul $\tilde{\mathsf{X}} = \sum_{\Omega} \Omega^{*}$, welcher die (nichtdirekte) Summe der Induzierten Ω^{*} aller elementaren Untergruppencharakterringe Ω ist. Wir wollen zeigen, daß $\tilde{\mathsf{X}}$ mit X zusammenfällt: $\tilde{\mathsf{X}} = \mathsf{X}$. Dafür bemerken wir zunächst, daß $\tilde{\mathsf{X}}$ nicht nur ein Γ-Teilmodul, sondern sogar ein *Ideal* von X ist; dies erkennt man aus den Formeln $\mathsf{X}\Omega \leqq \Omega$ und $\mathsf{X}\Omega^{*} = (\mathsf{X}\Omega)^{*}$, welche man genau so beweist wie die Formeln (24a) und (24b). Im Hinblick auf diese Idealeigenschaft von $\tilde{\mathsf{X}}$ genügt es zum Beweis von $\tilde{\mathsf{X}} = \mathsf{X}$ nachzuweisen, daß die 1 in $\tilde{\mathsf{X}}$ liegt.

Dazu bilden wir zu jeder Primzahl p den $\mathfrak{p}$-adischen Körper $\mathsf{K}_{\mathfrak{p}} = \mathsf{P}_{p}\left(\sqrt[g_0]{1}\right)$ der g_0-ten Einheitswurzeln, seinen Integritätsbereich $\mathsf{I}_{\mathfrak{p}} = \Gamma_{p}\left[\sqrt[g_0]{1}\right]$, sowie die $\mathfrak{p}$-adischen Erweiterungsringe

$$\mathsf{X}_{\mathfrak{p}} = \mathsf{I}_{\mathfrak{p}}\mathsf{X}; \quad \Omega_{\mathfrak{p}} = \mathsf{I}_{\mathfrak{p}}\Omega; \quad \tilde{\mathsf{X}}_{\mathfrak{p}} = \mathsf{I}_{\mathfrak{p}}\tilde{\mathsf{X}} = \sum_{\Omega} \Omega_{\mathfrak{p}}^{*}.$$

Jetzt verwenden wir den Satz (34), nach welchem offenbar $\tilde{\mathsf{X}}_{\mathfrak{p}} = \mathsf{X}_{\mathfrak{p}}$ ist, weil die elementaren Untergruppen $\mathfrak{H}$ der Blöcke von $\mathsf{X}_{\mathfrak{p}}$ unter den sämtlichen elementaren Untergruppen $\mathfrak{U}$ und daher die $\Psi_{\mathfrak{p}}$ unter den $\Omega_{\mathfrak{p}}$ vorkommen. Die 1 ist also in $\tilde{\mathsf{X}}_{\mathfrak{p}}$ gelegen, und dies gilt, um es noch einmal zu sagen, für jede Primzahl p. Hieraus haben wir nun zu folgern, daß auch 1 in $\tilde{\mathsf{X}}$ liegt.

Zunächst schließen wir aus $\tilde{\mathsf{X}}_{\mathfrak{p}} = \mathsf{X}_{\mathfrak{p}}$, daß $\tilde{\mathsf{X}}_{\mathfrak{p}}$ und $\mathsf{X}_{\mathfrak{p}}$ denselben Rang haben. Da sich aber der Rang beim Übergang von $\tilde{\mathsf{X}}$ zu $\tilde{\mathsf{X}}_{\mathfrak{p}}$ und von X zu $\mathsf{X}_{\mathfrak{p}}$ nicht ändert, so haben auch $\tilde{\mathsf{X}}$ und X denselben Rang. Daher ist die 1 durch eine Basis $\tilde{\xi}_i$ von $\tilde{\mathsf{X}}$ jedenfalls mit *rationalen* Koeffizienten darstellbar:

$$1 = \sum_{i} a_i \tilde{\xi}_i \qquad (a_i \text{ in } \mathsf{P}). \tag{35}$$

Nun bilden aber die $\tilde{\xi}_i$ für jedes p auch eine $\mathsf{I}_{\mathfrak{p}}$-Basis von $\tilde{\mathsf{X}}_{\mathfrak{p}}$. Die auftretenden Koeffizienten a_i bei der Darstellung von 1 durch die $\tilde{\xi}_i$ liegen daher in $\mathsf{I}_{\mathfrak{p}}$, weil ja, wie oben gezeigt, 1 in $\tilde{\mathsf{X}}_{\mathfrak{p}}$ liegt. Als rationale Zahlen sind die a_i somit p-ganz, und da dies für jede Primzahl p gilt, so sind sie ganzrational. Daher setzt die Darstellung (35) die Zugehörigkeit von 1 zu $\tilde{\mathsf{X}}$ in Evidenz.

---

[13]) Die Bezeichnung „elementar" geht auf einen Vorschlag von *R. Brauer* zurück. Vgl. Applications of induced characters, a. a. O.[4]), S. 709.

Wir haben hiermit gezeigt:

(36) *Der Charakterring* X *von* $\mathfrak{G}$ *ist die (nichtdirekte) Summe*

$$\mathsf{X} = \sum_{\Omega} \Omega^*$$

der Induzierten Ω^* *aller elementaren Untergruppencharakterringe* Ω *von* $\mathfrak{G}$.

Dieser Satz ist der wesentliche Teil des R. Brauerschen „Satzes über induzierte Charaktere"[14]). Seine Bedeutung für unsere Untersuchungen liegt darin, daß er offenbar das folgende *Induktionsprinzip* auszusprechen gestattet:

(37) *Besitzen die elementaren Untergruppencharaktere von* $\mathfrak{G}$ *eine Eigenschaft E, welche sowohl beim Induktionsprozeß als auch bei linearer Zusammensetzung erhalten bleibt, so besitzen alle Charaktere von* $\mathfrak{G}$ *die Eigenschaft E.*

10. Das Induktionsprinzip für zyklische Charaktere.

Wir gehen jetzt noch einen Schritt weiter und wollen aus dem Induktionsprinzip (37) für elementare Untergruppencharaktere ein entsprechendes Induktionsprinzip für zyklische Untergruppencharaktere herleiten. Dabei nennen wir einen Charakter *zyklisch*, wenn die zu ihm gehörige Darstellungsgruppe, d. h. die Gruppe der Darstellungsmatrizen einer zu ihm gehörigen Darstellung, zyklisch ist. Das zu beweisende Induktionsprinzip lautet:

(38) *Besitzen die zyklischen Untergruppencharaktere von* $\mathfrak{G}$ *eine Eigenschaft E, welche sowohl beim Induktionsprozeß als auch bei linearer Zusammensetzung erhalten bleibt, so besitzen alle Charaktere von* $\mathfrak{G}$ *die Eigenschaft E.*

Zum Beweise haben wir (analog zu (36)) nachzuweisen, daß jeder Charakter von $\mathfrak{G}$ als ganzrationale Linearkombination von Induzierten zyklischer Charaktere darstellbar ist. Nun erfüllt die Eigenschaft, als ganzrationale Linearkombination von Induzierten zyklischer Charaktere darstellbar zu sein, offenbar die Bedingungen von (37), d. h. sie bleibt beim Induktionsprozeß und bei linearer Zusammensetzung erhalten[15]). Daher haben wir auf Grund des bereits als richtig erkannten Induktionsprinzips (37) nur nachzuweisen, daß jeder Charakter einer elementaren Gruppe als ganzrationale Linearkombination von Induzierten zyklischer Charaktere darstellbar ist. Dies folgt nun unmittelbar aus dem Satz von Blichfeldt-Witt, nach dem jeder irreduzible Charakter einer elementaren Gruppe *monomial* ist, d. h. durch einen zyklischen Untergruppencharakter induziert wird, der sogar irreduzibel, also von erstem Grade, ist[16]).

Somit ist auch das Induktionsprinzip (38) für zyklische Charaktere als richtig erkannt. Es erlaubt, Aussagen über die Charaktere von $\mathfrak{G}$ auf Aussagen über zyklische Untergruppencharaktere zurückzuführen, welche im allgemeinen viel einfacher als jene zu behandeln sind.

---

[14]) Vgl. On Artin's *L*-series with general group characters, a. a. O.[4]), Theorem 1, S. 503, sowie *T. A. Springer*, On induced group characters, Acad. Wet. Amsterdam **51** (1948), S. 699.

[15]) Ersteres nach dem bekannten „Transitivitätssatz" für induzierte Charaktere, welcher folgendes besagt: Ist $\mathfrak{H}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ und ξ ein Untergruppencharakter von $\mathfrak{H}$, so erhält man den in $\mathfrak{G}$ induzierten Charakter ξ^*, indem man zuerst den von ξ in $\mathfrak{H}$ induzierten, und dann den von diesem in $\mathfrak{G}$ induzierten bildet.

[16]) *Blichfeldt* hat diesen Satz für *p*-Gruppen bewiesen [Trans. Amer. Math. Soc. **4** (1903); **5** (1904)], und *E. Witt* hat ihn in einfacher Weise für alle Gruppen bewiesen, welche eine primzahlstufige Hauptreihe besitzen [sein Beweis findet sich in der in diesem Heft abgedruckten Arbeit]. Dies trifft offenbar für die elementaren Gruppen zu, weil sie direkte Produkte von zyklischen mit *p*-Gruppen sind. Ein direkter, auf der Theorie der Charaktere beruhender Beweis für elementare Gruppen findet sich bei *R. Brauer*, On Artin's *L*-series with general group characters, a. a. O.[4]), S 513, Lemma 2—4. Im Hinblick auf diese Literaturangaben erübrigt sich für uns ein Eingehen auf den Beweis dieses Satzes.

11. Bestimmung des minimalen Darstellungskörpers einer endlichen Gruppe.

Als erste Anwendung des Induktionsprinzips wollen wir nun den Satz VI der Einleitung beweisen. Dazu ist es sehr nützlich, den Begriff eines *Darstellungskörpers für einen Charakter* ξ von $\mathfrak{G}$ einzuführen. Darunter wollen wir einen solchen Körper der Charakteristik 0 verstehen, über dem es eine Darstellung $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{G}$ mit der Spur ξ gibt. Der Satz VI besagt, daß der Körper $\mathsf{P}\left(\sqrt[g_0]{1}\right)$ ein Darstellungskörper für jeden Charakter von $\mathfrak{G}$ ist.

Zu seinem Beweise betrachten wir die Eigenschaft E der Charaktere, den Körper $\mathsf{P}\left(\sqrt[g_0]{1}\right)$ als Darstellungskörper zu besitzen. Wir haben zu zeigen, daß diese Eigenschaft erstens allen zyklischen Untergruppencharakteren von $\mathfrak{G}$ zukommt, und zweitens beim Induktionsprozeß und bei linearer Zusammensetzung erhalten bleibt; dann können wir ja auf Grund des Induktionsprinzips (38) schließen, daß E allen Charakteren von $\mathfrak{G}$ zukommt. Das erste ist nun unmittelbar klar, weil jede irreduzible zyklische Untergruppendarstellung von $\mathfrak{G}$ nach dem Schurschen Lemma von erstem Grade ist, also einen Homomorphismus auf Einheitswurzeln bedeutet, deren Ordnungen offenbar den Exponenten g_0 von $\mathfrak{G}$ teilen. Diese Einheitswurzeln liegen also in $\mathsf{P}\left(\sqrt[g_0]{1}\right)$.

Die Invarianz von E beim Induktionsprozeß erkennt man auch ganz leicht: Wie schon in der Einleitung gesagt, erhält man nämlich eine in $\mathfrak{G}$ induzierte Darstellung $\mathfrak{D}^*$ für eine Darstellung $\mathfrak{D}$ einer Untergruppe $\mathfrak{H}$ durch Überlagerung von $\mathfrak{D}$ mit der Restklassenpermutationsdarstellung von $\mathfrak{G}$ modulo $\mathfrak{H}$; dabei bleibt aber der Darstellungskörper erhalten. — Die Invarianz von E bei linearer Zusammensetzung ergibt sich schließlich aus der Bemerkung, daß sich die Eigenschaft E für einen Charakter ξ offenbar darin äußert, daß er eine lineare Kombination der bezüglich $\mathsf{P}\left(\sqrt[g_0]{1}\right)$ irreduziblen Charaktere χ_0 von $\mathfrak{G}$ ist:

$$\xi = \sum_{\chi_0} a_{\chi_0} \chi_0 \qquad (a_{\chi_0} \geqq 0, \text{ in } \Gamma).$$

Die Möglichkeit einer solchen Darstellung bleibt aber bei linearer Zusammensetzung erhalten[17]).

Demnach erfüllt die Eigenschaft E in der Tat die Bedingungen des Induktionsprinzips; sie kommt daher allen Charakteren von $\mathfrak{G}$ zu:

(39) $\mathsf{P}\left(\sqrt[g_0]{1}\right)$ *ist ein Darstellungskörper für jeden Charakter von* $\mathfrak{G}$.

Das Beispiel der symmetrischen Gruppen, deren sämtliche Charaktere bereits den rationalen Zahlkörper als Darstellungskörper besitzen[18]), zeigt, daß $\mathsf{P}\left(\sqrt[g_0]{1}\right)$ im allgemeinen kein minimaler Darstellungskörper für alle Charaktere von $\mathfrak{G}$ ist. Daher bleibt die Frage nach der Konstruktion eines solchen Körpers offen. Der Satz (39) erhält jedoch eine abgerundete Form, wenn man diejenigen Körper untersucht, die nicht nur für alle Charaktere von $\mathfrak{G}$ selbst, sondern auch für alle Untergruppencharaktere von $\mathfrak{G}$ Darstellungskörper sind. Einen solchen Körper wollen wir kurz einen *Darstellungskörper für* $\mathfrak{G}$ nennen. Dann können wir (39) so aussprechen:

(40) *Unter allen Darstellungskörpern einer endlichen Gruppe* $\mathfrak{G}$ *vom Exponenten* g_0 *gibt es einen eindeutig bestimmten kleinsten Körper, nämlich den Körper der* g_0*-ten Einheitswurzeln.*

---

[17]) Der folgende Satz (39) zeigt übrigens, daß die χ_0 bereits absolut irreduzibel sind.

[18]) *G. Frobenius*, Sitz.Ber. Berliner Akad. 1903, S. 328.

Die Gleichwertigkeit dieses Satzes mit (39) ergibt sich aus der Tatsache, daß $\mathsf{P}\left(\sqrt[g_0]{1}\right)$ offenbar der kleinste Darstellungskörper für alle zyklischen Untergruppencharaktere von $\mathfrak{G}$ ist.

12. Aus der Theorie der Artinschen *L*-Funktionen.

Auch die Theorie der Artinschen L-Funktionen enthält ein Beispiel für die Anwendbarkeit des Induktionsprinzips (38):

E. Artin hat für jeden Untergruppencharakter ξ der Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$ einer galoisschen Zahlkörpererweiterung $\mathsf{K}/\varkappa$ eine L-Funktion $L(s \mid \xi)$ erklärt, welche eine analytische Funktion der komplexen Variablen s ist[19]). Dabei bewies er für diese die folgenden beiden Formeln:

a) $L(s \mid \xi^*) = L(s \mid \xi)$, wenn ξ^* der in $\mathfrak{G}$ Induzierte von ξ ist (Invarianz);

b) $L(s \mid \xi_1 + \xi_2) = L(s \mid \xi_1)\, L(s \mid \xi_2)$ (Linearität).

Es entsteht die Aufgabe, nachzuweisen, daß diese L-Funktionen *meromorph* sind.

Betrachten wir dazu die Eigenschaft E der Untergruppencharaktere von $\mathfrak{G}$, eine meromorphe L-Funktion zu besitzen, so entnehmen wir aus a) bzw. b), daß diese Eigenschaft beim Induktionsprozeß und bei linearer Zusammensetzung erhalten bleibt. Infolgedessen ist nach dem Induktionsprinzip (38) nur zu zeigen, daß die L-Funktion $L(s \mid \zeta)$ eines zyklischen Charakters ζ meromorph ist. Dies schließt man bekanntlich so[19]):

Dem zyklischen Charakter ζ entspricht eine zyklische Erweiterung $\mathsf{K}/\varkappa$ und daher nach dem klassenkörpertheoretischen Reziprozitätsgesetz ein Kongruenzklassencharakter ζ_0 der Divisorengruppe von $\varkappa$. Es wird gezeigt, daß dabei $L(s \mid \zeta)$ gleich der Heckeschen L-Reihe $L(s \mid \zeta_0)$ ist, weil die letzteren denselben formalen Rechenregeln genügen wie die Artinschen L-Funktionen. $L(s \mid \zeta_0)$ ist aber nach Hecke meromorph[20]).

Damit ist gezeigt, wie das Induktionsprinzip (38) ohne Schwierigkeit auch den Satz VII der Einleitung liefert, daß die Artinschen L-Funktionen meromorph sind.

Schlußbemerkung über die direkte Herleitung der Induktionsprinzipien.

Wie in der Einleitung gesagt und eben an zwei Beispielen gezeigt, bildet das Induktionsprinzip (38) wohl die wichtigste Folgerung der hier entwickelten Theorie. Es erscheint daher angebracht, diejenigen Schlüsse aus unserer Arbeit, welche zu seinem Beweise führen, kurz zusammenzustellen. So ergibt sich ein äußerst kurzer und eleganter direkter Beweis von (38), der wohl immer dann vorzuziehen ist, wenn man nicht die Strukturtheorie des Charakterringes, sondern lediglich den Beweis des Induktionsprinzips im Auge hat.

Das Induktionsprinzip (38) läßt sich, wie wir in **9** gesehen haben, leicht aus dem Satz (36) folgern, und dieser Satz ergibt sich, wie sein Beweis zeigt, fast unmittelbar aus der Tatsache, daß für jedes $\mathfrak{p}$ die 1 in $\tilde{\mathsf{X}}_{\mathfrak{p}} = \sum_{\Omega} \Omega_{\mathfrak{p}}^*$ liegt, wobei Ω alle elementaren Untergruppencharakterringe durchläuft. Das beweist man nun so:

Hat man ein vollständiges System nichtkonjugierter p-regulärer Elemente R und zu diesen je eine p-Sylowgruppe $\mathfrak{P}_R$ des Normalisators $\mathfrak{N}_R$ gewählt, so bilde man die elementaren Untergruppen $\mathfrak{H}_R = (R) \times \mathfrak{P}_R$. Dann liegen die Idempotente

$$\varepsilon_R = \frac{1}{r} \sum_{\lambda} \lambda(R^{-1})\, \lambda \qquad \left(\begin{array}{l} r \text{ die Ordnung von } R, \\ \lambda \text{ durchläuft die irreduziblen} \\ \text{Charaktere von } (R) \end{array}\right)$$

[19]) Vgl. *H. Hasse*, Zahlbericht II, Jahresber. D. M.-V., Erg.Bd. 6 (1930).

[20]) Vgl. die im Hasseschen Zahlbericht hierzu angegebene Literatur.

jeweils im $\mathfrak{p}$-adischen Charakterring $\Psi_{R\mathfrak{p}}$ von $\mathfrak{H}_R$, weil erstens r prim zu p ist, und weil zweitens die r-ten Einheitswurzeln $\lambda(R^{-1})$ im Koeffizientenbereich $\mathfrak{l}_\mathfrak{p}$ von $\Psi_{R\mathfrak{p}}$ liegen. Infolgedessen liegen die Induzierten ε_R^* der ε_R sämtlich in $\widetilde{\mathsf{X}}_\mathfrak{p}$. Daher liegen auch die Idempotente

$$\eta_R = \mathfrak{p}\text{-}\lim_{n\to\infty} (\varepsilon_R^*)^{\varphi(\mathfrak{p}^n)}$$

in $\widetilde{\mathsf{X}}_\mathfrak{p}$ (Satz (6)). Die 1-Menge eines jeden η_R ist diejenige Teilmenge $\mathfrak{O}_R$ von $\mathfrak{G}$, auf der ε_R^* nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbare Werte annimmt (Formel (11)). Durch Berechnung der Funktionswerte von ε_R^* aus Formel (4) erkennt man, daß $\mathfrak{O}_R$ aus allen denjenigen Gruppenelementen besteht, deren p-reguläre Faktoren zu R konjugiert sind (Formeln (20) und (22a)). Daher sind die 1-Mengen $\mathfrak{O}_R$ der Idempotente η_R paarweise fremd und erfüllen ganz $\mathfrak{G}$. Daraus folgt, daß

$$1 = \sum_R \eta_R$$

ist, und diese Darstellung der 1 setzt die Zugehörigkeit von 1 zu $\widetilde{\mathsf{X}}_\mathfrak{p}$ in Evidenz.

Eingegangen 8. Februar 1951.

Beweis einer Erweiterung des Satzes von Goldbach-Vinogradov *).

Von *Achim Zulauf* in Mainz.

Einleitung.

In Verfolg des Goldbachschen Problems bewiesen Hardy und Littlewood [1]) und im Anschluß daran (etwas einfacher) Landau [2]) 1922 folgenden Satz:

Unter der Annahme, daß eine gewisse Hypothese (H) wahr ist, gilt:

(1) Jede genügend große ungerade Zahl n ist als Summe $n = p_1 + p_2 + p_3$ von drei ungeraden Primzahlen darstellbar; genauer: Für die Anzahl der Darstellungen gilt

$$\mathrm{N}(n) = \sum_{p_1+p_2+p_3=n} 1 = \frac{n^2}{\log^3 n} \cdot \frac{1}{2} \cdot S(n) + O\left(\frac{n^2}{\log^3 n}\right) \tag{2}$$

mit n ungerade $\to \infty$; dabei hängt die sog. singuläre Reihe $S(n)$ nur von den arithmetischen Eigenschaften von n ab und ist für ungerade n gleichmäßig positiv und beschränkt.

Die Hypothese (H) — sie lautet bekanntlich: Es gibt eine Weltkonstante $\theta < 3/4$ derart, daß alle Dirichletschen L-Funktionen $L(s, \chi) \neq 0$ sind für $\sigma = \mathfrak{Re}\, s > \theta$ — ist bis heute noch nicht bewiesen. Es gelang jedoch Vinogradov 1937, die Aussagen (1) und (2) als wahr zu erweisen, indem er statt der klassischen Hardy-Littlewoodschen Methode Abschätzungen von endlichen sog. Weylschen Exponentialsummen benutzte [3]).

Inzwischen haben Linnik [4]) und Čudakov [5]) erkannt, daß man auch mit der klassischen Methode zum Ziel kommen kann, und sie bewiesen (1) und (2), indem sie die Hypothese (H) durch schwächere, aber gesicherte neuere Resultate von Siegel-Walfisz [6]) und Linnik [7]) über die Nullstellenverteilung der L-Funktionen ersetzten. Ich will nun im folgenden darlegen, daß die neuen Linnik-Čudakovschen Hilfsmittel ausreichen, um auch folgenden Satz zu beweisen:

---

*) Dissertation bei der naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Mainz (D 26); Referent: Prof. Dr. *H. Rohrbach*.

[1]) *G. H. Hardy* und *J. E. Littlewood*, Some problems of partitio numerorum. III: On the expression of a number as a sum of primes. Acta math. **44** (1922), S. 1—70.

[2]) *E. Landau*, Zur additiven Primzahltheorie. Rend. Circ. mat. Palermo **46** (1922), S. 349—356, und Vorlesungen über Zahlentheorie **1**, V. Teil.

[3]) *I. M. Vinogradov*, Representation of an odd number as a sum of three primes. Doklady Akad. Nauk SSSR (2) **15** (1937), S. 291—294.

[4]) *Ju. V. Linnik*, A new proof of the Goldbach-Vinogradov-Theorem. Mat. Sbornik N. Ser. **19** (**61**) (1946), S. 3—8.

[5]) *Čudakov* [2]. Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

[6]) *A. Walfisz*, Zur additiven Zahlentheorie. II. Math. Zeitschr. **40** (1936), S. 592—607, Hilfssatz 2.

[7]) *Ju. V. Linnik*, On the density of zeros of Dirichlet's L-series. Izvestija Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **10** (1946), S. 35—46.

Es seien $m \geqq 3$ und $K \geqq 1$ beliebig aber fest vorgegebene ganze Zahlen, $(a_1), \ldots, (a_m)$ beliebige prime Restklassen mod K. *Die natürliche Zahl n heiße zulässig, wenn $n \equiv m \pmod 2$ und $n \equiv \sum_{y=1}^{m} a_y \pmod K$ ist. Dann gilt:*

(3) *Jede genügend große zulässige Zahl n ist als Summe $n = \sum_{y=1}^{m} p_y$ von m ungeraden Primzahlen darstellbar, die beziehentlich vorgeschriebenen Restklassen (a_y)* mod K *angehören; genauer: Für die Anzahl der Darstellungen gilt:*

$$\mathsf{N}_{K;a_1,\ldots,a_m}(n) = \frac{n^{m-1}}{\log^m n} \cdot \frac{1}{(m-1)!\,\varphi^m(K)} \cdot S_{K,m}(n) + o\left(\frac{n^{m-1}}{\log^m n}\right) \tag{4}$$

für zulässiges $n \to \infty$. Dabei hängt die singuläre Reihe $S_{K,m}(n)$ nur von K, m und den arithmetischen Eigenschaften von n ab und ist für zulässige n gleichmäßig positiv und beschränkt.

Die Aussagen (3) und (4) wurden im Anschluß an die Arbeiten von Hardy-Littlewood und Landau von Rademacher unter Verwendung der Hypothese (H) bewiesen[8]). Mit Vinogradovschen Hilfsmitteln erhielt van der Corput die Aussage (3) mit $m = 3$ bereits als Spezialfall eines in anderer Beziehung allgemeineren Satzes, nämlich:

(5) Die Gleichung $n = M_1 p_1 + M_2 p_2 + M_3 p_3$, wobei die M_y ganz und > 0 sind und die p_y Primzahlen, die vorgegebenen Restklassen angehören und gewisse Ungleichungen erfüllen, ist für genügend große passende n stets lösbar.

Neu ist indessen erstens: die Verwendung der klassischen Methode in der Linnik-Čudakovschen Version ohne unbewiesene Annahme, zweitens: die Verallgemeinerung auf den Fall $m > 3$, die nur bei Satz (3), nicht aber bei (4) trivial ist, drittens: die asymptotische Formel (4) an sich.

Um die Hypothese (H) mittels gültiger Resultate über die Nullstellen der L-Funktionen aus dem Rademacherschen Beweis von (3) und (4) eliminieren zu können, muß ich einen etwas anderen Ansatz machen als dieser. Rademacher ging nämlich von der Funktion $\sum_{p \geq 2} X(p)\, w^p$ aus und wurde so auf dem Umweg über die Logarithmen der L-Funktionen direkt auf die gesuchte Anzahlfunktion

$$\mathsf{N}(n) = \sum_{\substack{p_1 + \cdots + p_m = n \\ p_y \equiv a_y (K)}} 1 \tag{6}$$

geführt. (Die in (4) vorkommenden Indizes K und m lasse ich gemäß späterer Vereinbarung weg; die Indizes $a_1, \ldots, a_m$ lasse ich weg, da die resultierende Abschätzung (4) von ihnen nicht abhängen wird.) Ich werde, da ich nicht (wie Rademacher es infolge der Annahme (H) konnte) rechts von den Nullstellen der L-Funktionen bleiben kann, die Logarithmen vermeiden müssen und daher von der Funktion

$$f(w, X) = \sum_{p > 2} X(p) \log p\, w^p$$

ausgehen, die über die logarithmischen Ableitungen der L-Funktionen zu

$$\nu(n) = \sum_{\substack{p_1 + \cdots + p_m = n \\ p_y \equiv a_y (K)}} \prod_{y=1}^{m} \log p_y \tag{7}$$

führt. Die Diskussion von $\nu(n)$ reicht zum Beweis von (3) aus. Überdies wird hieraus durch eine kleine Rechnung auch die asymptotische Darstellung (4) von $\mathsf{N}(n)$ gewonnen werden können.

---

[8]) *H. Rademacher* [3].

[9]) *J. G. v. d. Corput*, Über Summen von Primzahlen und Primzahlquadraten. Math. Annalen **116** (1938), S. 1—50.

In Anbetracht der Fallunterscheidung, die Rademacher [3] bei seiner Formulierung von Formel (4) macht, möchte ich bemerken, daß die Voraussetzungen für zulässiges n trivialerweise zu fordern sind. Da ich im Gegensatz zu Rademacher sogar nur ungerade Primzahlsummanden zulasse, hat $n \not\equiv m \pmod 2$ natürlich $\mathsf{N}(n) = 0$ zur Folge. Ferner folgt aus einer Darstellung $n = \Sigma\, p_y$; $p_y \equiv a_y(K)$ ersichtlich $n \equiv \Sigma\, a_y$, so daß im Falle $n \not\equiv \Sigma\, a_y$ trivialerweise $\mathsf{N}(n) = 0$ sein muß.

Zur Gliederung der vorliegenden Arbeit ist folgendes zu sagen: In § 1 werde ich einige neuere Sätze über die L-Funktionen im kritischen Streifen in für die beabsichtigte Anwendung geeigneter Weise formulieren und sie aus bereits veröffentlichten Resultaten [10]) leicht herleiten.

In den §§ 2 und 3 wird der Beweis eines sog. großen Hilfssatzes erbracht werden, der Landaus großem Hilfssatz ([1], Satz 248) sowie Čudakovs Theorem 3 in [2] einerseits und Rademachers Gleichung (2, 54) in [3] andererseits entspricht. Ich werde hierbei den Čudakovschen Beweis seines Theorem 3 zugrunde legen, der sich ohne Schwierigkeiten auf die durch die Erweiterung bedingte allgemeinere Fassung übertragen läßt. Auf einige Änderungen, die ich zuvor am Čudakovschen Beweis angebracht habe, möchte ich jedoch hinweisen:

Fall 1° bei Čudakov ([2], S. 536) läßt sich vereinfachen, wenn man die Kurve (L) unter Verwendung von § 1, Satz 2 der vorliegenden Arbeit durch eine andere mit besseren Eigenschaften ersetzt. Die Einführung exklusiver Charaktere erübrigt sich dann. Ferner muß statt der zweimaligen falschen Fallunterscheidung

a) $\chi(-1) = 1$ b) $\chi(-1) = -1$

bei Čudakov ([2], S. 539 unten) richtig unterschieden werden:

a) $\chi(-1) = 1$; $\chi \neq \chi_0$ b) $\chi(-1) = -1$ oder $\chi = \chi_0$.

Schließlich wurde in [2] bei Gleichung (58) ein Faktor $k^{-1/2}$ verschluckt und unsauber auf (59) geschlossen, wo ein Faktor $k_1^{-1/2}$ fehlt, der für die Richtigkeit von (60) wesentlich ist.

Den Beweis des großen Hilfssatzes, der als Spezialfall $K = 1$ den Čudakovschen Satz ([2], Th. 3) enthält, habe ich absichtlich ziemlich ausführlich gehalten, da der Čudakovsche Beweis infolge mancher Druckfehler und wegen seiner Kürze recht unübersichtlich ist.

In den §§ 4 und 5 werde ich, auf dem großen Hilfssatz aufbauend, den Beweis von (3) und (4) bringen. Dabei kann ich trotz des unterschiedlichen Ansatzes im wesentlichen den Gedanken von Rademacher [3] folgen. Insbesondere werde ich dieselbe singuläre Reihe erhalten und deren Summation von Rademacher übernehmen.

In der vorliegenden Arbeit gelten folgende Vereinbarungen:

Das Zeichen

$$g(x) \ll G(x) \quad (\text{lies } g(x) \text{ klein gegen } G(x))$$

bedeutet wie bei Čudakov [2]

$$|g(x)| \leqq C \cdot G(x)$$

für jedes x des gemeinsamen Definitionsbereiches. Es ist also

$$g(x) = h(x) + O(G(x)) \text{ gleichbedeutend mit } g(x) - h(x) \ll G(x);$$

C und ebenso $C_1, C_2, \ldots$ seien positive Konstanten.

Eine Abhängigkeit von *beliebig aber fest* eingeführten Größen (z. B. A, A_1, ε, K, m) wird nicht in die Bezeichnung aufgenommen. Die Abschätzungen wie auch die Konstanten C dürfen also von solchen Größen (aber sonst von nichts) abhängen.

[1]) Siehe *E. C. Titchmarsh* [4], *A. Page* [5], *S. Chowla* [6], *E. Landau* [7].

§ 1. Verhalten der L-Funktionen im kritischen Streifen.

Sei $s = \sigma + it$ eine komplexe Variable und $\chi(n)$ ein Charakter mod v, $L(s, \chi)$ die zugehörige Dirichletsche L-Funktion.

Satz 1. *Sei $N_\chi(\sigma, T)$ die Anzahl aller Nullstellen $\varrho = \beta + i\gamma$ von $L(s, \chi)$ mit $\beta \geqq \sigma$; $|\gamma| \leqq T$. Dann ist für jedes $v \geqq 1$ und jeden eigentlichen Charakter χ mod v:*

$$N_\chi(\sigma, T) \ll v^{2\nu} T^{\frac{1-2\nu}{1-\nu}} \log^{7,5} T + v^2 \log(v+1); \quad \nu = \sigma - \tfrac{1}{2}$$

bei beliebigem $\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 1$; $T \geqq 1$.

Beweis bei Čudakov [2], Theorem 2.

Satz 2. *Ist $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest gegeben, so gibt es eine Konstante C_1 derart, daß bei beliebigem $v \geqq 1$ und χ mod v gilt:*

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha) & L(s, \chi) \neq 0 \\ \beta) & \dfrac{L'}{L}(s, \chi) + \dfrac{E(\chi)}{s-1} \ll v^\varepsilon (|t|+1)^\varepsilon \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \text{für } 1 - \omega(t) \leqq \sigma \leqq 2; \quad t \gtreqless 0; \\ \omega(t) = C_1 v^{-\varepsilon}(|t|+1)^{-\varepsilon}, \end{array}\right.$$

wobei $E(\chi) = 0$ oder 1 ist, je nachdem $\chi \neq \chi^{(0)}$ = Hauptcharakter (mod v) *oder nicht.*

Beweis. α) für $L(s, \chi) \neq 0$: Wegen $L(\bar{s}, \chi) = \overline{L(s, \bar{\chi})}$ genügt es, $t \geqq 0$ zu betrachten. Ferner genügt es, eigentliche Charaktere zu betrachten; denn falls χ uneigentlich, existiert χ_1 mod $K_1 \mid K$, so daß $L(s, \chi) = \prod_{p \mid K} \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}\right) \cdot L(s, \chi_1)$, und das Produkt hat nur rein imaginäre Nullstellen.

Aus Einzelresultaten von Titchmarsh ([4], Theorem 8) und Page ([5], Lemmata 1, 5 und 6) folgt leicht:

$$L(s, \chi) \neq 0 \quad \text{für} \quad \sigma \geqq 1 - \frac{C_2}{\log(v(|t|+3))}; \quad \begin{cases} t > 0, \text{ falls } \chi \text{ zweiter Art (also reell)} \\ t \geqq 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Daher ist α) wegen $\log(v(|t|+1)) \leqq C_3 v^\varepsilon (|t|+1)^\varepsilon$ nur noch für $t = 0$ bei reellem eigentlichem Charakter mod $v > 1$ zu beweisen.

Nun ist nach einem Satz von Siegel (siehe Chowla [6]) mit $\frac{\varepsilon}{2}$ statt ε:

$$L(1, \chi) > C_4 v^{-\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Da ferner bekanntlich (siehe Page [5], Lemma 4):

$$L'(s, \chi) \leqq C_5 \log^2 v \quad \text{für} \quad \sigma \geqq 1 - \frac{1}{2\log v}; \quad |t| \leqq 10,$$

so folgt mit $C_6 = \min\left(\frac{1}{4}, \frac{C_4}{2C_5}\right)$:

$$L(1, \chi) - L(\sigma, \chi) = \left| \int_\sigma^1 L'(s, \chi)\, ds \right| \leqq |1 - \sigma|\, C_5 \log^2 v$$

$$\leqq \frac{1}{2} C_4 v^{-\frac{\varepsilon}{2}} \quad \text{für} \quad \sigma \geqq 1 - \frac{C_6}{v^{\frac{\varepsilon}{2}} \log^2 v};$$

$$|L(\sigma, \chi)| \geqq |L(1, \chi)| - |L(1, \chi) - L(\sigma, \chi)| \geqq \tfrac{1}{2} C_4 v^{-\frac{\varepsilon}{2}} > 0,$$

womit α) wegen $v^{\frac{\varepsilon}{2}} \log^2 v \leqq C_7 v^\varepsilon$ auch im letzten Falle erwiesen ist.

β) für $\frac{L'}{L}(s, \mathsf{X}) + \frac{E(\mathsf{X})}{s-1} \ll v^{\varepsilon}(|t|+1)^{\varepsilon}$: Es genügt wegen

$$\left|\frac{L'}{L}(s, \mathsf{X})\right| = \left|\overline{\frac{L'}{L}(s, \mathsf{X})}\right| = \left|\frac{L'}{L}(\bar{s}, \bar{\mathsf{X}})\right|$$

$t \geqq 0$ zu betrachten. Nach Page [5], Lemma 2 gilt:

$$\frac{L'}{L}(s, \mathsf{X}) \ll \log(vt) \text{ für } 1 - \frac{C_8}{\log(vt)} \leqq \sigma \leqq 2;\ t \geqq 4.$$

Wegen $\log(vt) \leqq C_9 v^{\varepsilon}(|t|+1)^{\varepsilon}$ und $\left|\frac{E(\mathsf{X})}{s-1}\right| \leqq \frac{1}{|t|} \leqq \frac{1}{4} \ll v^{\varepsilon}(|t|+1)^{\varepsilon}$ für $t \geqq 4$ folgt daraus **β)** für $t \geqq 4$.

Ferner ist nach Page [5], Lemma 10:

$$\frac{L'}{L}(s, \mathsf{X}) \ll \log v + \frac{1}{\delta} \text{ für } 1 - \frac{\delta}{4} \leqq \sigma \leqq 2 \neq |t| \leqq 4,$$

(falls $\mathsf{X} \neq \mathsf{X}^{(0)}$ und $L(s, \mathsf{X}) \neq 0$ für $\sigma \geqq 1 - \delta$; $|t| \leqq 5$. Wählt man $\delta = \frac{4C_{10}}{v^{\varepsilon}(5+1)^{\varepsilon}}$, wo $C_{10} = \min\left(\frac{C_2}{C_3}, \frac{C_6}{C_7}\right)$ Teil **α)** erfüllt, so folgt hieraus leicht die Richtigkeit von **β)** für $|t| \leqq 4$; $\mathsf{X} \neq \mathsf{X}^{(0)}$. Schließlich ergibt sich aus

$$\frac{L'}{L}(s, \mathsf{X}^{(0)}) + \frac{1}{s-1} \ll \log v \text{ für } \frac{3}{4} \leqq \sigma \leqq 2;\ |t| \leqq 6$$

(siehe Page [5], Lemma 12) reichlich die Richtigkeit von **β)** auch in diesem Falle.

Abschließend setze man

$$C_1 = \min\left(C_{10}, \frac{C_8}{C_9}, \frac{C_{10}}{6^{\varepsilon}}, \frac{1}{4}\right).$$

Satz 3. *Ist $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest gegeben, so gilt für jede Nullstelle $\varrho = \beta + i\gamma$ von $L(s, \mathsf{X})$ im kritischen Streifen $0 < \sigma < 1$:*

$$\frac{1}{|\varrho|} \ll v^{\varepsilon}.$$

Beweis. Bekanntlich liegen im kritischen Streifen die Nullstellen von $L(s, \mathsf{X})$ zu denen von $L(s, \bar{\mathsf{X}})$ symmetrisch bzgl. $\sigma = \frac{1}{2}$. Daher folgt aus Satz 2:

$$L(s, \mathsf{X}) \neq 0 \text{ für } 0 < \sigma \leqq \frac{C_1}{v^{\varepsilon}(|t|+1)^{\varepsilon}}.$$

Da der Halbkreis $|s| \leqq \frac{C_1}{2v^{\varepsilon}}$; $\sigma > 0$ im angegebenen Gebiet liegt, muß also für jede Nullstelle ϱ mit $0 < \beta < 1$ gelten:

$$|\varrho| \geqq \frac{C_1}{2v^{\varepsilon}};\ \frac{1}{|\varrho|} \leqq \frac{2}{C_1} v^{\varepsilon} \ll v^{\varepsilon}.$$

Satz 4. *Ist $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest gegeben und ist X eigentlicher Charakter* mod v, *so gilt*

$$\lim_{s=0}\left(\frac{L'}{L}(s, \mathsf{X}) - \frac{1}{s}\right) \ll v^{\varepsilon}, \quad \textit{falls } \mathsf{X}(-1) = 1;\ \mathsf{X} \neq \mathsf{X}^{(0)},$$

$$\frac{L'}{L}(0, \mathsf{X}) \ll v^{\varepsilon}, \quad \textit{falls } \mathsf{X}(-1) = -1 \textit{ oder } \mathsf{X} = \mathsf{X}^{(0)}.$$

Beweis. Nach der Funktionalgleichung der L-Funktionen (s. Landau [7], § 130) ist für eigentliche Charaktere:

$$L(s, \mathsf{X}) = \left(\frac{1}{s(s-1)}\right)^{b} \left(\frac{\pi}{v}\right)^{\frac{s+a}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} \xi(s, \mathsf{X}).$$

Addiert man die logarithmischen Ableitungen dieser Gleichung und der durch $1-s, \bar{\mathsf{X}}$ statt s, X daraus hervorgehenden, so kommt unter Beachtung von

$$\xi(s, \mathsf{X}) = \eta(\mathsf{X})\, \xi(1-s, \bar{\mathsf{X}}); \quad \text{also } \frac{\xi'}{\xi}(s, \mathsf{X}) = -\frac{\xi'}{\xi}(1-s, \mathsf{X});$$

$$\frac{L'}{L}(s, \mathsf{X}) + \frac{L'}{L}(1-s, \mathsf{X}) = \log\left(\frac{\pi}{v}\right) - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s+a}{2}\right) - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1-s+a}{2}\right).$$

Im Fall $\mathsf{X}(-1) = -1$ ist $a = 1$ und es kommt

$$\frac{L'}{L}(0, \mathsf{X}) = \log\left(\frac{\pi}{v}\right) - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1) - \frac{L'}{L}(1, \mathsf{X}) \ll v^{\varepsilon} + 1 + 1 + v^{\varepsilon} \ll v^{\varepsilon}$$

wegen $\log\left(\frac{\pi}{v}\right) \ll v^{\varepsilon}$, nach Satz 2 und nach bekannten Eigenschaften der Γ-Funktion.

Im Fall $\mathsf{X}(-1) = 1$ ist $a = 0$ und es kommt, falls $\mathsf{X} \neq \mathsf{X}^{(0)}$,

$$\lim_{s=0}\left(\frac{L'}{L}(s, \mathsf{X}) - \frac{1}{s}\right) = \log\left(\frac{\pi}{v}\right) - \lim_{s=0}\left(\frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}\right) + \frac{1}{s}\right) - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{L'}{L}(1, \mathsf{X})$$
$$\ll v^{\varepsilon} + 1 + 1 + v^{\varepsilon} \ll v^{\varepsilon}.$$

Im Falle $\mathsf{X} = \mathsf{X}^{(0)} (= \mathsf{X})$ endlich kommt

$$L(0, \mathsf{X}^{(0)}) = \log\left(\frac{\pi}{v}\right) - \lim_{s=0}\left(\frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}\right) + \frac{1}{s}\right) - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\right) - \lim_{s=0}\left(\frac{L'}{L}(1-s, \mathsf{X}^{(0)}) - \frac{1}{s}\right)$$
$$\ll v^{\varepsilon} + 1 + 1 + v^{\varepsilon} \ll v^{\varepsilon},$$

da nach Satz 2

$$\lim_{s=0}\left(\frac{L'}{L}(1-s, \mathsf{X}^{(0)}) - \frac{1}{s}\right) = \lim_{s=1}\left(\frac{L'}{L}(s, \mathsf{X}^{(0)}) + \frac{1}{s-1}\right) \ll v^{\varepsilon}.$$

§ 2. Die Funktion $g(z, \mathsf{X})$.

2. 1. Bezeichnungen. Im folgenden sei ständig

(a) $A > 1$ beliebig aber fest gegeben; $A_1 = 4A + 38$;
r beliebig mit $\frac{1}{2} \leqq r < 1$; $\eta = \log\frac{1}{r}$; $M = \frac{1}{\eta}$;
$\tau = \max(1, \log^{A_1} M)$; $H = \tau^{24}$;
k beliebige ganze Zahl mit $1 \leqq k \leqq \tau$;
$K \geqq 1$ beliebig aber fest gegebene ganze Zahl;
v beliebige ganze Zahl mit $v \leqq Kk$.

(b) ϑ reelle Variable mit $|\vartheta| \leqq \frac{2\pi}{k\tau}$;
z komplexe Variable mit $|z| = r$; $\operatorname{arc} z = \vartheta$ $(z = re^{i\vartheta})$;
$\xi = \eta - i\vartheta$ $(z = e^{-\xi})$;
$\varphi = \operatorname{arc} \xi$ $(\xi = |\xi|\, e^{i\varphi})$;

(c) $g(z, \mathsf{X}) = \sum_{\mu=2}^{\infty} \mathsf{X}(\mu)\, \Lambda(\mu)\, z^{\mu}$;
X irgendein Charakter mod v; $\Lambda(\mu) = \begin{cases} \log p & \text{für } \mu = p^{\lambda};\ \lambda \geqq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

2. 2. Ein Satz über die Funktion $g(z, \mathsf{X})$.

Satz 5. *Unter den Voraussetzungen* (a), (b), (c) *und wenn überdies* X *eigentlicher Charakter* mod v *ist, gilt*

$$g(z, \mathsf{X}) - \frac{E(\mathsf{X})}{1-z} \ll k^{-\frac{1}{2}} M \log^{-A} M.$$

Beweis. Für $\frac{1}{2} \leqq r \leqq r_0 = e^{-(e^{-4})}$ stimmt der Satz trivialerweise (linke Seite $\ll 1 \ll$ rechte Seite). Aus der im folgenden gültigen Voraussetzung $r_0 < r < 1$ ergibt sich nunmehr leicht:

(d) Es ist

$$M > e^4; \quad \tau = \log^{A_1} M > 4^{42}; \quad H = \log^{24A_1} M; \quad |\vartheta| < \frac{1}{2}; \quad 0 < |\xi| < 1; \quad \psi > \frac{1}{2M} > 0.$$

Die ersten fünf Aussagen folgen sofort aus der Definition, und $\psi > \frac{1}{2M}$ erhält man etwa aus der wegen $\eta > 0$ eindeutigen Darstellung

$$\varphi = \operatorname{arc} \xi = \operatorname{arc\,tg} \frac{-\vartheta}{\eta} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\psi = \frac{\pi}{2} - |\varphi| = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{|\vartheta|}{\eta} = \operatorname{arc\,tg} \frac{\eta}{|\vartheta|} > \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{M}$$

und der Reihenentwicklung des arc tg.

(e) Es ist

$$g(z, \chi) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(2)} \xi^{-s} \Gamma(s) \frac{L'}{L}(s, \chi)\, ds;$$

$$\xi^{-s} = e^{-s(\log|\xi| + i\varphi)}; \quad (2) \text{ der Weg } \sigma = 2; \quad -\infty \leqq t \leqq +\infty.$$

Denn für reelles μ ist

$$|\mathfrak{Im} \log(\mu\xi)| = |\operatorname{arc}(\mu\xi)| = |\operatorname{arc} \xi| = |\varphi| < \frac{\pi}{2};$$

also nach der Mellinschen Formel (siehe Landau [1], Satz 231):

$$z^\mu = e^{-\mu\xi} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(2)} (\mu\xi)^{-s} \Gamma(s)\, ds;$$

$$g(z, \chi) = \sum_{\mu=2}^{\infty} \chi(\mu) \Lambda(\mu) \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(2)} (\mu\xi)^{-s} \Gamma(s)\, ds = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(2)} \xi^{-s} \Gamma(s) \left(\sum_{\mu=2}^{\infty} \chi(\mu) \Lambda(\mu) \mu^{-s}\right) ds.$$

Vertauschung von Summation und Integration war erlaubt nach [1], Satz 232, da $\Sigma \chi(\mu) \Lambda(\mu) \mu^{-s}$ für $\sigma \geqq 2$ gleichmäßig konvergiert $\left(\text{und gleich } -\frac{L'}{L}(s, \chi) \text{ ist}\right)$ und da $\int\limits_{(2)} \xi^{-s} \Gamma(s)\, ds$ wegen $\psi > 0$ und nach dem folgenden Punkt (f) gewiß existiert.

(f) Im Gebiet $\{-1 \leqq \sigma \leqq 2;\ t \gtreqless 0;\ |s| \geqq \frac{1}{4}\}$ gilt

$$\Gamma(s)\, \xi^{-s} \ll |\xi|^{-\sigma} e^{-\psi t} (|t| + 1)^{\sigma - \frac{1}{2}}.$$

Denn einerseits ist

$$|\xi^{-s}| = |\xi|^{-\sigma} e^{\psi t} \leqq |\xi|^{-\sigma} e^{\psi \cdot t},$$

und andererseits folgt

$$\Gamma(s) \ll e^{-\frac{\pi}{2} t} (|t| + 1)^{\sigma - \frac{1}{2}}$$

leicht aus [1], Satz 229, und der Beschränktheit von $\Gamma(s)$ in

$$\{-1 \leqq \sigma \leqq 2;\ |t| \leqq 1;\ |s| \geqq \tfrac{1}{4}\}.$$

Nach diesen Vorbereitungen werden zur Weiterführung des Beweises folgende beiden Fälle unterschieden:

1) $|\vartheta| \leqq \eta H$; 2) $|\vartheta| > \eta H$.

2. 2. 1. Der Fall $|\vartheta| \leqq \eta H$. Wie in (d) $\left(\text{jedoch mit } \frac{\eta}{|\vartheta|} \geqq \frac{1}{H} \text{ statt } \geqq \frac{1}{M}\right)$ erkennt man:

(g) Aus $|\vartheta| \leqq \eta H$ folgt $\psi > \frac{1}{2H}$.

Ferner gilt:

(h) Sei $\mathfrak{C}$ der Weg $\{\sigma = 1 - \omega(t);\ t \gtreqless 0\}$; $\omega(t) = C_1 v^{-\varepsilon}(|t|+1)^{-\varepsilon}$; $C_1 \leqq \frac{1}{4}$ nach Satz 1 bestimmt. Dann ist

$$g(z, \mathsf{X}) = E(\mathsf{X})\,\xi^{-1} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{C}} \xi^{-s}\Gamma(s)\,\frac{L'}{L}(s, \mathsf{X})\,ds.$$

Ist nämlich $\mathfrak{w}_{t_0}$ der Weg aus den drei Strecken mit den Ecken

$$(\sigma_0, -t_0) \to (2, -t_0) \to (2, +t_0) \to (\sigma_0, t_0)$$

und der Kurve $\mathfrak{C}$ von $(\sigma_0, t_0) \to (\sigma_0, -t_0)$; $(\sigma_0 = 1 - \omega(t_0))$, so ist einerseits (unabhängig von t_0)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\mathfrak{w}_{t_0}} \xi^{-s}\Gamma(s)\,\frac{L'}{L}(s, \mathsf{X})\,ds = \Sigma\,\mathfrak{Re}\mathfrak{f} = \xi^{-1}\Gamma(1)\,\mathfrak{Re}\mathfrak{f}_{s=1}\,\frac{L'}{L}(s, \mathsf{X})$$
$$= \xi^{-1}\Gamma(1)\cdot(-E(\mathsf{X})) = -E(\mathsf{X})\cdot\xi^{-1}$$

wegen Satz 2; andererseits ist

$$\lim_{t_0\to\infty}\oint\limits_{\mathfrak{w}_{t_0}} \xi^{-s}\Gamma(s)\,\frac{L'}{L}(s, \mathsf{X})\,ds = \int\limits_{(2)} - \int\limits_{\mathfrak{C}},$$

da die Horizontalstrecken endliche Länge $\leqq 2 + \frac{1}{4}$ haben und da der Integrand mit $t_0 \to \infty$ wegen $\psi > 0$ gegen 0 geht. Letzteres ist mittels Satz 2 und (f) leicht einzusehen.

Im Verein mit (e) folgt aus obigen Gleichungen die Behauptung (h).

(i) Es ist

$$g(z, \mathsf{X}) - \frac{E(\mathsf{X})}{1-z} = \frac{-1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{C}} \xi^{-s}\Gamma(s)\,\frac{L'}{L}(s, \mathsf{X})\,ds + O(1).$$

Denn $\frac{1}{1-e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi}$ ist für $|\xi| \leqq 1$ regulär, also $\ll 1$, und es ist daher

$$\text{(i. 1)} \qquad \frac{-E(\mathsf{X})}{1-z} = \frac{-E(\mathsf{X})}{1-e^{-\xi}} = \frac{-E(\mathsf{X})}{\xi} + O(1),$$

was durch Addition zur Gleichung in (h) die Behauptung (i) liefert.

Es bleibt jetzt noch zu zeigen:

(j) Es ist

$$\frac{-1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{C}} \xi^{-s}\Gamma(s)\,\frac{L'}{L}(s, \mathsf{X})\,ds \ll k^{-\frac{1}{2}} M \log^{-A} M.$$

Da nämlich auf $\mathfrak{C}$

$$|1-s| \geqq 1-\sigma = C_1 v^{-\varepsilon}(|t|+1)^{\varepsilon};\ \frac{E(\mathsf{X})}{1-s} \ll v^{\varepsilon}(|t|+1)^{\varepsilon},$$

so folgt aus Satz 2 wegen $v \leqq Kk \ll k$

$$\frac{L'}{L}(s, \mathsf{X}) \ll k^{\varepsilon}(|t|+1)^{\varepsilon}.$$

Damit und nach (f) und (g) kommt:

$$\xi^{-s}\Gamma(s)\,\frac{L'}{L}(s, \mathsf{X}) \ll |\xi|^{-\sigma} e^{-\frac{|t|}{2H}}(|t|+1)^{\sigma-\frac{1}{2}+\varepsilon} k^{\varepsilon} \text{ auf } \mathfrak{C}.$$

Wählt man nun

$$\varepsilon \leqq \frac{1}{2(1+2\cdot 24)\,A_1}\left(< \frac{1}{A_1} < \frac{1}{2}\right)$$

und beachtet

$$|\xi| > \eta;\ k^\varepsilon \leqq \tau^\varepsilon < \tau^{\frac{1}{A_1}} = \log M;\ \frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 1,$$

so erhält man

$$\xi^{-s}\Gamma(s)\,\frac{L'}{L}\,(s, \chi) \ll \eta^{-1+\omega(t)} e^{-\frac{t}{2H}} (|t|+1)^1 \log M;$$

also $\left(\text{beachte } \eta^{-1} = M \text{ und } \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(|t|)\,dt = 2\int\limits_0^\infty \ll \int\limits_0^\infty f(t)\,dt\right)$

$$\text{(j. 1)} \qquad \frac{-1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{C}} \xi^{-s}\Gamma(s)\,\frac{L'}{L}\,(s, \chi)\,ds \ll M \log M \int\limits_0^\infty \eta^{\omega(t)} e^{-\frac{t}{2H}} (t+1)\,dt.$$

Hierin ist einmal

$$\int\limits_0^{H^2} \eta^{\omega(t)} e^{-\frac{t}{2H}} (t+1)\,dt \leqq H^2 \cdot \eta^{\omega(H^2)} \cdot 1 \cdot (H^2+1).$$

Wegen

$$H^2(H^2+1) \ll H^4 = e^{4\cdot 24\cdot \log\log M};$$

$$\omega(H^2) = \frac{C_1}{v^\varepsilon (H^2+1)^\varepsilon} \geqq \frac{C_1}{(\tau K)^\varepsilon (2H^2)^\varepsilon} \geqq \frac{C_1}{(2K)^{\frac{1}{2}}} \cdot \log^{-\varepsilon(1+2\cdot 24)A_1} M \geqq \frac{C_{11}}{\log^{\frac{1}{2}} M};$$

$$\eta^{\omega(H^2)} \leqq \eta^{C_{11}\log^{-\frac{1}{2}} M} = e^{\log\eta\cdot C_{11}\cdot \log^{-\frac{1}{2}} M} = e^{-C_{11}\log^{\frac{1}{2}} M}$$

$\left(\text{beachte } \eta = \frac{1}{M} < 1\right)$ folgt daher

$$\int\limits_0^{H^2} \eta^{\omega(t)} e^{-\frac{t}{2H}} (t+1)\,dt \ll e^{4\cdot 24\cdot A_1 \log\log M - C_{11}\log^{\frac{1}{2}} M} \leqq e^{C_{12} - \left(\frac{A_1}{2} + A + 1\right)\log\log M}$$

$$\ll e^{-\left(\frac{A_1}{2} + A + 1\right)\log\log M} = \tau^{-\frac{1}{2}} \log^{-A-1} M$$

$$\text{(j. 2)} \qquad \leqq k^{-\frac{1}{2}} \log^{-A-1} M;$$

denn es gibt gewiß ein C_{12} mit

$$\left(4\cdot 24\cdot A_1 + \frac{A_1}{2} + A + 1\right)\log\log M - C_{11}\log^{\frac{1}{2}} M \leqq C_{12}.$$

Andererseits ist

$$\int\limits_{H^2}^\infty \eta^{\omega(t)} e^{-\frac{t}{2H}} (t+1)\,dt \leqq \int\limits_{H^2}^\infty e^{-\frac{t}{2H}} (t+1)\,dt = \int\limits_{\frac{H}{2}}^\infty e^{-u}(2Hu+1)\,2H du$$

$$\ll H^2 \int\limits_{\frac{H}{2}}^\infty e^{-u} u\,du = H^2\left(e^{-\frac{H}{2}}\cdot\frac{H}{2} + e^{-\frac{H}{2}}\right) \ll H^3 e^{-\frac{H}{2}}$$

$$= e^{3\cdot 24\cdot A_1 \log\log M - \frac{1}{2}\log^{24A_1} M} \leqq e^{C_{12} - \left(\frac{A_1}{2} + A + 1\right)\log\log M}$$

$$\text{(j. 3)} \qquad \ll k^{-\frac{1}{2}} \log^{-A-1} M$$

nach einer analogen Überlegung wie hinter (j. 2).

Mit (j. 1), (j. 2) und. (j 3) ist der Beweis von (j) vollendet.

Aus (i) und (j) und wegen $1 \ll k^{-\frac{1}{2}} M \log^{-A} M$ folgt schließlich:

(k) Der Satz 5 ist wahr für $|\vartheta| \leqq \eta H$.

2. 2. 2. Der Fall $|\vartheta| > \eta H$. Es sei also jetzt $|\vartheta| > \eta H$. Ferner wird verwendet, daß χ als eigentlich vorausgesetzt wurde.

(l) Es ist

$$g(z, \chi) = \frac{-1}{2\pi i} \int\limits_{(-\frac{1}{2})} \xi^{-s} \Gamma(s) \frac{L'}{L}(s, \chi)\, ds + E(\chi)\, \xi^{-1} - \sum_{\varrho} \xi^{\varrho} \Gamma(\varrho) - \operatorname*{Res}_{s=0} \xi^{-s} \Gamma(s) \frac{L'}{L}(s, \chi),$$

wo ϱ alle Nullstellen $\varrho = \beta + i\gamma$ von $L(s, \chi)$ mit $0 < \beta < 1$ durchläuft (mehrfache mehrfach gezählt).

Zum Beweise wähle man (siehe etwa Landau [7], § 135; auf die Abhängigkeit von v kommt es hier nicht an) Zahlen T_m mit

$$m \leqq T_m \leqq m + 1;\ m = \pm 2, \pm 3, \ldots$$
$$L(s, \chi) \neq 0 \text{ und } \frac{L'}{L}(s, \chi) \ll \log^2 (v\, |T_m|) \text{ für } t = T_m.$$

Dies zeigt in Verbindung mit (f) und wegen $\psi > 0$ leicht, daß in

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}+iT_{-m}}^{2+iT_{-m}} \text{ und } \int\limits_{-\frac{1}{2}+iT_m}^{2+iT_m} \xi^{-s} \Gamma(s) \frac{L'}{L}(s, \chi)\, ds$$

die Integranden (also auch die Integrale endlicher Weglänge $\frac{5}{2}$) für $m \to \infty$ verschwinden. Der Residuensatz, angewandt auf das Rechteck mit den Ecken $(-\frac{1}{2}, T_{-m})$, $(2, T_{-m})$, $(2, T_{+m})$, $(-\frac{1}{2}, T_{+m})$ liefert daher in der Grenze $m \to \infty$

$$\text{(l. 1)} \qquad \frac{1}{2\pi i} \left(\int\limits_{(2)} - \int\limits_{(-\frac{1}{2})} \right) = \sum_{-\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 2} \operatorname{Res} \xi^{-s} \Gamma(s) \frac{L'}{L}(s, \chi).$$

Der Pol bei $s = 1$ von $L(s, \chi)$ für $\chi = \chi^{(0)}$ liefert in der Residuensumme den Beitrag $-E(\chi)\, \xi^{-1}$. Die Nullstellen von $L(s, \chi)$ liefern, da $L(s, \chi)$ wegen χ eigentlich höchstens für $s = 0$ eine nicht-triviale Nullstelle mit $\frac{-1}{2} \leqq \sigma \leqq 2$ hat, den Beitrag $\sum_{\varrho} \xi^{-\varrho} \Gamma(\varrho)$. Das Residuum für $s = 0$ wird gesondert berücksichtigt.

Insgesamt liefert (l. 1) in Verbindung mit (e) die Behauptung (l).

(m) Es ist

$$\frac{-1}{2\pi i} \int\limits_{(-\frac{1}{2})} \xi^{-s} \Gamma(s) \frac{L'}{L}(s, \chi)\, ds \ll k^{-\frac{1}{2}} M \log^{-A} M.$$

Denn bekanntlich ist für $\sigma = -\frac{1}{2}$

$$\frac{L'}{L}(s, \chi) \ll \log (v(|t| + 3)),$$

und da wegen $v \leqq Kk \leqq K\tau$

$$\log (v(|t| + 3)) \leqq \log K + \log \tau + \log (|t| + 3) \ll 1 + \tau^{\frac{1}{A_1}} + (|t| + 1)^{\frac{1}{2}}$$
$$\ll \log M + (|t| + 1)^{\frac{1}{2}} \ll (\log M)\, (|t| + 1)^{\frac{1}{2}}$$

ist, so kommt im Verein mit (f) und (d):

$$\frac{-1}{2\pi i}\int\limits_{(-\frac{1}{2})} \xi^{-s}\Gamma(s)\,\frac{L'}{L}(s,\,\mathsf{X})\,ds$$

$$\ll \int\limits_{(-\frac{1}{2})} |\xi|^{-\sigma} e^{-\frac{|t|}{2M}} (|t|+1)^{\sigma-\frac{1}{2}} (\log M)\,(|t|+1)^{\frac{1}{2}}\,|ds|$$

$$= 2\int\limits_0^\infty |\xi|^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{t}{2M}} (t+1)^{-\frac{1}{2}} \log M dt \ll \log M \int\limits_0^\infty 1\cdot e^{-\frac{t}{2M}} (t+1)^{-\frac{1}{2}}\,dt$$

$$= \log M \int\limits_{\frac{1}{2M}}^\infty e^{-u+\frac{1}{2M}} (2Mu)^{-\frac{1}{2}}\, 2M du \ll M^{\frac{1}{2}} \log M \ll k^{-\frac{1}{2}} M \log^{-A} M,$$

da $\int\limits_0^\infty e^{-u+\frac{1}{2M}} u^{\frac{-1}{2}}\,du \leqq \int\limits_0^\infty e^{-u+1} u^{-\frac{1}{2}}\,du \ll 1$ existiert.

(n) Es ist

$$\operatorname*{\mathfrak{Rej}}_{s=0} \xi^{-s}\Gamma(s)\,\frac{L'}{L}(s,\mathsf{X}) \ll k^{-\frac{1}{2}} M \log^{-A} M.$$

Sei nämlich zuerst $\mathsf{X}(-1)=1$; $\mathsf{X}\neq\mathsf{X}^{(0)}$. Dann haben $\frac{L'}{L}(s,\,\mathsf{X})$ und $\Gamma(s)$ je einen einfachen Pol bei $s=0$ mit dem Residuum $+1$, und ξ^{-s} ist dort regulär. Potenzreihenansatz für die drei Funktionen um $s=0$ liefert

$$\operatorname*{\mathfrak{Rej}}_{s=0} \xi^{-s}\Gamma(s)\,\frac{L'}{L}(s,\,\mathsf{X}) = c_1 + b_0 + a_0,$$

worin c_1 der s^1-Koeffizient von ξ^{-s} ist, also $c_1 = -\log\xi \ll |\log\xi|$;

b_0 der s^0-Koeffizient von $\Gamma(s)$, also $b_0 \ll 1$;

a_0 der s^0-Koeffizient von $\frac{L'}{L}(s,\mathsf{X})$, also $a_0 = \lim\limits_{s=0}\left(\frac{L'}{L}(s,\mathsf{X}) - \frac{1}{s}\right) \ll v^\varepsilon \ll k^\varepsilon$

ist (letzteres nach Satz 4).

Ist $\mathsf{X}(-1) = -1$ oder $\mathsf{X}=\mathsf{X}^{(0)}$, so sind $\frac{L'}{L}(s,\,\mathsf{X})$ und ξ^{-s} für $s=0$ regulär und es kommt nach Satz 4:

$$\operatorname*{\mathfrak{Rej}}_{s=0} \xi^{-s}\Gamma(s)\,\frac{L'}{L}(s,\,\mathsf{X}) = \xi^0 \frac{L'}{L}(s,\,\mathsf{X})\cdot 1 \ll v^\varepsilon \ll k^\varepsilon.$$

In allen Fällen ist also

$$-\operatorname*{\mathfrak{Rej}}_{s=0} \xi^{-s}\Gamma(s)\,\frac{L'}{L}(s,\,\mathsf{X}) \ll |\log\xi| + k^\varepsilon,$$

und hierin ist wegen $\varepsilon < \frac{1}{A_1}$

$$k^\varepsilon \leqq \tau^\varepsilon < \tau^{\frac{1}{A_1}} = \log M \ll k^{-\frac{1}{2}} M \log^{-A} M$$

und wegen $\frac{M}{H} = \frac{1}{\eta H} > \frac{1}{|\vartheta|} > \frac{1}{|\xi|} > 1$ im betrachteten Falle

$$|\log\xi| \leqq \log\frac{1}{|\xi|} + |\operatorname{arc}\xi| < \log\frac{M}{H} + \frac{\pi}{2} \ll \log M \ll k^{-\frac{1}{2}} M \log^{-A} M.$$

(o) Es ist

$$g(z,\,\mathsf{X}) - \frac{E(\mathsf{X})}{1-z} = -\sum_\varrho \xi^{-\varrho}\Gamma(\varrho) + O(k^{-\frac{1}{2}} M \log^{-A} M).$$

Denn nach (l), (m) und (n) ist

$$g(z, \mathsf{X}) = E(\mathsf{X})\, \xi^{-1} - \sum_{\varrho} \xi^{-\varrho} \Gamma(\varrho) + O(k^{-\frac{1}{2}} M \log^{-A} M),$$

und durch Addition von (i. 1) ergibt sich daraus (o) wegen $1 \ll k^{-\frac{1}{2}} M \log^{-A} M$.

2. 2. 2. 1. Abschätzung von $\sum_{\varrho} \xi^{-\varrho} \Gamma(\varrho)$.

(p) Man zerlege mit $T \geqq 2$:

$$\sum_{\varrho} \xi^{-\varrho} \Gamma(\varrho) = \left\{ \sum_{|\gamma| > T} + \sum_{|\gamma| \leqq T} \right\} \xi^{-\varrho} \Gamma(\varrho).$$

(q) Bei geeigneter Wahl von T ist

$$\sum_{|\gamma| > T} \xi^{-\varrho} \Gamma(\varrho) \ll k^{-\frac{1}{2}} M \log^{-A} M.$$

Dies ergibt sich wie folgt:

Nach (f) und wegen $0 < \beta < 1$; $|\xi| < 1$; $|\gamma| > T \geqq 2$ gilt

$$\begin{aligned} \sum_{|\gamma| > T} \xi^{-\varrho} \Gamma(\varrho) &\ll \sum_{|\gamma| > T} |\xi|^{-\beta} e^{-\psi|\gamma|} (|\gamma| + 1)^{\beta - \frac{1}{2}} \\ &\ll \sum_{|\gamma| > T} |\xi|^{-1} e^{-\psi|\gamma|} |\gamma|^{\frac{1}{2}} \ll |\xi|^{-1} \sum_{n=[T]}^{\infty} e^{-\psi n} n^{\frac{1}{2}} \sum_{n < |\gamma| \leqq n+1} 1 \\ &\ll |\xi|^{-1} \log M \sum_{n=[T]}^{\infty} e^{-\psi n} n^{\frac{3}{4}}; \end{aligned}$$

denn nach der klassischen Nullstellenformel ist

$$\sum_{n < |\gamma| \leqq n+1} 1 \ll \log(vn) \leqq \log K + \log \tau + \log n \ll 1 + \tau^{\frac{1}{A_1}} + n^{\frac{1}{4}} \ll (\log M)\, n^{\frac{1}{4}}$$

(beachte $v \leqq Kk \leqq K\tau$). Ferner gilt

$$(\psi n)^{\frac{3}{4}} < 1 + \psi n < 2\left(1 + \frac{\psi n}{2}\right) < 2 e^{\frac{\psi n}{2}}; \quad e^{-\frac{\psi n}{2}} n^{\frac{3}{4}} \ll \psi^{-\frac{3}{4}}.$$

Man erhält daher

$$\begin{aligned} \sum_{|\gamma| > T} \xi^{-\varrho} \Gamma(\varrho) &\ll |\xi|^{-1} (\log M)\, \psi^{\frac{3}{4}} \sum_{n=[T]}^{\infty} e^{-\frac{\psi n}{2}} = (\log M)\, |\xi|^{-1} \psi^{-\frac{3}{4}} \frac{e^{-\frac{\psi [T]}{2}}}{1 - e^{-\frac{\psi}{2}}} \\ &\ll (\log M)\, |\xi|^{-1} \psi^{-\frac{7}{4}} e^{-\frac{\psi T}{2}}; \end{aligned}$$

denn aus $0 < \psi \leqq \frac{\pi}{2}$ folgt

$$\frac{1}{1 - e^{-\frac{\psi}{2}}} - \frac{1}{\frac{\psi}{2}} \ll 1; \qquad \frac{1}{1 - e^{-\frac{\psi}{2}}} = \frac{1}{\frac{\psi}{2}} + O(1) \ll \psi^{-1}.$$

Wählt man schließlich

$$T = \frac{2}{\psi} \log\left(|\xi|^{-1} \psi^{-\frac{7}{4}}\right).$$

so erhält man (q) wegen $\log M \ll k^{-\frac{1}{2}} M \log^{-A} M$.

(r) Es ist wirklich $T = \frac{2}{\psi} \log\left(|\xi|^{-1} \psi^{-\frac{7}{4}}\right) \geqq 2$; ferner ist

$$\Gamma \leqq 11\, M\, |\vartheta| \log M \ll M\, |\vartheta| \log M.$$

Denn nach (d) ist $\psi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\eta}{|\vartheta|}$, und da im betrachteten Falle

$$\frac{\eta}{|\vartheta|} = \frac{1}{M|\vartheta|} < \frac{1}{H} < 1$$

ist, so zeigt Reihenentwicklung des arc tg leicht

$$\frac{1}{M|\vartheta|} \geqq \psi \geqq \frac{1}{2M|\vartheta|}.$$

Wegen $1 > |\xi| > \eta = \frac{1}{M}$; $|\vartheta| < \frac{1}{2}$ kommt daher, wie unter (r) behauptet:

$$T > 2M|\vartheta| \log (M|\vartheta|)^{\frac{7}{4}} = \frac{7}{2} M|\vartheta| \log (M|\vartheta|) > \frac{7}{2} H \log H > 2;$$

$$T \leqq 4M|\vartheta| \log \left(M(2M|\vartheta|)^{\frac{7}{4}}\right) < 4M|\vartheta| \log M^{\frac{11}{4}} = 11 M|\vartheta| \log M.$$

(s) Man zerlege

$$\sum_{|\gamma| \leqq T} \xi^{-\varrho} \Gamma(\varrho) = \sum_{\varrho'} \xi^{-\varrho'} \Gamma(\varrho') + \sum_{\varrho^*} \xi^{-\varrho^*} \Gamma(\varrho^*),$$

wobei $\varrho' = \beta' + i\gamma'$ alle ϱ mit $0 < |\varrho| \leqq \frac{1}{4}$ und $\varrho^* = \beta^* + i\gamma^*$ alle ϱ mit $|\varrho| > \frac{1}{4}$; $|\gamma| \leqq T$ durchläuft.

(t) Es ist

$$\sum_{\varrho'} \xi^{-\varrho'} \Gamma(\varrho') \ll k^{-\frac{1}{2}} M \log^{-A} M.$$

Wegen $|\xi| < 1$; $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, wegen der Voraussetzungen über ϱ' und wegen der Regularität von $\Gamma(s)$ für $|s - 1| \leqq \frac{1}{4}$ gilt nämlich

$$|\xi^{-\varrho'}| \, |\Gamma(\varrho')| \leqq |\xi|^{-\beta'} e^{\varphi|\gamma'|} \left| \frac{\Gamma(\varrho' + 1)}{\varrho'} \right| \ll |\xi|^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{|\varrho'|}.$$

Da ferner im betrachteten Falle

$$|\xi| \geqq |\vartheta| > \eta H = \frac{H}{M}; \; |\xi|^{-\frac{1}{4}} < \left[\frac{M}{H}\right]^{\frac{1}{4}} < M^{\frac{1}{4}}$$

und nach Satz 3

$$\frac{1}{|\varrho'|} \ll v^{\varepsilon} \leqq K^{\varepsilon} \tau^{\varepsilon} < K^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{1}{A_1}} \ll \log M$$

ist, so folgt schließlich, wie unter (t) angekündigt,

$$\sum_{\varrho'} \xi^{-\varrho'} \Gamma(\varrho') \ll M^{\frac{1}{4}} \log M \sum_{\varrho'} 1 \ll M^{\frac{1}{4}} \log^2 M \ll k^{-\frac{1}{2}} M \log^{-A} M;$$

denn nach der klassischen Nullstellenformel ist

$$\sum_{\varrho'} 1 \leqq \sum_{|\gamma| \leqq 1} 1 \ll \log v \leqq \log K + \log \tau \ll 1 + \tau^{\frac{1}{A_1}} \ll \log M.$$

(u) Es ist

$$\sum_{\varrho^*} \xi^{-\varrho^*} \Gamma(\varrho^*) \ll k^{-\frac{1}{2}} M \log^{-A} M.$$

Nach (f) gilt nämlich

$$\sum_{\varrho^*} \xi^{-\varrho^*} \Gamma(\varrho^*) \ll \sum_{\varrho^*} |\xi|^{-\beta^*} e^{-\nu|\gamma^*|} (|\gamma^*|+1)^{\beta^*-\frac{1}{2}} \leqq \sum_{\varrho^*} |\xi|^{-\beta^*} (|\gamma^*|+1)^{\beta^*-\frac{1}{2}}$$
$$\ll \sum_{\varrho^*} |\xi|^{-\beta^*} \Phi_1(\beta^*) = \sum_{\varrho^*} \Phi(\beta^*) \leqq \sum_{|\gamma| \leqq T} \Phi(\beta)$$

mit

$$\Phi_1(\sigma) = \begin{Bmatrix} 1 & \text{für } \sigma \leqq \frac{1}{2} \\ T^\nu & \text{für } \sigma \geqq \frac{1}{2} \end{Bmatrix}; \quad \nu = \sigma - \tfrac{1}{2}; \quad \Phi(\sigma) = |\xi|^{-\sigma} \Phi_1(\sigma).$$

$\Phi(\sigma)$ ist für $0 \leqq \sigma \leqq 1$ stetig und stückweise stetig differenzierbar. Daher liefert ein Lemma von Čudakov ([2], Lemma 8)

$$\text{(u. 1)} \quad \begin{aligned} \sum_{\varrho^*} \xi^{-\varrho^*} \Gamma(\varrho^*) &\ll N(0, T)\, \Phi(0) + \int_0^1 N(\sigma, T)\, \Phi'(\sigma)\, d\sigma \\ &\ll N(0, T) + \log M \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} N(\sigma, T)\, |\xi|^{-\sigma} d\sigma + \int_0^{\frac{1}{2}} N(\nu + \tfrac{1}{2}, T)\, |\xi|^{-\frac{1}{2}-\nu}\, T^\nu d\nu \right\} \end{aligned}$$

(wo $N(\sigma, T) = N_\chi(\sigma, T)$ die Bedeutung aus Satz 1 hat); denn es ist

$$\Phi(0) = 1; \quad \Phi'(\sigma) = \begin{cases} -(\log|\xi|)\, |\xi|^{-\sigma} < \left[\log \dfrac{T}{|\xi|}\right] |\xi|^{-\sigma}; \\ -(\log|\xi|)\, |\xi|^{-\sigma}\, T^\nu + |\xi|^{-\sigma} (\log T)\, T^\nu = \left[\log \dfrac{T}{|\xi|}\right] |\xi|^{-\sigma}\, T^\nu \end{cases}$$

und nach (d), (r) und wegen $|\xi| \geqq |\vartheta| > \eta H > \dfrac{1}{M}$

$$\log \frac{T}{|\xi|} < \log (11\, M^2\, |\vartheta| \log M) < \log M^4 \ll \log M.$$

Ferner gilt nach der klassischen Nullstellenformel

$$\begin{aligned} N(\sigma, T) \leqq N(0, T) &\ll T \log (vT) \leqq T \left(\log K + \log (\tau T)\right) \ll \log (\tau T) \\ &< T \log (\tau \cdot 11\, M\, |\vartheta| \log M) \ll T \log M, \end{aligned}$$

so daß für die ersten Terme in (u. 1) sich ergibt:

$$\begin{aligned} N(0, T) + \log M \int_0^{\frac{1}{2}} N(\sigma, T)\, |\xi|^{-\sigma} d\sigma &\ll T \log M \left(1 + \log M \int_0^{\frac{1}{2}} |\xi|^{-\sigma} d\sigma\right) \\ &\leqq T \log M \left(1 + \log M \cdot \tfrac{1}{2} |\xi|^{-\frac{1}{2}}\right) \ll T\, |\xi|^{-\frac{1}{2}} \log^2 M \ll |\vartheta|^{\frac{1}{2}}\, M \log^3 M \\ \text{(u. 2)} \qquad &\leqq \left[\frac{2\pi}{k\tau}\right]^{\frac{1}{2}} M \log^3 M \ll k^{-\frac{1}{2}}\, M \log^{3-\frac{1}{2}A_1} M < k^{-\frac{1}{2}}\, M \log^{-A} M. \end{aligned}$$

Dabei kamen zur Anwendung die Aussagen: $v \leqq K\tau$; (r); $1 < |\xi| < |\vartheta|$; (b) und (a).

Nun ist noch der dritte Term in (u. 1) abzuschätzen. Wegen

$$v \leqq Kk \ll k; \log (v+1) \ll 1 + \log (k+1) \ll \log (k+1)$$

folgt aus Satz 1:

$$\text{(u. 3)} \quad \begin{aligned} &\int_0^{\frac{1}{2}} N(\nu + \tfrac{1}{2}, T)\, |\xi|^{-\frac{1}{2}-\nu}\, T^\nu d\nu \\ &\ll \log^{7,5} T \int_0^{\frac{1}{2}} k^{2\nu}\, T^{\nu + \frac{1-2\nu}{1-\nu}}\, |\xi|^{-\frac{1}{2}-\nu} d\nu + k^2 \log (k+1) \int_0^{\frac{1}{2}} |\xi|^{-\frac{1}{2}-\nu}\, T^\nu\, d\nu. \end{aligned}$$

Hierin ist einerseits nach (r), (d) und wegen $1 > |\xi| > |\vartheta| > \eta H = \frac{H}{M}$

$$k^2 \log(k+1) \int_0^{\frac{1}{2}} |\xi|^{-\frac{1}{2}-\nu} T^\nu d\nu \ll \tau^2 \log \tau \, |\vartheta|^{-1} (M |\vartheta| \log M)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{(u. 4)} \qquad \ll \tau^3 M^{\frac{1}{2}} \left(\frac{H}{M}\right)^{-\frac{1}{2}} \log M = M \log^{3A_1 - \frac{1}{2}\cdot 24A_1 + \frac{1}{2}} M < \log^{-A-1} M.$$

Andererseits ist wieder nach (r), wegen $0 \leqq \nu \leqq \frac{1}{2}$; $0 \leqq \nu + \frac{1-2\nu}{1-\nu} \leqq 1$ und wegen $|\xi| > |\vartheta|$:

$$k^{2\nu} T^{\nu + \frac{1-2\nu}{1-\nu}} |\xi|^{-\frac{1}{2}-\nu} \ll k^{2\nu} M^{\nu + \frac{1-2\nu}{1-\nu}} |\vartheta|^{-\frac{1}{2}-\nu+\nu+\frac{1-2\nu}{1-\nu}} \log^{\nu+\frac{1-2\nu}{1-\nu}} M$$

$$\text{(u. 5)} \qquad \leqq k^{2\nu} M^{1-\frac{\nu^2}{1-\nu}} |\vartheta|^{\frac{1}{2}-\frac{\nu}{1-\nu}} \log M = M (\log M)\, \theta(\nu).$$

Fallunterscheidung zur Abschätzung von $\theta(\nu) = k^{2\nu} M^{\frac{-\nu^2}{1-\nu}} |\vartheta|^{\frac{1}{2}-\frac{\nu}{1-\nu}}$:

1.) $0 \leqq \nu \leqq \frac{1}{20}$; dann ist $\frac{1}{2} - \frac{\nu}{1-\nu} > 0$; also wegen $|\vartheta| \leqq \frac{2\pi}{k\tau} \ll \frac{1}{k\tau} < 1$:

$$\theta(\nu) \ll k^{2\nu} M^0 \left(\frac{1}{k\tau}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{\nu}{1-\nu}} = k^{2\nu - \frac{1}{2} + \frac{\nu}{1-\nu}} \tau^{-\frac{1}{2}+\frac{\nu}{1-\nu}}$$

$$\leqq k^{-\frac{1}{2}} \tau^{2\nu + \frac{\nu}{1-\nu}} \tau^{-\frac{1}{2}+\frac{\nu}{1-\nu}} < k^{-\frac{1}{2}} \tau^{-\frac{1}{4}}.$$

2.) $\frac{1}{20} \leqq \nu \leqq \frac{1}{3}$; dann ist $\frac{1}{2} - \frac{\nu}{1-\nu} \geqq 0$; $\frac{-\nu^2}{1-\nu} \leqq \frac{-1}{380}$; also wegen $|\vartheta| < 1$:

$$\theta(\nu) \ll k^{2\cdot\frac{1}{3}} M^{-\frac{1}{380}} |\vartheta|^0 \leqq \tau M^{-\frac{1}{380}} = \left(\tau^{\frac{7}{4}} M^{-\frac{1}{380}}\right) \tau^{-\frac{3}{4}} \ll \tau^{-\frac{3}{4}} \leqq k^{-\frac{1}{2}} \tau^{-\frac{1}{4}}.$$

3.) $\frac{1}{3} \leqq \nu \leqq \frac{2}{5}$; dann ist $\frac{-1}{6} \leqq \frac{1}{2} - \frac{\nu}{1-\nu} \leqq 0$; $\frac{-\nu^2}{1-\nu} \leqq \frac{-1}{6}$; also wegen $\eta H = \frac{H}{M} < |\vartheta| < 1$:

$$\theta(\nu) \ll k^{2\cdot\frac{2}{5}} M^{-\frac{1}{6}} \left(\frac{H}{M}\right)^{-\frac{1}{6}} \leqq \tau \cdot H^{-\frac{1}{6}} = \tau^{-3} < \tau^{-\frac{3}{4}} \leqq k^{-\frac{1}{2}} \tau^{-\frac{1}{4}}.$$

4.) $\frac{2}{5} \leqq \nu \leqq \frac{1}{2}$; dann ist $\frac{1}{2} - \frac{\nu}{1-\nu} \leqq \frac{-1}{6}$; also wegen $\frac{H}{M} < |\vartheta| < 1$:

$$\theta(\nu) \ll k^{2\cdot\frac{1}{2}} M^{\frac{-\nu^2}{1-\nu}} \left(\frac{H}{M}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{\nu}{1-\nu}} \leqq \tau M^{\frac{-\nu^2}{1-\nu} - \frac{1}{2} + \frac{\nu}{1-\nu}} H^{\frac{1}{2}-\frac{\nu}{1-\nu}} \leqq \tau M^0 H^{-\frac{1}{6}} = \tau^{-3}$$

$$< \tau^{-\frac{3}{4}} \leqq k^{-\frac{1}{2}} \tau^{-\frac{1}{4}}.$$

In allen Fällen ergibt sich also:

$$\theta(\nu) \ll k^{-\frac{1}{2}} \tau^{-\frac{1}{4}}.$$

Daher und weil nach (r) und (d)

$$\log T \leqq \log(11\, M |\vartheta| \log M) < \log M^4 \ll \log M$$

ist, folgt aus (u. 5):

$$\log^{7,5} T \int_0^{\frac{1}{2}} k^{2\nu} T^{\nu + \frac{1-2\nu}{1-\nu}} |\xi|^{-\frac{1}{2}-\nu} d\nu \ll \log^{7,5} M \int_0^{\frac{1}{2}} M (\log M)\, k^{-\frac{1}{2}} \tau^{-\frac{1}{4}} d\nu$$

$$\ll k^{-\frac{1}{2}} M (\log^{8,5} M) \tau^{-\frac{1}{4}} = k^{-\frac{1}{2}} M \log^{8,5 - \frac{1}{4}A_1} M = k^{-\frac{1}{2}} M \log^{-A-1} M.$$

Hieraus ergibt sich im Verein mit (u. 1) bis (u. 4) die Behauptung (u).

Mit (p), (q), (s), (t) und (u) bestätigt man nunmehr:

(v) Es ist

$$-\sum_{\varrho} \xi^{-\varrho} \Gamma(\varrho) \ll k^{-\frac{1}{2}} M \log^{-A} M.$$

Damit ist Satz 5 vollständig bewiesen; denn aus (o) und (v) folgt:

(w) Der Satz 5 ist auch für $|\vartheta| > \eta H$ wahr (nach (k) also allgemein).

§ 3. Der große Hilfssatz.

3. 1. Bezeichnungen. Im folgenden sei ständig

(a) $K \geqq 1$ beliebig aber fest gegeben;

$X(\mu)$ beliebiger Charakter mod K;

$f(w, X) = \sum_{p>2} X(p) (\log p) w^p$ (p durchläuft alle ungeraden Primzahlen).

(b) A, A_1, r, M, τ definiert wie in § 2, (a).

(c) $\mathfrak{C}_r$ der Kreis $w = re^{i\alpha}$; $0 \leqq \alpha = \operatorname{arc} w \leqq 2\pi$;

$\mathfrak{C}_{r\varrho}$ der Fareybogen $w = re^{i\alpha}$; $\alpha_{\varrho 1} \leqq \alpha \leqq \alpha_{\varrho 2}$, der bei der Fareyzerschneidung der Ordnung τ den Punkt

$$\varrho = e^{2\pi i \frac{l}{k}};\ 1 \leqq l \leqq k \leqq \tau;\ (l, k) = 1$$

im Inneren enthält $\left(\frac{\alpha_{\varrho 1}}{2\pi} \text{ und } \frac{\alpha_{\varrho 2}}{2\pi} \text{ also untere und obere Mediante von } \frac{l}{k}\right)$.

3. 2. Ein vorbereitender Satz. Unter den Voraussetzungen (a) bis (c) werde formuliert:

Satz 6. *Für* $w \in \mathfrak{C}_{r\varrho}$ *gilt:*

$$f(w, X) - \frac{1}{\varphi(k)} Y_\varrho(X) \Phi_\varrho(w) \ll M \log^{-A} M,$$

wobei $\Phi_\varrho(w) = \frac{1}{1 - w\varrho^{-1}}$ *ist und* $Y_\varrho(X)$ *die Bedeutung* (i. 4) *von* S. 187 *hat.*

Beweis. Für $\frac{1}{2} \leqq r \leqq r_0 = e^{-(e^{-4})}$ ist der Satz trivial (linke Seite $\ll 1 \ll$ rechte Seite). Es werde also nunmehr

$$(*) \quad M > e^4;\ \log M > 4;\ \tau = \log^{A_1} M > 4^{42}$$

vorausgesetzt.

(d) Man setze $w\varrho^{-1} = z$. Dann ist

$$f(w, X) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} B_\varrho(\chi) \sum_{p} \chi(p)\, X(p) (\log p)\, z^p + O(M \log^{-A} M).$$

Hier durchläuft χ alle Charaktere mod k, und es ist $B_\varrho(\chi) = \sum_{\lambda=1}^{k} \bar{\chi}(\lambda)\, \varrho^\lambda$.

Einerseits ist nämlich wegen $|w| = r < 1$; $k \leqq \tau$; $|X| \leqq 1$

$$f(w, X) - \sum_{p \nmid k} X(p) (\log p)\, w^p = \left\{\sum_{p>2} - \sum_{p \nmid k}\right\} X(p) (\log p)\, w^p$$

$$= -X(2) (\log 2)\, w^2 + \sum_{p \mid k} X(p) (\log p)\, w^p \ll 1 + \sum_{p \mid k} \log p$$

(d. 1) $$\ll 1 + \log k \ll \log \tau \ll \tau^{\frac{1}{A_1}} = \log M \ll M \log^{-A} M.$$

Andererseits ist

$$\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} \left(\sum_{\lambda=1}^{k} \bar{\chi}(\lambda)\, \varrho^\lambda\right) \sum_{p} \chi(p)\, X(p) (\log p)\, z^p = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{p} X(p) (\log p)\, z^p \sum_{\lambda=1}^{k} \varrho^\lambda \sum_{\chi} \chi(\lambda)\, \chi(p).$$

Da nun (vgl. [1], Satz 137)

$$\sum_{\chi} \chi(\lambda)\, \chi(p) = \begin{cases} \varphi(k) \text{ für } \lambda \equiv p \pmod{k};\ (p, k) = 1; \\ 0 \text{ sonst,} \end{cases}$$

so folgt (beachte $z\varrho = w$):

$$\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} B_{\varrho}(\chi) \sum_{p} \chi(p)\, X(p)\, (\log p)\, z^{p} = \sum_{p \nmid k} X(p)\, (\log p)\, w^{p},$$

was mit (d. 1) die Behauptung (d) liefert.

(e) Es ist $\mathsf{X}(\mu) = \chi(\mu)\, X(\mu)$ ein Charakter mod v mit $v = \dfrac{K \cdot k}{(K, k)}$; ist nun χ_1 mod $k_1 \mid k$ der durch χ induzierte und X_1 mod $v_1 \mid v$ der durch X induzierte eigentliche Charakter, so gilt

$$v_1 \leqq \frac{K \cdot k_1}{(K, k_1)} \leqq K \cdot k_1.$$

Denn die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Charaktereigenschaft (gem. Landau [1], Def. 23)

$$\mathsf{X}(1) \neq 0;\ \mathsf{X}(n_1) \cdot \mathsf{X}(n_2) = \mathsf{X}(n_1 \cdot n_2);$$
$$\mathsf{X}(n) = 0 \text{ für } (n, k) > 1;\ \mathsf{X}(n_1) = \mathsf{X}(n_2) \text{ für } n_1 \equiv n_2 \pmod{v}$$

sind leicht nachzuprüfen.

Wird noch gezeigt, daß X einen Charakter mod v^* mit $v^* = \dfrac{K \cdot k_1}{(K, k_1)}$ induziert, so ist auch der zweite Teil der Behauptung (e) bewiesen; denn bekanntlich gehört von allen induzierten Charakteren, die es gibt, der (eindeutig bestimmte) eigentliche zum kleinsten Modul. In der Tat! Sei

(e. 1) $$(n_1, v) = (n_2, v) = 1;\ n_1 \equiv n_2 \pmod{v^*},$$

dann ist, wie zu zeigen,

$$\mathsf{X}(n_1) = \chi(n_1)\, X(n_1) = \chi(n_2)\, X(n_2) = \mathsf{X}(n_2);$$

denn es folgt aus (e. 1) (k_1 ist notwendig Teiler von k):

$$K \mid v^* \mid v;\ k_1 \mid v^* \mid v;$$
$$n_1 \text{ und } n_2 \text{ prim zu } k_1 \text{ und } K;\ n_1 \equiv n_2 (\text{mod } k_1 \text{ und } K),$$

und es ist X Charakter mod K; ferner induziert nach Voraussetzung χ einen Charakter mod k_1.

(f) Es ist

$$\sum_{p} \mathsf{X}(p)\, (\log p)\, z^{p} = \sum_{\mu=2}^{\infty} \mathsf{X}(\mu)\, \Lambda(\mu)\, z^{\mu} + O(\tau^{-\frac{1}{2}} M \log^{-A} M).$$

Denn nach Definition von $\Lambda(\mu)$ (§ 2, (c)) sowie nach einem Lemma von Čudakov ([2], Lemma 7, (2)) kommt:

$$\sum_{\mu=2}^{\infty} \mathsf{X}(\mu)\, \Lambda(\mu)\, z^{\mu} - \sum_{p} \mathsf{X}(p)\, (\log p)\, z^{p} = \sum_{p} \sum_{m=2}^{\infty} \mathsf{X}(p^{m})\, (\log p)\, z^{p^{m}}$$
$$\ll \sum_{p} \sum_{m=2}^{\infty} (\log p)\, r^{p^{m}} < \sum_{n=2}^{\infty} \log n \sum_{m=2}^{\infty} r^{n^{m}} \ll M^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{3}{2}} M$$
$$\ll M \log_2^{-A_1 - A} M = \tau^{-\frac{1}{2}} M \log^{-A} M$$

(beachte $|\mathsf{X}| \leqq 1$; $|z| = r$).

(g) Es ist $|z| = r$; setzt man $\operatorname{arc} z = \vartheta$, so gilt für $w \in \mathfrak{C}_{r\varrho}$

$$|\vartheta| \leqq \frac{2\pi}{k\tau};\ \vartheta_{\varrho 1} \leqq \vartheta \leqq \vartheta_{\varrho 2} \text{ mit } \frac{\pi}{k\tau} \leqq -\vartheta_{\varrho 1}, \vartheta_{\varrho 2} \leqq \frac{2\pi}{k\tau}.$$

Es ist nämlich

$$|z| = |w\varrho^{-1}| = |w| = r$$

und

$$\vartheta = \alpha - 2\pi\frac{l}{k} = 2\pi\left(\frac{\alpha}{2\pi} - \frac{l}{k}\right).$$

Nach Konstruktion von $C_{r\varrho}$ ist aber dort $\frac{\alpha}{2\pi}$ durch die obere und untere Mediante von $\frac{l}{k}$ in der Fareyreihe der Ordnung τ beschränkt; aus der Theorie der Fareybrüche (Landau [1], S. 98—100) folgt damit leicht die Behauptung (g).

(h) Es gilt für $w \in \mathfrak{C}_{r\varrho}$:

$$\sum_{\mu=2}^{\infty} \mathsf{X}(\mu)\Lambda(\mu) z^{\mu} = g(z, \mathsf{X}) = \frac{E(\mathsf{X})}{1-z} + O(k_1^{-\frac{1}{2}} M \log^{-A} M),$$

wobei $k_1 = k_1(\chi)$ die Bedeutung aus (e) hat und $E(\mathsf{X}) = 0$ oder 1 ist, je nachdem $\mathsf{X} \neq \mathsf{X}^{(0)}$ oder $= \mathsf{X}^{(0)}$ ist.

Haben nämlich $\chi_1, k_1, \mathsf{X}_1, v_1$ die Bedeutung aus (e), so ist

$$\mathsf{X}(\mu) = \begin{cases} \mathsf{X}_1(\mu) & \text{für } (\mu, v) = 1; \\ 0 = \mathsf{X}_1(\mu) - \mathsf{X}_1(\mu) & \text{für } (\mu, v) > 1. \end{cases}$$

Daher wird:

$$g(z, \mathsf{X}) = \sum_{\mu=2}^{\infty} \mathsf{X}_1(\mu)\Lambda(\mu) z^{\mu} - \sum_{\substack{\mu=2 \\ (\mu, v)>1}}^{\infty} \mathsf{X}_1(\mu)\Lambda(\mu) z^{\mu} = g(z, \mathsf{X}_1) - \sum_{\substack{\mu=2 \\ (\mu, v)>1}} \mathsf{X}_1(\mu)\Lambda(\mu) z^{\mu}.$$

Aus der Definition von $\Lambda(\mu)$ und wegen $|\mathsf{X}_1| \leqq 1$; $|z| = r < 1$ folgt weiter:

$$\begin{aligned} g(z, \mathsf{X}) - g(z, \mathsf{X}_1) &= -\sum_{\substack{p \\ (p, v)>1}} \sum_{m=1}^{\infty} \mathsf{X}_1(p^m)(\log p) z^{p^m} \\ &\ll \sum_{p \mid v} \log p \sum_{m=2}^{\infty} r^{p^m} + \sum_{p \mid v} (\log p) r^{p^1} \\ &\ll (\log v)(\log M) + \log v \ll (\log v)(\log M) \ll k_1^{-\frac{1}{2}} M \log^{-A} M, \end{aligned} \tag{h. 1}$$

wobei ein Lemma von Čudakov ([2], Lemma 7, (3)) angewandt und

$$\begin{aligned} \log v \leqq \log K + \log \tau \ll 1 + \tau^{\frac{1}{A_1}} &\ll \log M \ll M \log^{\frac{1}{2}A_1 - A - 1} M \\ &= \tau^{-\frac{1}{2}} M \log^{-A-1} M \leqq k_1^{-\frac{1}{2}} M \log^{-A-1} M \end{aligned}$$

(wegen $v \leqq Kk \leqq K\tau$, (*) und $k_1 \mid k \leqq \tau$) beachtet wurde.

Auf $g(z, \mathsf{X}_1)$ wird der Satz 5 angewandt. Die Voraussetzungen sind erfüllt; denn es ist

α) A, A_1, r, M, τ definiert wie in § 2, (a);

$$\left.\begin{array}{l} k_1 \text{ ganz; } 1 \leqq k_1 (\leqq k) \leqq \tau \\ K \geqq 1 \text{ beliebig aber fest} \\ v_1 \leqq k_1 K \text{ (nach (e))} \end{array}\right\} \text{ in Übereinstimmung mit § 2, (a),}$$

β) $z = re^{i\vartheta}$; $|\vartheta| \leqq \frac{2\pi}{k\tau} \leqq \frac{2\pi}{k_1\tau}$ wie in § 2, (b)

γ) X_1 eigentlicher Charakter mod v_1.
$g(z, \mathsf{X}_1)$ definiert wie in § 2, (c).

Anwendung von Satz 5 ergibt nunmehr in Verbindung mit (h. 1):

$$g(z, \mathsf{X}) = g(z, \mathsf{X}_1) + O(k_1^{-\frac{1}{2}} M \log^{-A} M) = \frac{E(\mathsf{X}_1)}{1-z} + O(k_1^{-\frac{1}{2}} M \log^{-A} M).$$

Das ist die Behauptung (h); denn trivialerweise ist $E(\mathsf{X}_1) = E(\mathsf{X})$.

Nach diesen Vorbereitungen läßt sich jetzt leicht zeigen:

(i) Der Satz 6 ist wahr.

Nach (f) und (h) ist nämlich (beachte $k_1 \mid k \leqq \tau$)

$$\sum_p \mathsf{X}(p)\,(\log p)\,z^p = \frac{E(\mathsf{X})}{1-z} + O(k_1^{-\frac{1}{2}} M \log^{-A} M)$$

und daher nach (d)

$$\text{(i. 1)} \qquad \begin{aligned} f(w, X) = {} & \frac{1}{\varphi(k)} \sum_\chi B_\varrho(\chi) \frac{E(\mathsf{X})}{1-z} + \\ & + O\left(\frac{1}{\varphi(k)} \sum_\chi \mid B_\varrho(\chi) \mid k_1^{-\frac{1}{2}}(\chi)\, M \log^{-A} M\right) + O(M \log^{-A} M). \end{aligned}$$

Hierin ist einmal wegen $\mid B_\varrho(\chi) \mid \leqq k_1^{\frac{1}{2}}(\chi)$ (siehe Landau [1], Satz 222 und Bd. 3, S. 333) und da es genau $\varphi(k)$ Charaktere mod k gibt:

$$\text{(i. 2)} \qquad \frac{1}{\varphi(k)} \sum_\chi \mid B_\varrho(\chi) \mid k_1^{-\frac{1}{2}}(\chi)\, M \log^{-A} M \ll M \log^{-A} M;$$

andererseits (s. Rademacher [3], Hilfssatz 1) ist $E(\mathsf{X}) = E(\chi \cdot X)$ sonst $= 0$ und $= 1$ genau dann, falls $\chi(\mu) = \overline{X}(\mu)$ für alle $(\mu, v) = 1$ und falls zudem $X(\mu)$ einen Charakter $X_d(\mu)$ mod $d = (K, k)$ induziert, d. h. wenn

$$\text{(i. 3)} \qquad \chi(\mu) = \left\{\begin{matrix} \overline{X}_d(\mu) \text{ für } (\mu, k) = 1 \\ 0 \text{ sonst} \end{matrix}\right\} = \chi_{(X)}(\mu).$$

Setzt man also

$$\text{(i. 4)} \qquad Y_\varrho(X) = \begin{cases} 0, \text{ falls } X \text{ keinen Charakter mod } d \text{ induziert;} \\ B_\varrho(\chi_{(X)}) \text{ sonst, wo } \chi_{(X)} \text{ die Bedeutung (i. 3) hat,} \end{cases}$$

so wird

$$\frac{1}{\varphi(k)} \sum_\chi B_\varrho(\chi) \frac{E(\mathsf{X})}{1-z} = \frac{1}{\varphi(k)}\, Y_\varrho(X)\, \Phi_\varrho(w),$$

was in Verbindung mit (i. 1) und (i. 2) die Behauptung des Satzes 6 liefert.

Aus Satz 6 wird leicht der sog. große Hilfssatz folgen, zu dessen Formulierung jetzt noch einige Definitionen vorausgeschickt werden.

3. 3. Weitere Bezeichnungen.

(j) Es sei a eine beliebige zu K teilerfremde Zahl. Alsdann sei

$$F(w, a) = \varphi(K) \sum_{p \equiv a\,(K)} (\log p)\, w^p,$$

wobei p (wie im folgenden stets) alle ungeraden Primzahlen durchläuft.

(k) Es sei $d = d(k) = (K, k)$; ferner sei

$$Q = Q(k) \text{ mod } d \text{ so bestimmt, daß } \frac{kQ}{d} \equiv 1 \pmod{d};$$

$$R = R(k) = \frac{kQ}{d} \left(R \text{ also mod } k \text{ bestimmt und } \equiv 1 \pmod{d}\right);$$

$$N(k) = 1 \text{ oder } 0 \text{ je nachdem } \left(\frac{k}{d}, K\right) = 1 \text{ oder } > 1.$$

Alsdann sei

$$\psi_\varrho(w, a) = N(k)\, \frac{\mu}{\varphi}\left(\frac{k}{d}\right) \varrho^{Ra} \cdot \Phi_\varrho(w).$$

3. 4. Der große Hilfssatz.

Mit (j) und (k) gilt

Satz 7 (großer Hilfssatz). *Für $w \in \mathfrak{C}_{r\varrho}$ ist*

$$F(w, a) - \psi_\varrho(w, a) \ll M \log^{-A} M.$$

Beweis. Es besteht ein einfacher Zusammenhang zwischen $F(w, a)$ und $f(w, X)$, nämlich:

(l) Es gilt

$$F(w, a) = \sum_X \overline{X}(a)\, f(w, X),$$

wobei X in $\sum_X$ alle $\varphi(K)$ Charaktere mod K durchläuft.

Denn man erkennt unter Verwendung eines bekannten Satzes (siehe Landau [1], Satz 137) sofort

$$\sum_X \overline{X}(a) \sum_p X(p) (\log p)\, w^p = \sum_p \Big(\sum_X \overline{X}(a)\, X(p)\Big) (\log p)\, w^p = \varphi(K) \sum_{p \equiv a\,(K)} (\log p)\, w^p.$$

Aus dem Resultat (l) ergibt sich nunmehr

(m) Es ist

$$F(w, a) - \frac{1}{\varphi(k)} \Big(\sum_X \overline{X}(a)\, Y_\varrho(X)\Big) \Phi_\varrho(w) \ll M \log^{-A} M.$$

Denn nach (l) und Satz 6 ist der in Frage stehende Ausdruck links in (m)

$$= \sum_X \overline{X}(a) \Big\{ f(w, X) - \frac{1}{\varphi(k)}\, Y_\varrho(X)\, \Phi_\varrho(w) \Big\} \ll \sum_X |\, \overline{X}(a) \,|\, M \log^{-A} M \,| \ll M \log^{-A} M,$$

da ja $\sum_X |\, \overline{X}(a) \,| \leqq \sum_X 1 = \varphi(K) \leqq K \ll 1$.

Wegen (m) braucht man zum Beweis von Satz 7 jetzt nur noch zu zeigen:

(n) $$\psi_\varrho(w, a) = \frac{1}{\varphi(k)} \Big(\sum_X \overline{X}(a)\, Y_\varrho(X)\Big) \Phi_\varrho(w).$$

Das kommt so heraus: Wegen der in (i. 4) festgelegten Bedeutung von $Y_\varrho(X)$ ist

$$\sum_X \overline{X}(a)\, Y_\varrho(X) = \sum_{X_d} \overline{X}_d(a) \sum_{\substack{\lambda=1 \\ (\lambda,k)=1}}^{k} X_d(\lambda)\, \varrho^\lambda = \sum_{\substack{\lambda=1 \\ (\lambda,k)=1}}^{k} \Big(\sum_{X_d} \overline{X}_d(a)\, X_d(\lambda)\Big) \varrho^\lambda = \sum_{\substack{\lambda=1 \\ (\lambda,k)=1,\ \lambda \equiv a\,(K)}}^{k} \varphi(d)\, \varrho^\lambda.$$

wobei X_d alle Charaktere mod d durchläuft und daher ein bekannter Satz (Landau [1], Satz 137) anwendbar ist. Beachtet man die Definition von ϱ, so liefert nun ein Hilfssatz von Rademacher ([3], Hilfssatz 2):

$$\sum_X \overline{X}(a)\, Y_\varrho(X) = N(k)\, \varphi(d)\, \mu\Big(\frac{k}{d}\Big)\, \varrho^{Ra}.$$

Berücksichtigt man noch, daß $\left(\frac{k}{d}, d\right) = \left(\frac{k}{d}, (K, k)\right) = \left(\frac{k}{d}, K\right)$ und daß im Falle $\left(\frac{k}{d}, d\right) = 1$

$$\varphi(k) = \varphi\Big(\frac{k}{d}\Big) \cdot \varphi(d); \quad \varphi^{-1}\Big(\frac{k}{d}\Big) = \varphi(d) \cdot \varphi^{-1}(k)$$

ist, so erhält man das Resultat (n).

Aus (n) folgt aber, wie schon bemerkt, in Verbindung mit (m):

(o) Der große Hilfssatz (Satz 7) ist wahr.

§ 4. Asymptotische Bestimmung von $\nu(n)$.

4. 1. Bezeichnungen.

(a) Es seien $K \geqq 1$ und $m \geqq 3$ beliebig aber fest gegeben, und es seien $a_1, \ldots, a_m$ m beliebige zu K teilerfremde Zahlen. Die in **3.** 1 und **3.** 3 gegebenen Bezeichnungen gelten auch weiterhin. Insbesondere ist also

$$F(w, a_y) = \varphi(K) \sum_{p_y \equiv a_y (K)} (\log p_y)\, w^{p_y},$$

wo die p_y (wie im folgenden stets) je die ungeraden Primzahlen durchlaufen. Schließlich sei

$$G(w) = \prod_{y=1}^{m} F(w, a_y)\ ^{11)}.$$

(b) Es sei (gemäß Einleitung, (7)):

$$\nu(n) = \sum_{\substack{p_1 + \cdots + p_m = n \\ p_y \quad a_y(K)}} \prod_{y=1}^{m} \log p_y\ ^{11)}.$$

4. 2. Ansatz.

(c) Es ist

$$2\pi i\, \varphi^m(K)\ \nu(n) = \int_{\mathfrak{C}_\tau} G(w) \frac{dw}{w^{n+1}}.$$

Das entnimmt man unmittelbar aus der Potenzreihenentwicklung

$$G(w) = \prod_{y=1}^{m} \left\{ \varphi(K) \sum_{\substack{p_y \\ a_y(K)}} (\log p_y)\, w^{p_y} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \varphi^m(K) \sum_{\substack{p_1 + \cdots + p_m = n \\ p_y \quad a_y(K)}} \prod_{y=1}^{m} \log p_y \right\} w^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^m(K)\ \nu(n)\ w^n$$

und der Cauchyschen Integralformel.

Damit die Darstellung (c) mittels des großen Hilfssatzes asymptotisch ausgewertet werden kann, wird nun der Integrationsweg $\mathfrak{C}_\tau$ gemäß 3. 1 in $\sum_\varrho \mathfrak{C}_{\tau\varrho}$ zerlegt und die Funktion $G(w)$ auf jeden Fareybogen $\mathfrak{C}_{\tau\varrho}$ geeignet identisch umgeformt. Und zwar:

(d) Es ist

$$\begin{aligned} G(w) = & \prod_{y=1}^{m} \psi_\varrho(w, a_y) + \prod_{y=1}^{m-1} \psi_\varrho(w, a_y) \cdot \{F(w, a_m) - \psi_\varrho(w, a_m)\} \\ & + \sum_{\lambda=2}^{m-1} \prod_{y=1}^{m-\lambda} \psi_\varrho(w, a_y) \cdot \{F(w, a_{m-\lambda+1}) - \psi_\varrho(w, a_{m-\lambda+1})\} \cdot \prod_{y=m-\lambda+2}^{m} F(w, a_y) \\ & + \{F(w, a_1) - \psi_\varrho(w, a_1)\} \cdot \prod_{\lambda=2}^{m} F(w, a_y) \\ = & \ U_\varrho^{\langle 0 \rangle}(w) + U_\varrho^{\langle 1 \rangle}(w) + \sum_{\lambda=2}^{m-1} U_\varrho^{\langle \lambda \rangle}(w) + U_\varrho^{\langle m \rangle}(w), \end{aligned}$$

wo die $U_\varrho^{\langle \lambda \rangle}(w)$ der Reihe nach durch die Gleichung definiert sind.

Denn der Minus-Bestandteil von $U_\varrho^{\langle \lambda \rangle}$ hebt sich gegen den Plus-Bestandteil von $U_\varrho^{\langle \lambda-1 \rangle}$ weg ($\lambda = 1, \ldots, m$) und es bleibt nur der Plus-Bestandteil von $U_\varrho^{\langle m \rangle}$, welcher gleich $G(w)$ ist. Man hat also:

(e) Es ist

$$\begin{aligned} 2\pi i\, \varphi^m(K)\ \nu(n) = & \sum_\varrho \int_{\mathfrak{C}_{\tau\varrho}} U_\varrho^{\langle 0 \rangle}(w) \frac{dw}{w^{n+1}} + \sum_\varrho \int_{\mathfrak{C}_{\tau\varrho}} U_\varrho^{\langle 1 \rangle}(w) \frac{dw}{w^{n+1}} \\ & + \sum_{\lambda=2}^{m-1} \sum_\varrho \int_{\mathfrak{C}_{\tau\varrho}} U_\varrho^{\langle \lambda \rangle}(w) \frac{dw}{w^{n+1}} + \sum_\varrho \int_{\mathfrak{C}_{\tau\varrho}} U_\varrho^{\langle m \rangle}(w) \frac{dw}{w^{n+1}}. \end{aligned}$$

Dabei durchläuft ϱ in $\sum_\varrho$ alle primitiven k-ten Einheitswurzeln mit $k \leqq \tau$, d. h. l, k alle Wertepaare mit $1 \leqq l \leqq k \leqq \tau$; $(l, k) = 1$.

---

[11]) $a_1, \ldots, a_m$ werden nur der Kürze halber nicht in die Bezeichnung aufgenommen. Sie sind jedoch nicht fest; die Konstanten und die Abschätzungen dürfen also von ihnen nicht abhängen.

Die Terme $\sum_{\varrho} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} U_{\varrho}^{\langle\lambda\rangle}(w) \frac{dw}{w^{n+1}}$ $(\lambda = 1, \ldots, m)$ werden in **4.** 4 einzeln abgeschätzt. Einige Vorbereitungen werden dazu noch in **4.** 3 getroffen.

4. 3. Vorbereitungen.

(f) Im folgenden sei nun speziell $r = e^{-\frac{1}{n}}$; $n \geqq 9$. Gemäß **2.** 1 und **3.** 1 wird dann

$$\eta = \frac{1}{n}\,;\; M = n;\; \tau = \log^{A_1} n \;\; (> 2^{42}).$$

$$w\varrho^{-1} = z = e^{-\xi} \text{ mit } \xi = \eta - i\vartheta = \frac{1}{n} - i\vartheta;\; \vartheta = \alpha - 2\pi\frac{l}{k}\,.$$

(g) Es ist für $w \in \mathfrak{C}_r$

$$\frac{dw}{w^{n+1}} \ll d\alpha\,.$$

Denn es ist

$$\left|\frac{dw}{w^{n+1}}\right| = \frac{|\,d(re^{i\alpha})\,|}{r^{n+1}} = r^{-n}\,|\,ie^{i\alpha}\,|\,d\alpha \ll d\alpha$$

wegen $r^{-n} = e^{-\frac{1}{n}\cdot(-n)} = e \ll 1$.

(h) Es ist für $u > 1$

$$\int_{\alpha_{\varrho 1}}^{\alpha_{\varrho 2}} |\,\Phi_{\varrho}^{u}(re^{i\alpha})\,|\,d\alpha \ll n^{u-1}.$$

Da nämlich wegen der Regularität für $|\,\xi\,| < 2\pi$

(h. 1) $$\frac{1}{1-e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi} \ll 1 \text{ für } |\,\xi\,| \leqq \frac{3}{2}\pi$$

und da für $w \in \mathfrak{C}_{r\varrho}$ nach § 3, (g)

$$|\,\xi\,| \leqq \frac{1}{n} + |\,\vartheta\,| \leqq \frac{1}{9} + \frac{2\pi}{k\tau} \leqq \frac{1}{9} + \frac{2\pi}{2^{42}} < 1 < \frac{3}{2}\pi$$

ist, so ist

$$\Phi_{\varrho}(w) = \frac{1}{1 - w\varrho^{-1}} = \frac{1}{1-e^{-\xi}} = \frac{1}{\xi} + O(1) \ll \frac{1}{|\,\xi\,|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + |\,\vartheta\,|^2}}$$

(beachte $|\,\xi\,| < 1$). Damit kommt

$$\int_{\alpha_{\varrho 1}}^{\alpha_{\varrho 2}} |\,\Phi_{\varrho}^{u}(re^{i\alpha})\,|\,d\alpha \ll \int_{\alpha_{\varrho 1}}^{\alpha_{\varrho 2}} \left(\frac{1}{n^2} + |\,\vartheta\,|^2\right)^{-\frac{u}{2}} d\alpha = \int_{\vartheta_{\varrho 1}}^{\vartheta_{\varrho 2}} \left(\frac{1}{n^2} + |\,\vartheta\,|^2\right)^{-\frac{u}{2}} d\vartheta$$

$$< \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} + |\,\vartheta\,|^2\right)^{-\frac{u}{2}} d\vartheta = n^{u-1} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\,\psi\,|^2)^{-\frac{u}{2}}\, d\psi \ll n^{u-1},$$

da das uneigentliche Integral existiert.

(i) Es ist

$$F(re^{i\alpha}, a_y) \ll n \log^2 n;$$

$$\int_0^{2\pi} |\,F(re^{i\alpha}, a_y)\,|^2\, d\alpha \ll n \log^2 n\,.$$

Denn es ist einmal wegen $|w| = |re^{i\alpha}| = r < 1$

$$F(w, a) = \varphi(K) \sum_{p \equiv a \pmod K} (\log p)\, w^p \ll \sum_{n=2}^{\infty} (\log n)\, r^n < \sum_{n=2}^{\infty} (\log^2 n)\, r^n \ll n \log^2 n$$

nach einem Lemma von Čudakov ([2], Lemma 7, (1)), und zum anderen gilt, da der Integrand in α die Periode 2π hat:

$$\int_0^{2\pi} |F(re^{i\alpha}, a)|^2\, d\alpha = \int_{-\pi}^{+\pi} |F(re^{i\alpha}, a)|^2\, d\alpha = 2\pi \sum_{p \equiv a \pmod K} (\log^2 p)\, r^{2p}$$

$$\ll \sum_p (\log^2 (2p))\, r^{2p} < \sum_{n=2}^{\infty} (\log^2 n)\, r^n \ll n \log^2 n,$$

wobei in der ersten Zeile ein Satz von Landau ([1], Satz 223), in der zweiten Zeile nochmals das Lemma von Čudakov benutzt wurde.

Schließlich sei noch bemerkt, daß nach der Definition in **3.** 3 trivialerweise gilt:

(j) Es ist

$$\psi_\varrho(w, a_y) \ll N(k) \frac{1}{\varphi(k)} |\Phi_\varrho(w)|.$$

Denn nach Definition ist für $N(k) \neq 0$ (also $N(k) = 1$) $\left(\frac{k}{d}, K\right) = \left(\frac{k}{d}, d\right) = 1$; also $\varphi\left(\frac{k}{d}\right) = \frac{\varphi(k)}{\varphi(d)}$, und es kommt

$$\text{(j. 1)} \qquad N(k) \frac{\mu}{\varphi}\left(\frac{k}{d}\right) \varrho^{Ra} \ll \frac{1}{\varphi(k)}$$

wegen $\varphi(d) \leqq d \mid K \ll 1$; $\mu\left(\frac{k}{d}\right) \leqq 1$; $|\varrho| = 1$.

4. 4. Asymptotische Bestimmung von $\nu(n)$. Es wird jetzt wieder an die Darstellung (e) angeknüpft.

(k) Es ist

$$\sum_\varrho \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} U_\varrho^{\langle 1 \rangle}(w) \frac{dw}{w^{n+1}} \ll n^{m-1} \log^{2(m-2)-A} n.$$

Denn nach (j) und Satz 7 ist

$$U_\varrho^{\langle 1 \rangle}(w) = \prod_{y=1}^{m-1} \psi(w, a_y) \cdot \{F(w, a_m) - \psi_\varrho(w, a_m)\} \ll \frac{1}{\varphi^{m-1}(k)} |\Phi_\varrho^{m-1}(w)| \cdot n \log^{-A} n;$$

also nach (g), (h) und wegen $m \geqq 3$

$$\sum_\varrho \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} U_\varrho^{\langle 1 \rangle}(w) \frac{dw}{w^{n+1}} \ll n \log^{-A} n \sum_\varrho \frac{1}{\varphi^2(k)} \int_{\alpha_{\varrho 1}}^{\alpha_{\varrho 2}} |\Phi^{m-1}(re^{i\alpha})|\, d\alpha \ll n^{m-1} \log^{-A} n \sum_\varrho \frac{1}{\varphi^2(k)}$$

und schließlich ist nach Landau ([1], Satz 245) $\left(\varepsilon < \frac{1}{A_1}\right)$:

$$\text{(k. 1)} \qquad \sum_\varrho \frac{1}{\varphi^2(k)} = \sum_{k \leqq \tau} \frac{1}{\varphi(k)} \ll \sum_{k \leqq \tau} k^{\varepsilon - 1} < \int_0^\tau k^{\varepsilon-1} dk = \frac{1}{\varepsilon} \tau^\varepsilon \ll \tau^{\frac{1}{A_1}} = \log n.$$

Daraus aber folgt (k) wegen $2(m-2) \geqq 2 > 1$.

(l) Es ist für $2 \leqq \lambda \leqq m-1$

$$\sum_\varrho \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} U_\varrho^{\langle \lambda \rangle}(w) \frac{dw}{w^{n+1}} \ll n^{m-1} \log^{2(m-2)-A} n.$$

Denn nach (j) und Satz 7 ist

$$U_\varrho^{\langle\lambda\rangle}(w) = \prod_{y=1}^{m-\lambda} \psi_\varrho(w, a_y) \cdot \{F(w, a_{m-\lambda+1}) - \psi_\varrho(w, a_{m-\lambda+1})\} \cdot \prod_{y=m-\lambda+2}^{m} F(w, a_y)$$
$$\ll \frac{1}{\varphi^{m-\lambda}(k)} \mid \Phi_\varrho^{m-\lambda}(w) \mid \cdot n \log^{-A} n \cdot \prod_{y=m-\lambda+2}^{m} \mid F(w, a_y) \mid ;$$

also nach (g)

$$\sum_\varrho \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} U_\varrho^{\langle\lambda\rangle}(w) \frac{dw}{w^{n+1}} \ll n \log^{-A} n \cdot \sum_\varrho \frac{1}{\varphi^{m-\lambda}(k)} \int_{\alpha_{\varrho 1}}^{\alpha_{\varrho 2}} \mid \Phi_\varrho^{m-\lambda}(re^{i\alpha}) \mid \prod_{y=m-\lambda+2}^{m} \mid F(re^{i\alpha}, a_y) \mid d\alpha .$$

Weiter folgt, wenn man die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung erstens auf das Integral und zweitens auf die Summe anwendet:

$$\text{(l. 1)} \qquad \left\{ \sum_\varrho \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} U_\varrho^{\langle\lambda\rangle}(w) \frac{dw}{w^{n+1}} \right\}^2$$
$$\ll \left\{ (n \log^{-A} n) \sum_\varrho \frac{1}{\varphi^{m-\lambda}(k)} \sqrt{\int_{\alpha_{\varrho 1}}^{\alpha_{\varrho 2}} \mid \Phi_\varrho^{2(m-\lambda)}(re^{i\alpha}) \mid \prod_{y=m-\lambda+2}^{m-1} \mid F(re^{i\alpha}, a_y) \mid^2 d\alpha} \cdot \sqrt{\int_{\alpha_{\varrho 1}}^{\alpha_{\varrho 2}} \mid F(re^{i\alpha}, a_m) \mid^2 d\alpha} \right\}^2$$
$$\leqq n^2 \log^{-2A} n \left(\sum_\varrho \frac{1}{\varphi^{2(m-\lambda)}(k)} \int_{\alpha_{\varrho 1}}^{\alpha_{\varrho 2}} \mid \Phi_\varrho^{2(m-\lambda)}(re^{i\alpha}) \mid \prod_{y=m-\lambda+2}^{m-1} \mid F(re^{i\alpha}, a_y) \mid^2 d\alpha \right) \cdot \left(\sum_\varrho \int_{\alpha_{\varrho 1}}^{\alpha_{\varrho 2}} \mid F(re^{i\alpha}, a_m) \mid^2 d\alpha \right)$$

Hierin ist einmal nach (i) und (h)

$$\sum_\varrho \frac{1}{\varphi^{2(m-\lambda)}(k)} \int_{\alpha_{\varrho 1}}^{\alpha_{\varrho 2}} \mid \Phi_\varrho^{2(m-\lambda)}(re^{i\alpha}) \mid \cdot \prod_{y=m-\lambda+2}^{m-1} \mid F(re^{i\alpha}, a) \mid^2 d\alpha$$
$$\ll (n \log^2 n)^{2(m-1-(m-\lambda+2)+1)} \sum_\varrho \frac{1}{\varphi^{2(m-\lambda)}(k)} \int_{\alpha_{\varrho 1}}^{\alpha_{2\varrho}} \mid \Phi_\varrho^{2(m-\lambda)}(re^{i\alpha}) \mid d\alpha$$
$$\ll (n \log^2 n)^{2(\lambda-2)} n^{2(m-\lambda)-1} \sum_\varrho \frac{1}{\varphi^{2(m-\lambda)}(k)}$$
$$\text{(l. 2)} \qquad \leqq n^{2m-5} \log^{4(m-3)} n \sum_\varrho \frac{1}{\varphi^2(k)} \ll n^{2m-5} \log^{4m-11} n ,$$

wobei $\lambda \leqq m-1$; $m-\lambda \geqq 1$; $4(\lambda-2) \leqq 4(m-3)$ beachtet und (k. 1) benutzt wurde. Zum anderen ist in (l. 1) nach (i):

$$\sum_\varrho \int_{\alpha_{\varrho 1}}^{\alpha_{\varrho 2}} = \int_0^{2\pi} \mid F(re^{i\alpha}, a_m) \mid^2 d\alpha \ll n \log^2 n .$$

Dies liefert mit (l. 1) und (l. 2) die Behauptung (l).

(m) Es ist

$$\sum_\varrho \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} U_\varrho^{\langle m\rangle}(w) \frac{dw}{w^{n+1}} \ll n^{m-1} \log^{2(m-2)-A} n .$$

Denn nach Satz 7 ist

$$U_\varrho^{\langle m\rangle}(w) = \{F(w, a_1) - \psi_\varrho(w, a_1) \cdot \prod_{y=2}^{m} F(w, a_y) \ll n \log^{-A} n \cdot \prod_{y=2}^{m} \mid F(w, a_y) \mid ;$$

also nach (g)

$$\sum_{\varrho} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} U_{\varrho}^{\langle m\rangle}(w) \frac{dw}{w^{n+1}} \ll n \log^{-A} n \cdot \sum_{\varrho} \int_{\alpha_{\varrho 1}}^{\alpha_{\varrho 2}} \prod_{y=2}^{m} | F(re^{i\alpha}, a_y) | \, d\alpha .$$

Weiter folgt, wenn man die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung erstens auf das Integral und zweitens auf die Summe anwendet:

$$\left\{ \sum_{\varrho} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} U_{\varrho}^{\langle m\rangle}(w) \frac{dw}{w^{n+1}} \right\}^2$$

$$\ll \left\{ (n \log^{-A} n) \sum_{\varrho} \sqrt{\int_{\alpha_{\varrho 1}}^{\alpha_{\varrho 2}} | F(re^{i\alpha}, a_2) |^2 d\alpha} \cdot \sqrt{\int_{\alpha_{\varrho 1}}^{\alpha_{\varrho 2}} \prod_{y=3}^{m} | F(re^{i\alpha}, a_y) |^2 \, d\alpha} \right\}^2$$

$$\leqq n^2 \log^{-A} n \left(\sum_{\varrho} \int_{\alpha_{\varrho 1}}^{\alpha_{\varrho 2}} | F(re^{i\alpha}, a_2) |^2 \, d\alpha \right) \cdot \left(\sum_{\varrho} \int_{\alpha_{\varrho 1}}^{\alpha_{\varrho 2}} \prod_{y=3}^{m} | F(re^{i\alpha}, a_y) |^2 \, d\alpha \right).$$

Schließlich erhält man unter dreimaliger Verwendung von (i):

$$\left\{ \sum_{\varrho} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} U_{\varrho}^{\langle m\rangle}(w) \frac{dw}{w^{n+1}} \right\}^2$$

$$\ll (n^2 \log^{-2A} n) \, (n \log^2 n)^{2(m-3)} \int_0^{2\pi} | F(re^{i\alpha}, a_2) |^2 d\alpha \int_0^{2\pi} | F(re^{i\alpha}, a_3) |^2 \, d\alpha$$

$$\ll (n^2 \log^{-2A} n) \, (n \log^2 n)^{2(m-3)} (n \log^2 n) \, (n \log^2 n)$$

$$= n^{2(m-1)} \log^{4(m-2)-2A} n .$$

Zusammenfassend ergibt sich:

(n) Es ist

$$2\pi i \, \varphi^m(K) \, \nu(n) = \sum_{\varrho} N(k) \left[\frac{\mu}{\varphi}\left(\frac{k}{d}\right) \right]^m \varrho^{R(a_1 + \cdots + a_m)} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} \Phi_{\varrho}^m(w) \frac{dw}{w^{n+1}} + O(n^{m-1} \log^{2(m-2)-A} n).$$

Denn zunächst hat offenbar $\sum_{\varrho} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} U_{\varrho}^{\langle 0\rangle}(w) \frac{dw}{w^{n+1}}$ die Gestalt des ersten Gliedes der rechten Seite. Alsdann liefern (e), (k), (l) und (m) das Resultat (n).

Durch dieses Ergebnis ist die asymptotische Bestimmung von $\nu(n)$ im wesentlichen geleistet. Im nächsten Abschnitt wird jetzt noch das Hauptglied in (n) diskutiert und asymptotisch durch die sog. singuläre Reihe dargestellt.

4. 5. Einführung der singulären Reihe. Zunächst wird der Fehler abgeschätzt, der entsteht, wenn man in (n) die Integrale statt über $\mathfrak{C}_{r\varrho}$ über den Vollkreis $\mathfrak{C}_r$ erstreckt.

(o) Es ist

$$\sum_{\varrho} N(k) \left[\frac{\mu}{\varphi}\left(\frac{k}{d}\right) \right]^m \varrho^{R(a_1 + \cdots + a_m)} \int_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} \Phi_{\varrho}^m(w) \frac{dw}{w^{n+1}}$$

$$= \sum_{\varrho} N(k) \left[\frac{\mu}{\varphi}\left(\frac{k}{d}\right) \right]^m \varrho^{R(a_1 + \cdots + a_m)} \int_{\mathfrak{C}_r} \Phi_{\varrho}^m(w) \frac{dw}{w^{n+1}} + O(n^{m-1} \log^{2(m-2)-A} n).$$

Denn da Φ in α die Periode 2π hat, darf man α in $\mathfrak{C}_r$ von $-\pi + 2\pi \frac{l}{k}$ bis $+\pi + 2\pi \frac{l}{k}$ statt von 0 bis 2π laufen lassen, und damit kommt unter Verwendung von (g) zunächst

$$\left\{\int\limits_{\mathfrak{C}_r} - \int\limits_{\mathfrak{C}_{r\varrho}}\right\} \Phi_\varrho^m(w)\frac{dw}{w^{n+1}} \ll \left\{\int\limits_{-\pi+2\pi\frac{l}{k}}^{\alpha_{\varrho 1}} + \int\limits_{\alpha_{\varrho 2}}^{+\pi+2\pi\frac{l}{k}}\right\} |\Phi_\varrho^m(re^{i\alpha})|\,d\alpha$$

$$= \left\{\int\limits_{-\pi}^{\vartheta_{\varrho 1}} + \int\limits_{\vartheta_{\varrho 2}}^{+\pi}\right\} |\Phi_\varrho^m(re^{i\alpha(\vartheta)})|\,d\vartheta \qquad \left(\alpha = \vartheta + 2\pi\frac{l}{k}\right).$$

Da nun nach § 3, (g) auf den Integrationswegen

$$-\pi \leqq \vartheta \leqq \vartheta_{\varrho 1} \leqq -\frac{\pi}{k\tau} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\pi}{k\tau} \leqq \vartheta_{\varrho 2} \leqq \vartheta \leqq \pi;$$

also

$$\frac{\pi}{k\tau} \leqq |\vartheta| \leqq \pi$$

und daher

$$\frac{\pi}{k\tau} \leqq |\vartheta| \leqq |\xi| = \frac{1}{n} + i\vartheta \leqq \frac{1}{9} + \pi < \frac{3}{2}\pi$$

gilt, so kommt aus (h. 1):

$$\Phi_\varrho(re^{i\alpha(\vartheta)}) = \frac{1}{1 - re^{i\left(\vartheta + 2\pi\frac{l}{k}\right)}\varrho^{-1}} = \frac{1}{1-e^{-\xi}} = \frac{1}{\xi} + O(1) \ll \frac{1}{|\xi|} \ll k\tau$$

$\left(\text{beachte } 1 \ll \frac{3}{2\pi} \leqq \frac{1}{|\xi|}\right)$. Daher wird

$$\left\{\int\limits_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} - \int\limits_{\mathfrak{C}_r}\right\} \Phi_\varrho^m(w)\frac{dw}{w^{n+1}} \ll (k\tau)^m \left\{\int\limits_{-\pi}^{\vartheta_{\varrho 1}} + \int\limits_{\vartheta_{\varrho 2}}^{+\pi}\right\} d\vartheta \leqq \tau^{2m} 2\pi \ll \tau^{2m};$$

$$\sum_\varrho N(k)\left[\frac{\mu}{\varphi}\left(\frac{k}{d}\right)\right]^m \varrho^{R(a_1+\cdots+a_m)} \left\{\int\limits_{\mathfrak{C}_{r\varrho}} - \int\limits_{\mathfrak{C}_r}\right\} \Phi_\varrho^m(w)\frac{dw}{w^{n+1}} \ll \tau^{2m}\sum_\varrho \frac{1}{\varphi^2(k)} \ll \tau^{2m}\log n$$

$$= \log^{2mA+1} n \ll n^{m-1}\log^{2(m-2)-A} n$$

(man beachte $m > 2$, (j. 1) und (k. 1). Damit ist (o) bewiesen.

Jetzt werden in (o) die Integrale über $\mathfrak{C}_r$ ausgerechnet und asymptotisch ausgewertet.

(p) Es ist

$$\sum_\varrho N(k)\left[\frac{\mu}{\varphi}\left(\frac{k}{d}\right)\right]^m \varrho^{R(a_1+\cdots+a_m)} \int\limits_{\mathfrak{C}_r} \Phi_\varrho^m(w)\frac{dw}{w^{n+1}}$$

$$= 2\pi i\left(\sum_\varrho N(k)\left[\frac{\mu}{\varphi}\left(\frac{k}{d}\right)\right]^m \varrho^{R(a_1+\cdots+a_m)-n}\right)\frac{n^{m-1}}{(m-1)!} + O(n^{m-1}\log^{2(m-2)-A} n).$$

Denn es ist für $|w| < 1$

$$\Phi_\varrho^m(w) = (1 - w\varrho^{-1})^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-m}{n}\varrho^{-n}w^n,$$

also nach der Cauchyschen Koeffizientenformel:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{C}_r} \Phi_\varrho^m(w)\frac{dw}{w^{n+1}} = (-1)^n\binom{-m}{n}\varrho^{-n} = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)}{(m-1)!}\varrho^{-n}$$

$$= \frac{n^{m-1}}{(m-1)!}\varrho^{-n} + O(n^{m-2}).$$

Damit bleibt zum Beweis von (p) nur noch zu zeigen:

$$\sum_\varrho N(k)\left[\frac{\mu}{\varphi}\left(\frac{k}{d}\right)\right]^m \varrho^{R(a_1+\cdots+a_m)} O(n^{m-2}) \ll n^{m-1}\log^{2(m-2)-A} n.$$

In der Tat ist der in Frage stehende Ausdruck

$$\ll n^{m-2} \sum_{\varrho} \frac{1}{\varphi^2(k)} \ll n^{m-2} \log n \ll n^{m-1} \log^{2(m-2)-A} n$$

nach (j. 1), (k. 1) und wegen $m > 2$.

(q) Es ist

$$\sum_{\varrho} N(k) \left[\frac{\mu}{\varphi}\left(\frac{k}{d}\right)\right]^m \varrho^{R(a_1+\cdots+a_m)-n} = S(n) + O(\log^{2(m-2)-A} n),$$

wobei

$$S(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ (\frac{k}{d}, K)=1}}^{\infty} \left[\frac{\mu}{\varphi}\left(\frac{k}{d}\right)\right]^m \sum_{\substack{1 \leq l \leq k \\ (l,k)=1}} e^{2\pi i l \left(\frac{Q}{d} \sum_{y=1}^{m} a_y - \frac{n}{k}\right)}$$

die sogenannte singuläre Reihe bedeutet.

Beachtet man nämlich, daß

$$\varrho^{R(a_1+\cdots+a_m)-n} = e^{2\pi i l \left(\frac{Q}{d} \sum_{y=1}^{m} a_y - \frac{n}{k}\right)}$$

ist und daß

$$\sum_{\varrho} N(k)\, b_\varrho = \sum_{\substack{k \leq \tau \\ (\frac{d}{k}, K)=1}} \sum_{\substack{1 \leq l \leq k \\ (l,k)=1}} b_{\varrho(k,l)}$$

bedeutet, so ist nur zu zeigen:

$$\sum_{\substack{k > \tau \\ (\frac{k}{d}, K)=1}} \left[\frac{\mu}{\varphi}\left(\frac{k}{d}\right)\right]^m \sum_{\substack{1 \leq l \leq k \\ (l,k)=1}} e^{2\pi i l \left(\frac{Q}{d} \sum_{y=1}^{m} a_y - \frac{n}{k}\right)} \ll \log^{2(m-2)-A} n.$$

In der Tat ist (vergl. (j. 1)) der Ausdruck links

$$\ll \sum_{k > \tau} \frac{1}{\varphi^m(k)} \sum_{\substack{1 \leq l \leq k \\ (l,k)=1}} 1 = \sum_{k > \tau} \frac{1}{\varphi^{m-1}(k)} \leqq \sum_{k > \tau} \frac{1}{\varphi^2(k)}.$$

Nach Landau ([1], Satz 245) folgt weiter wegen $\varepsilon < \frac{1}{A_1} < \frac{1}{4}$:

$$\sum_{k > \tau} \frac{1}{\varphi^2(k)} \ll \sum_{k > \tau} k^{-\frac{3}{2}} < \int_{[\tau]}^{\infty} k^{-\frac{3}{2}}\, dk = 2\,[\tau]^{-\frac{1}{2}} \ll \tau^{-\frac{1}{4}} = \log^{-A-0,5} n < \log^{2(m-2)-A} n,$$

womit (q) bewiesen ist.

4. 6. Endformel für $\nu(n)$; Diskussion von $S(n)$.

(r) Es ist

$$\frac{1}{n^{m-1}}\, \nu(n) - \frac{1}{(m-1)!\, \varphi^m(k)}\, S(n) \ll \log^{2(m-2)-A} n.$$

Denn aus (n), (o), (p) und (q) folgt

$$2\pi i\, \varphi^m(K)\, \nu(n) = 2\pi i \frac{n^{m-1}}{(m-1)!}\, S(n) + O(n^{m-1} \log^{2(m-2)-A} n)$$

und daraus ergibt sich die Behauptung (r).

(s) Die singuläre Reihe $S(n)$ ist

1.) gleichmäßig in n konvergent (also $\ll 1$)

und für zulässige n, d. h. falls $n \equiv m \pmod 2$; $n \equiv \sum_{y=1}^{m} a_y \pmod K$, außerdem

2.) gleichmäßig in n positiv (also $\geqq C_{14} > 0$) und

3.) $$= \Omega \cdot K \cdot \prod_{\substack{p \nmid K \\ p>2;\, p \mid n}} \left(1 - \left(\frac{-1}{p-1}\right)^{m-1}\right) \prod_{\substack{p \nmid K \\ p>2;\, p \nmid n}} \left(1 - \left(\frac{-1}{p-1}\right)^{m}\right),$$

wo p alle ungeraden Primzahlen durchläuft und $\Omega = 1$ oder 2 ist, je nachdem $K \equiv 0$ oder $1 \pmod 2$ ist.

Die Aussagen (s) sind wie folgt einzusehen: 1.) Aus

$$\sum_{\substack{k=1 \\ (\frac{k}{d},\, K)=1}}^{\infty} \left|\frac{\mu}{\varphi}\left(\frac{k}{d}\right)\right|^m \sum_{\substack{1 \leq l \leq k \\ (l,\, k)=1}} \left| e^{2\pi i l \left(\frac{Q}{d} \sum_{y=1}^{m} a_y - \frac{n}{k}\right)} \right| \ll \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi^m(k)}\, \varphi(k)$$

$$\leqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi^2(k)} \ll \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{3}{2}} < 1 + \int_1^{\infty} k^{-\frac{3}{2}}\, dk \ll 1$$

(nach ähnlichen Schlüssen wie in (q)) folgt sogar die absolute gleichmäßige Konvergenz.

3.) Folgt aus zwei Gleichungen von Rademacher ([3], (5. 28) und (5. 292)).

2.) Aus 3.) folgt wegen

$$1 + \frac{1}{(p-1)^2} \geqq \left\{ \begin{array}{l} 1 - \left(\frac{-1}{p-1}\right)^{m-1} \\ 1 - \left(\frac{-1}{p-1}\right)^{m} \end{array} \right\} \geqq 1 - \frac{1}{(p-1)^2} > 0$$

die Abschätzung

$$2K \cdot P_1 = 2K \cdot \prod_{p>2} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^2}\right) \geqq 2K \cdot \prod_{\substack{p \nmid K \\ p>2}} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^2}\right) \geqq S(n)$$

$$S(n) \geqq K \cdot \prod_{\substack{p \nmid k \\ p>2}} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \geqq K \cdot \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) = C_{14} > 0 \cdot$$

Da ferner offenbar $P_1 \ll 1$ ist, ist 1.) z. T. nochmals bewiesen und die Konvergenz des Produktes für $S(n)$ gezeigt.

§ 5. Endresultate.

Satz 8. *Seien $K \geqq 1$ und $m \geqq 3$ beliebig aber fest gegeben und seien $a_1, \ldots, a_m$ m beliebige zu K teilerfremde Zahlen. Dann ist jedes genügend große zulässige n, d. h. jedes n mit*

(1) $n \equiv m \pmod 2$; $n \equiv \sum_{y=1}^{m} a_y \pmod K$

in der Form

(2) $n = \sum_{y=1}^{m} p_y$; $p_y \equiv a_y \pmod K$; p_y *ungerade Primzahl*

darstellbar.

Beweis. Nach § 4, (r) ist, wenn man $A \geqq 2(m-2)+1$ wählt,

(3) $$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n^{m-1}}\, \nu(n) - \frac{1}{(m-1)!\, \varphi^m(K)}\, S(n)\right) = 0.$$

Also ist für ein $n_0 = n_0(m, K)$

$$\frac{1}{n^{m-1}}\, \nu(n) - \frac{1}{(m-1)!\, \varphi^m(k)}\, S(n) \geqq \frac{-C_{14}}{2(m-1)!\, \varphi^m(k)}.$$

Nach § 4, (s), 2.) gilt daher

$$\frac{(m-1)!\, \varphi^m(k)}{n^{m-1}}\, \nu(n) \geqq C_{14} - \frac{1}{2} C_{14} = \frac{1}{2} C_{14} > 0;$$

also $\nu(n) > 0$ für zulässiges $n \geqq n_0$.

Für zulässiges $n \geqq n_0$ kann infolgedessen die Summe

$$\nu(n) = \sum_{\substack{p_1 + \cdots + p_m = n \\ p_y \equiv a_y \pmod K}} \prod_{y=1}^{m} \log p_y$$

nicht leer sein, d. h. wenigstens eine Darstellung (2) muß möglich sein.

Eine hübsche, wenn auch schwächere Formulierung von Satz 8 bietet

Satz 9. *Sind $m \geqq 3$ und $K \geqq 1$ beliebig aber fest gegeben und ist $\mathfrak{R}$ eine beliebige zu K prime Restklasse, so läßt sich jedes genügend große $n \in m\mathfrak{R}$ mit $n \equiv m \pmod 2$ als Summe von m ungeraden Primzahlen $\in \mathfrak{R}$ darstellen.*

Kurz (mit $m = 3$): Der Goldbach-Vinogradovsche Satz gilt bei zulässigem n auch unter Beschränkung auf Primzahlen einer einzigen vorgeschriebenen arithmetischen Progression $a + \omega K$; $(a, K) = 1$.

Ist nämlich a ein Repräsentant von $\mathfrak{R}$, so gilt nach Voraussetzung

$$n \equiv ma \pmod K; \quad a_1 = \cdots = a_m = a; \quad n \equiv \Sigma\, a_y \pmod K,$$

womit alle Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt sind.

Satz 10. *Seien $m \geqq 3$ und $K \geqq 1$ beliebig aber fest gegeben und seien $a_1, \ldots, a_m$ m beliebige zu K teilerfremde Zahlen. Ist dann (gem. Einleitung, (6)) $\mathsf{N}(n)$ die Anzahl der Darstellungen (2), so gilt für alle (im Sinne von (1)) zulässigen n:*

$$\mathsf{N}(n) = \frac{n^{m-1}}{\log^m n} \cdot \frac{\Omega K}{(m-1)!\,\varphi^m(k)} \cdot \prod_{\substack{p \nmid K \\ p > 2;\, p \mid n}} \left(1 - \left(\frac{-1}{p-1}\right)^{m-1}\right) \cdot \prod_{\substack{p \nmid K \\ p > 2;\, p \nmid n}} \left(1 - \frac{-1}{p-1}\right)^m\Bigg)$$
$$+ \frac{n^{m-1}}{\log^m n} \cdot \lambda_{m,K}(n)$$

mit $\Omega = 1$ oder 2, je nachdem $K \equiv 0$ oder 1 (mod 2) ist, und $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_{m,K}(n) = 0$.

Ansonsten ist trivialerweise $\mathsf{N}(n) = 0$.

Beweis. Nach § 4, (s), 3.) ist zu beweisen:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{\log^m n}{n^{m-1}}\, \mathsf{N}(n) - \frac{1}{(m-1)!\,\varphi^m(k)}\, S(n)\right) = 0;$$

also nach (3):

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{\log^m n}{n^{m-1}}\, \mathsf{N}(n) - \frac{1}{n^{m-1}}\, \nu(n)\right) = 0. \tag{4}$$

In der Tat! Es ist zunächst

$$\nu(n) = \sum_{\substack{p_1 + \cdots + p_m = n \\ p_y \equiv a_y \pmod K}} \prod_{y=1}^{m} \log p_y \leqq \mathsf{N}(n) \log^m n, \tag{5}$$

da die Summe $\mathsf{N}(n)$ Glieder hat, deren jedes $\leqq \log^m n$ ist.

Es sei nun δ mit $0 < \delta < \frac{1}{2}$ beliebig vorgegeben. Dann ist

$$\frac{1}{1-\delta} = 1 + \frac{\delta}{1-\delta} \leqq 1 + 2\delta;$$

$$\left(\frac{1}{1-\delta}\right)^m - 1 \leqq (1 + 2\delta)^m - 1 = 2\delta \sum_{\mu=1}^{m} \binom{m}{\mu} (2\delta)^{\mu-1} \leqq 2\delta \sum_{\mu=1}^{m} \binom{m}{\mu} = C_{15} \cdot \delta \ll \delta. \tag{6}$$

In

$$\mathsf{N}(n) = \sum_{\substack{p_1 + \cdots + p_m = n \\ p_y \equiv a_y \pmod K}} 1$$

ist der Beitrag der Glieder, wo mindestens ein Summand $\leqq n^{1-\delta}$ ist, höchstens der m-fache Beitrag der Glieder mit $p_1 \leqq n^{1-\delta}$, also

$$\leqq m \cdot n^{1-\delta} \cdot n^{m-2} \cdot 1 = m \cdot n^{m-1-\delta},$$

da p_1 nur $n^{1-\delta}$, p_2 bis p_{m-1} nur je n Werte annehmen können, und da p_m (bei festen p_1 bis p_{m-1}) nicht mehr als einen Wert hat. Daher ist

$$\begin{aligned}
\mathsf{N}(n) &\leqq m \cdot n^{m-1-\delta} + \sum_{\substack{p_1+\cdots+p_m=n \\ p_y \equiv a_y \pmod K \\ p_y > n^{1-\delta}}} 1 \\
&\leqq m \cdot n^{m-1-\delta} + \frac{1}{(1-\delta)^m \log^m n} \sum_{\substack{p_1+\cdots+p_m=n \\ p_y \equiv a_y \pmod K \\ p_y > n^{1-\delta}}} \prod_{y=1}^{m} \log p_y \\
&\leqq m \cdot n^{m-1-\delta} + \frac{1}{(1-\delta)^m \log^m n}\, \nu(n).
\end{aligned}$$

Da nun nach § 4, (s), 1.) $S(n) \ll 1$, also nach (3)

$$\frac{1}{n^{m-1}}\, \nu(n) \ll 1; \quad \nu(n) \ll n^{m-1}$$

gilt, so folgt in Verbindung mit (5) und (6):

$$\begin{aligned}
0 \leqq (\log^m n)\, \mathsf{N}(n) - \nu(n) &\leqq (\log^m n)\, m \cdot n^{m-1-\delta} + \left(\left(\frac{1}{1-\delta}\right)^m - 1\right) \nu(n) \\
&\ll n^{m-1-\delta} \log^m n + n^{m-1}\, \delta = n^{m-1}\, (n^{-\delta} \log^m n + \delta).
\end{aligned}$$

Das heißt: Es gibt ein von δ unabhängiges C_{16}, so daß

$$0 \leqq \frac{\log^m n}{n^{m-1}}\, \mathsf{N}(n) - \frac{1}{n^{m-1}}\, \nu(n) \leqq C_{16}(n^{-\delta} \log^m n + \delta).$$

Für $n \geqq n_1(\delta)$ ist daher

$$0 \leqq \frac{\log^m n}{n^{m-1}}\, \mathsf{N}(n) - \frac{1}{n^{m-1}}\, \nu(n) \leqq C_{17} \cdot \delta$$

womit (4) und damit Satz 3 bewiesen ist.

Abschließend sei noch bemerkt, daß Satz 1 bis 3 im Spezialfall $K = 1$ oder 2; $m = 3$ die bekannten Sätze über die Darstellbarkeit großer ungerader Zahlen als Summe von drei (beliebigen) ungeraden Primzahlen liefern.

Literaturverzeichnis.

1. *E. Landau*, Vorlesungen über Zahlentheorie **1** und **3**, Leipzig (1927).
2. *N. G. Čudakov*, On Goldbach-Vinogradov's Theorem, Ann. of math. (2) **48**, 515—542 (1947).
3. *H. Rademacher*, Über eine Erweiterung des Goldbachschen Problems, Math. Zeitschr. **25**, 627—657 (1925).
4. *E. C. Titchmarsh*, The Zeta-Funktion of Riemann, Cambridge tract **26** (1930).
5. *A. Page*, On the number of primes in an arithmetic progression, Proc. London math. soc. (2) **39**, 116—141 (1935).
6. *S. Chowla*, A new proof of a theorem of Siegel, Ann. of math. (2) **51**, 120—122 (1950).
7. *E. Landau*, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen **1**, Leipzig und Berlin (1909).

Eingegangen 25. Februar 1951.

Über Klassen von Mengen natürlicher Zahlen*).

Von *Bodo Volkmann* in Mainz.

Einleitung.

1. Mengen natürlicher Zahlen bilden den Gegenstand einer Reihe von Arbeiten aus der additiven Zahlentheorie, in denen die Lehre von den zahlentheoretischen Dichten entwickelt wird. Solche Untersuchungen — sie sind mit den Namen L. Schnirelmann, E. Landau, I. Schur, A. Chinčin (Khintchine), P. Erdös, A. Brauer, H. Rohrbach, H.-H. Ostmann, H. B. Mann u. a. verbunden — beschäftigen sich hauptsächlich mit der Frage nach unteren Schranken für die Dichte der Summe $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ zweier Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von natürlichen Zahlen. Dabei wird unter $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ nach Schnirelmann die Menge aller positiven Zahlen der Form $a + b$ mit $a \in \{0\} \vee \mathfrak{A}$, $b \in \{0\} \vee \mathfrak{B}$ verstanden, und als Dichte einer Menge $\mathfrak{A}$ bezeichnet man, wenn $A(x)$ die Anzahl der Elemente $a \in \mathfrak{A}$ mit $a \leqq x$ ist, die Zahl

$$(1) \qquad D(\mathfrak{A}) = \underset{x=1,2,\ldots}{\mathrm{fin}} \frac{A(x)}{x} = \text{finite Dichte}$$

oder auch

$$(2) \quad \begin{cases} \underline{D^*}(\mathfrak{A}) = \underline{\lim}_{x\to\infty} \dfrac{A(x)}{x} = \text{untere asymptotische Dichte,} \\ \overline{D^*}(\mathfrak{A}) = \overline{\lim}_{x\to\infty} \dfrac{A(x)}{x} = \text{obere asymptotische Dichte,} \\ D^*(\mathfrak{A}) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{A(x)}{x} = \text{natürliche Dichte (falls der Grenzwert existiert).} \end{cases}$$

2. Unabhängig davon haben Autoren wie z. B. E. Borel, K. Knopp, A. Chinčin, V. Knichal und A. S. Besicovitch Untersuchungen über das asymptotische Verhalten der Ziffernfolge von Dualbrüchen angestellt. Es handelt sich dabei um maßtheoretische Aussagen über die Menge der reellen Zahlen ϱ, etwa mit $0 \leqq \varrho \leqq 1$, in deren dyadischer Entwicklung $\varrho = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i}{2^i}$ ($e_i = 0$ oder 1) die Größe $\frac{1}{x} \sum_{i=1}^{x} e_i$, d. h. der relative Anteil der Einsen an den ersten x Ziffern, beim Grenzübergang $x \to \infty$ ein bestimmtes Verhalten aufweist.

Jeder unendlichen Menge $\mathfrak{A}$ von natürlichen Zahlen kann man durch die Festsetzung

$$(3) \quad \varrho = \Gamma(\mathfrak{A}) = \sum_{a\in\mathfrak{A}} \frac{1}{2^a} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i}{2^i} = 0, e_1 e_2 \ldots e_i \ldots, \quad \text{wo } e_i = \begin{cases} 1, & \text{wenn } i \in \mathfrak{A}, \\ 0, & \text{wenn } i \notin \mathfrak{A}, \end{cases}$$

eine reelle Zahl ϱ mit $0 < \varrho \leqq 1$ zuordnen derart, daß die Menge aller dieser Zahlen ϱ, wenn jede von ihnen durch einen (eindeutig vorhandenen) Dualbruch mit unendlich vielen Einsen in seiner Ziffernfolge dargestellt wird, und die Gesamtheit aller jener Mengen

*) Dissertation bei der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Mainz (D 26). Referent: Prof. Dr. *H. Rohrbach*. — Nummern in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

$\mathfrak{A}$ einander eindeutig entsprechen. Für endliches $\mathfrak{A} = \{a_1, \ldots, a_m\}$ ist somit $\Gamma(\mathfrak{A})$ nicht definiert. Wohl aber ist dann wegen

$$\sum_{a \in \mathfrak{A}} \frac{1}{2^a} = 0, e_1 \ldots e_n = 0, \; e_1 \ldots e_{n-1} 0111 \ldots \qquad (n = a_m, \; e_n = 1),$$

falls $\mathfrak{A}'$ die Vereinigung von $\{a_1, \ldots, a_{m-1}\}$ mit allen auf a_m folgenden ganzen Zahlen bedeutet,

$$(4) \qquad \sum_{a \in \mathfrak{A}} \frac{1}{2^a} = \Gamma(\mathfrak{A}').$$

Durch die Einführung der Größe $\Gamma(\mathfrak{A})$ — wir wollen sie den *Dualwert* von $\mathfrak{A}$ nennen — wird eine Äquivalenz zwischen Aussagen über Mengen natürlicher Zahlen und solchen über Dualbrüche hergestellt. Insbesondere wird nach (3)

$$A(x) = \sum_{i=1}^{x} e_i \; (x = 1, 2, \ldots),$$

so daß durch die Dichten (2) die reellen Funktionen

$$\underline{\Delta^*}(\varrho) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \sum_{i=1}^{x} e_i = \underline{D^*}(\mathfrak{A}),$$

$$\overline{\Delta^*}(\varrho) = \overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{1}{x} \sum_{i=1}^{x} e_i = \overline{D^*}(\mathfrak{A}),$$

$$\Delta^*(\varrho) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \sum_{i=1}^{x} e_i = D^*(\mathfrak{A}) \qquad \text{(im Falle der Existenz)}$$

definiert werden.

3. Unter diesem Gesichtspunkt ergeben sich zwei Arten von Fragestellungen:

1. Es ist eine Menge M von reellen Zahlen ϱ $(0 < \varrho \leqq 1)$ mit einer bestimmten elementaren Eigenschaft gegeben. Gefragt wird nach zahlentheoretischen Eigenschaften der Mengen $\mathfrak{A}$ mit $\Gamma(\mathfrak{A}) \in M$.

2. Es ist eine Klasse N von Mengen natürlicher Zahlen gegeben, die durch eine bestimmte, etwa zahlentheoretische Eigenschaft charakterisiert sind. Gefragt wird nach arithmetischen oder mengentheoretischen Eigenschaften der Menge ${}_rN$ der zugehörigen Dualwerte.

Einige Probleme aus beiden Gruppen werden in der vorliegenden Arbeit behandelt. Als Menge M tritt im ersten Kapitel die Menge der rationalen Zahlen auf (§ 2). Mengen mit rationalen Dualwerten werden *rationale Mengen* genannt, und es wird bei einer Reihe von Operationen, darunter auch die Summation im Schnirelmannschen Sinne, bewiesen, daß sie in der Klasse der rationalen Mengen unbeschränkt ausführbar sind. Weitere Untersuchungen (§ 3) wenden sich einer auch bei R. C. Buck ([4][1]) und [5]) vorkommenden Klasse von Mengen natürlichen Zahlen zu, die in gewisser Weise durch rationale Mengen approximiert werden können. Zu dieser Klasse gehören genau diejenigen Mengen $\mathfrak{A}$ — wir nennen sie *pseudorationale Mengen* — bei denen es zu jedem $\varepsilon > 0$ rationale oder leere Mengen $\mathfrak{R}_\varepsilon$ und $\mathfrak{R}^\varepsilon$ mit

$$\mathfrak{R}_\varepsilon \subseteq \mathfrak{A} \subset \mathfrak{R}^\varepsilon \quad \text{und} \quad D^*(\mathfrak{R}^\varepsilon - \mathfrak{R}_\varepsilon) < \varepsilon$$

gibt. Es wird insbesondere unter einer einfachen Zusatzvoraussetzung bewiesen, daß die durch $\Gamma(\mathfrak{C}) \equiv \Gamma(\mathfrak{A}) + \Gamma(\mathfrak{B}) \pmod 1$ definierte Menge $\mathfrak{C}$ pseudorational ist, wenn dies für $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gilt.

Im zweiten Kapitel werden für einige spezielle Klassen N die zugehörigen Mengen ${}_rN$ maßtheoretisch untersucht. Da diese Mengen vom Lebesgueschen Maß null sind, wird der feiner unterscheidende Hausdorffsche Maßbegriff als das geeignete Hilfsmittel herangezogen.

---

[1]) Die bei uns zur Definition des Dualwertes benutzte Abbildung wird dort als *dyadic mapping* bezeichnet.

Es werden zunächst einige allgemeinere Sätze zur Hausdorffschen Maßtheorie bewiesen (§§ 4 und 5) und durch ihre Anwendung dann die Hausdorffsche Dimension $\dim {}_rN$ bestimmt für u. a. folgende Klassen:

a) Die Klasse $N = [\mathfrak{A}]$ der unendlichen Untermengen einer festen Menge $\mathfrak{A}$ (§ 6).

b) Die Klasse $N = K_i$ $(i \geqq 2)$ derjenigen Mengen $\mathfrak{A}$, welche nicht i aufeinanderfolgende natürliche Zahlen enthalten (§ 7).

c) Die Klasse $N = G_1(\zeta)$ $(0 \leqq \zeta \leqq 1)$ derjenigen Mengen $\mathfrak{A}$, bei denen $D^*(\mathfrak{A})$ existiert und den Wert ζ hat (§ 8).

Diese Untersuchungen, in denen interessante Zusammenhänge zwischen Zahlentheorie und Maßtheorie aufgedeckt werden, führen zu den Resultaten:

a) *Für jede Menge $\mathfrak{A}$ von natürlichen Zahlen gilt*

$$\dim {}_r[\mathfrak{A}] = \underline{D}^*(\mathfrak{A}).$$

b) *Für die Klasse ${}_rK_i$ ist* $\dim {}_rK_i = \dfrac{\log \gamma_i}{\log 2}$ $(i = 2, 3, \ldots)$, *wo γ_i die größte reelle Wurzel der Gleichung* $\xi^i - \sum_{j=0}^{i-1} \xi^j = 0$ *ist. Ferner gilt*

$$\frac{i-1}{i} \leqq \dim {}_rK_i \leqq \frac{\log (2^i - 1)}{\log 2^i}.$$

c) *Ist $R(\zeta)$ die Klasse derjenigen Mengen $\mathfrak{A}$, bei denen die Folge $\dfrac{A(x)}{x}$ einen Häufungspunkt η mit* $\left|\dfrac{1}{2} - \eta\right| \geqq \left|\dfrac{1}{2} - \zeta\right|$ *hat* $(0 \leqq \zeta \leqq 1)$, *so haben für alle Klassen $Q(\zeta)$ mit $G_1(\zeta) \leqq Q(\zeta) \leqq R(\zeta)$ die zugehörigen Mengen ${}_rQ(\zeta)$ dieselbe Hausdorffsche Dimension, und zwar ist* $\dim {}_rQ(\zeta) = d(\zeta)$, *wo*

$$d(\zeta) = \frac{\zeta \log \zeta + (1-\zeta) \log (1-\zeta)}{\log \frac{1}{2}} \; (0 < \zeta < 1), \; d(0) = d(1) = 0.$$

Kap. I. Rationale und pseudorationale Mengen.

§ 1. Vorbemerkungen.

4. *Terminologie.* Im folgenden bezeichnen wir
ganze Zahlen mit kleinen lateinischen Buchstaben,
reelle Zahlen mit kleinen griechischen Buchstaben,
Mengen natürlicher Zahlen mit großen deutschen Buchstaben $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$,
ihre Anzahlfunktionen entsprechend mit $A(x), B(x), C(x), \ldots$,
ihre Komplementärmengen mit $\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}}, \overline{\mathfrak{C}}, \ldots$,
insbesondere die Menge aller natürlichen Zahlen mit $\mathfrak{Z}$,
Mengen reeller Zahlen mit großen lateinischen Buchstaben,
Intervalle $\eta_1 < \varrho < \eta_2$ mit $(\eta_1; \eta_2)$ oder mit kleinen deutschen Buchstaben $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$,
ihre elementargeometrischen Längen entsprechend mit $|\mathfrak{a}|, |\mathfrak{b}|, |\mathfrak{c}|, \ldots$.

Mengen, deren Elemente Mengen natürlicher Zahlen sind, werden *Klassen* genannt und ebenfalls mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet. Für eine Klasse $M = \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots\}$ wird die Menge $\{\Gamma(\mathfrak{A}), \Gamma(\mathfrak{B}), \Gamma(\mathfrak{C}), \ldots\}$ mit ${}_rM$ bezeichnet.

Die Zahlen ϱ, deren dyadische Entwicklung mit den festen Ziffern $0, e_1 \ldots e_n$ beginnt, bilden ein Intervall $\mathfrak{v}$ der Form $\dfrac{k}{2^n} < \varrho \leqq \dfrac{k+1}{2^n}$ (k ganz, $0 \leqq k < 2^n$). Wir sagen

dann, das Intervall $\mathfrak{v}$ *gehört* zu dem Dualbruch $0, e_1 \ldots e_n$ und drücken dies in der Schreibweise $\mathfrak{v} = (0, e_1 \ldots e_n)$ oder auch $0, e_1 \ldots e_n = (\mathfrak{v})$ aus.

Die Operationen *Vereinigung* und *Durchschnitt* von Mengen werden mit $\vee$ und $\wedge$ bezeichnet und damit auch Ausdrücke wie z. B. $\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2 \vee \cdots \vee \mathfrak{A}_n$, $\bigwedge_{i=1}^{\infty} M_i$, $\bigvee_{0 \leq \eta \leq \zeta} G_1(\eta)$ gebildet.

5. *Summen.* Wie in der Einleitung für den Fall $n = 2$ erwähnt, definiert man als Summe $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \cdots + \mathfrak{A}_n$ von $n \geqq 2$ Mengen natürlicher Zahlen die Menge aller positiven Zahlen der Form $\sum_{i=1}^{n} a_i$ mit $a_i \in \{0\} \vee \mathfrak{A}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Daneben verwenden wir auch die Definition

$$\mathfrak{A}_1 \dot{+} \mathfrak{A}_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \mathfrak{A}_n = \text{Menge aller Zahlen der Form } \sum_{i=1}^{n} a_i$$
$$\text{mit } a_i \in \mathfrak{A}_i \qquad (i = 1, \ldots, n);$$

auf diesen Summenbegriff führt z. B. die übliche Restklassenaddition. $\mathfrak{A}_1 + \cdots + \mathfrak{A}_n$ und $\mathfrak{A}_1 \dot{+} \cdots \dot{+} \mathfrak{A}_n$ sind, vom Element Null abgesehen, einander gleich, wenn man $0 \in \mathfrak{A}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ voraussetzt. Andernfalls gilt

Satz 1. *Setzt man* $\mathfrak{A}_{i_1} \dot{+} \cdots \dot{+} \mathfrak{A}_{i_j} = \mathfrak{S}(i_1, \ldots, i_j)$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_j,\ 1 \leqq j \leqq n)$, *so ist* $\mathfrak{A}_1 + \cdots + \mathfrak{A}_n = \vee\, \mathfrak{S}(i_1, \ldots, i_j)$, *wobei die Vereinigung über alle* $2^n - 1$ *Kombinationen* $(i_1, \ldots, i_j)$ *zu erstrecken ist.*

Auf beiden Seiten steht nämlich die Menge derjenigen Zahlen x, für die es eine Darstellung $x = a_{i_1} + \cdots + a_{i_j}$ mit $a_{i_m} \in \mathfrak{A}_{i_m}$ $(m = 1, \ldots, j;\ 1 \leqq j \leqq n;\ i_1 < i_2 < \cdots)$ gibt.

6. *Dichten.* Für die in (2) erklärten Dichten ist offenbar $0 \leqq \underline{D^*}(\mathfrak{A}) \leqq \overline{D^*}(\mathfrak{A}) \leqq 1$. Weiter gilt

Satz 2. *Für irgendein* $\mathfrak{A}$ *sei* $\underline{D^*}(\mathfrak{A}) = \zeta_1$, $\overline{D^*}(\mathfrak{A}) = \zeta_2$ *und* $\zeta_1 < \zeta_2$. *Dann ist jeder Punkt* ζ *mit* $\zeta_1 \leqq \zeta \leqq \zeta_2$ *Häufungspunkt der Folge* $\dfrac{A(x)}{x}$.

Beweis. Für $x \geqq 1$ ist, je nachdem $x + 1$ zu $\mathfrak{A}$ gehört oder nicht,

$$\left| \frac{A(x+1)}{x+1} - \frac{A(x)}{x} \right| = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{A(x)+1}{x+1} - \dfrac{A(x)}{x} = \dfrac{x - A(x)}{x(x+1)} \\ \left| \dfrac{A(x)}{x+1} - \dfrac{A(x)}{x} \right| = \dfrac{A(x)}{x(x+1)} \end{array} \right\} \leqq \frac{1}{x+1}.$$

Wäre der Satz falsch, so gäbe es ein Intervall $(\eta_1; \eta_2) \subseteq (\zeta_1; \zeta_2)$, in dem kein Punkt der Folge $\dfrac{A(x)}{x}$ läge. Für $x \geqq \dfrac{1}{\eta_2 - \eta_1}$ ist aber $\left| \dfrac{A(x+1)}{x+1} - \dfrac{A(x)}{x} \right| < \eta_2 - \eta_1$, und folglich könnte nicht zugleich $\underline{\lim} \dfrac{A(x)}{x} = \zeta_1$ und $\overline{\lim} \dfrac{A(x)}{x} = \zeta_2$ sein.

Für $\mathfrak{A} = \{a_1, a_2, \ldots\}$ setzen wir mit H.-H. Ostmann [10]

$$c \times \mathfrak{A} = \{ca_1, ca_2, \ldots\} \qquad (c \geqq 1, \text{ ganz}).$$

Dann bestehen die Beziehungen:

Satz 3. $c \times \left(\bigvee_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_i \right) = \bigvee_{i=1}^{n} (c \times \mathfrak{A}_i)$.

Beweis. Es genügt der Nachweis für den Fall $n = 2$.

a) Sei $x \in c \times (\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2)$. Dann ist $\dfrac{x}{c}$ ganz und $\dfrac{x}{c} \in \mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2$, etwa $\dfrac{x}{c} \in \mathfrak{A}_1$. Folglich ist $x \in c \times \mathfrak{A}_1$ und somit $x \in (c \times \mathfrak{A}_1) \vee (c \times \mathfrak{A}_2)$.

b) Sei $x \in (c \times \mathfrak{A}_1) \vee (c \times \mathfrak{A}_2)$, etwa $x \in c \times \mathfrak{A}_1$. Wegen $c \times \mathfrak{A}_1 \subset c \times (\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2)$ ist dann $x \in c \times (\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2)$.

Satz 4. $c \times \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_i\right) = \bigwedge_{i=1}^{n} (c \times \mathfrak{A}_i)$.

Beweis analog.

Satz 5. $\underline{D^*}(c \times \mathfrak{A}) = \frac{1}{c}\,\underline{D^*}(\mathfrak{A})$; $\overline{D^*}(c \times \mathfrak{A}) = \frac{1}{c}\,\overline{D^*}(\mathfrak{A})$.

Beweis. Sei $\mathfrak{A} = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Dann liegen die relativen Minima der Funktion $\frac{A(x)}{x}$ bei $x = a_i - 1$ $(i = 1, 2, \ldots)$, die relativen Maxima bei $x = a_i$. Entsprechend liegen für die Menge $c \times \mathfrak{A}$ die relativen Minima und Maxima von $\frac{(c \times A)(x)}{x}$ bei $x = ca_i - 1$ bzw. bei $x = ca_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Daher wird

$$\underline{D^*}(c \times \mathfrak{A}) = \varliminf_{i \to \infty} \frac{(c \times A)(ca_i - 1)}{ca_i - 1} = \varliminf_{i \to \infty} \frac{A(a_i - 1)}{ca_i - 1} = \frac{1}{c} \varliminf_{i \to \infty} \frac{A(a_i - 1)}{a_i - 1} = \frac{1}{c}\,\underline{D^*}(\mathfrak{A}),$$

$$\overline{D^*}(c \times \mathfrak{A}) = \varlimsup_{i \to \infty} \frac{(c \times A)(ca_i)}{ca_i} = \varlimsup_{i \to \infty} \frac{A(a_i)}{ca_i} = \frac{1}{c}\,\overline{D^*}(\mathfrak{A}).$$

7. *Ketten.* Unter einer *k-gliedrigen Kette* $[x, x + k - 1]$ versteht man[2]) eine Menge von k aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen $x, x + 1, \ldots, x + k - 1$. Läßt man als Länge einer Kette auch $k = 1$ und $k = \infty$ zu, so ist jede Menge $\mathfrak{A}$ als Vereinigung von eindeutig bestimmten Ketten darstellbar, die paarweise voneinander durch mindestens eine Zahl $x \notin \mathfrak{A}$ getrennt sind. Wir nennen diese Ketten *die Ketten von* $\mathfrak{A}$ und bezeichnen mit $\mathfrak{K}_{\mathfrak{A}}$ bzw. $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}}$ die Menge der kleinsten bzw. die Menge der größten Elemente (soweit vorhanden) der Ketten von $\mathfrak{A}$. Genau dann sind $\mathfrak{K}_{\mathfrak{A}}$ und $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}}$ höchstens endliche Mengen[3]), wenn $\mathfrak{A}$ höchstens endlich ist oder fast alle (d. h. alle bis auf endlich viele) natürlichen Zahlen enthält und folglich $\Gamma(\mathfrak{A})$ von der Form $0, e_1 \ldots e_2 1$, d. h. dyadisch rational ist. Setzt man für $\mathfrak{A} = \{a_1, a_2, \ldots\}$

$$\mathfrak{A}^{(s)} = \{a_1 + s,\ a_2 + s, \ldots\} \wedge \mathfrak{Z} \quad (s \gtreqless 0),$$

so gilt

Satz 6. $\mathfrak{K}_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{A}^{(1)}$; $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A} \wedge \overline{\mathfrak{A}^{(-1)}}$.

Denn definitionsgemäß enthält $\mathfrak{K}_{\mathfrak{A}}$ bzw. $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}}$ genau diejenigen x, für die zugleich $x \in \mathfrak{A}$ und $x - 1 \notin \mathfrak{A}$ bzw. $x \in \mathfrak{A}$ und $x + 1 \notin \mathfrak{A}$ ist.

§ 2. Rationale Mengen.

8. Eine Menge $\mathfrak{R}$ heißt *rational*, wenn ihr Dualwert $\Gamma(\mathfrak{R})$ rational ist. Bekanntlich läßt sich jede rationale Zahl $\frac{a}{b}$ $(0 < a \leqq b)$ in einen periodischen g-adischen Systembruch $(g \geqq 2)$, insbesondere in einem periodischen Dualbruch der Form[4])

$$\frac{a}{b} = 0, e_1 \ldots e_v \overline{f_1 \ldots f_w} \qquad (v \geqq 0,\ w \geqq 1) \tag{5}$$

entwickeln. Sind v und w die kleinsten Zahlen, mit denen bei festem $\frac{a}{b}$ die Entwicklung (5) möglich ist, so darf offenbar v durch jede größere Zahl und w durch jedes Vielfache ersetzt werden. Ferner ist der Periodizität von (5) auf Grund von (3) zu entnehmen, daß eine Menge $\mathfrak{R}$ genau dann rational ist, wenn sie sich bis auf Abweichungen an endlich vielen Stellen als Vereinigung endlich vieler arithmetischer Progressionen darstellen läßt[5]).

---

[2]) *Ostmann* [11].

[3]) Eine Menge ist höchstens endlich, wenn sie leer ist oder endlich viele Elemente hat.

[4]) In der im Dezimalsystem üblichen Schreibweise, z. B. $\frac{1}{6} = 0{,}16$.

[5]) Diese Eigenschaft wird bei *Buck* [4] zur Definition der hier rational genannten Mengen verwendet.

Ist $\Gamma(\mathfrak{R})$ reinperiodisch, d. h. von der Form $0,\overline{f_1 \dots f_w}$, so nennen wir $\mathfrak{R}$ *reinperiodisch.*

Satz 7. *Ist $\mathfrak{R}$ rational, so gibt es eine Darstellung $\mathfrak{R} = \mathfrak{B} \vee \mathfrak{P}^{(s)}$, wo $\mathfrak{B}$ höchstens endlich, $\mathfrak{P}$ reinperiodisch und $s \geqq 0$ ist.*

Beweis. Sei $\Gamma(\mathfrak{R}) = 0, e_1 \dots e_v \overline{f_1 \dots f_w}$. Ist dann $\mathfrak{B} = \mathfrak{R} \wedge [1, v]$ und $\mathfrak{P}$ die durch $\Gamma(\mathfrak{P}) = 0, \overline{f_1 \dots f_w}$ definierte *Menge*, so wird $\mathfrak{R} = \mathfrak{B} \vee \mathfrak{P}^{(v)}$.

Satz 8. *Ist $\mathfrak{R}$ rational, etwa $\Gamma(\mathfrak{R}) = 0, e_1 \dots e_v \overline{f_1 \dots f_w}$, so ist die natürliche Dichte von $\mathfrak{R}$ vorhanden und hat den Wert $D^*(\mathfrak{R}) = \frac{1}{w} \sum_{i=1}^{w} f_i$.*

Beweis. Setzt man $\sum_{m=1}^{v} e_m = t$, $\sum_{i=1}^{w} f_i = u$, so ist $R(v + nw) = t + nu$ $(n = 0, 1, \dots)$ und daher für irgendein x mit $v + nw \leqq x < v + (n+1)w$ offenbar

$$t + nu \leqq R(x) < t + (n+1)u,$$

also

$$\frac{t + nu}{v + (n+1)w} \leqq \frac{R(x)}{x} < \frac{t + (n+1)u}{v + nw} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Daraus folgt die Behauptung, da beide Seiten für $n \to \infty$ gegen $\frac{u}{w} = \frac{1}{w} \sum_{i=1}^{w} f_i$ konvergieren.

9. Bekanntlich[6]) bildet ein System S von Mengen eine Boolesche Algebra, wenn die Komplementärmenge jeder Menge aus S sowie Durchschnitt und Vereinigung irgend zweier Mengen aus S in S enthalten sind. Für die Klasse der rationalen Mengen ist dies nicht der Fall, da der Durchschnitt zweier rationaler Mengen endlich oder leer sein kann und für solche Mengen kein Dualwert definiert ist. Jedoch gilt

Satz 9. *Die Klasse D_0 der rationalen einschließlich der höchstens endlichen Mengen ist eine Boolesche Algebra.*

Beweis. Seien $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}' \in D_0$. Dann ist a) $\overline{\mathfrak{R}} \in D_0$, b) $\mathfrak{R} \vee \mathfrak{R}' \in D_0$, $\mathfrak{R} \wedge \mathfrak{R}' \in D_0$ zu zeigen.

a) Ist $\mathfrak{R}$ rational, so ist entweder $\overline{\mathfrak{R}}$ eine höchstens endliche Menge, also $\overline{\mathfrak{R}} \in D_0$, oder es existiert $\Gamma(\overline{\mathfrak{R}})$ mit dem Wert $1 - \Gamma(\mathfrak{R})$. Dann ist $\overline{\mathfrak{R}}$ rational. Ist $\mathfrak{R}$ höchstens endlich, so existiert $\Gamma(\overline{\mathfrak{R}})$ mit dyadisch rationalem Wert. Also ist stets $\overline{\mathfrak{R}} \in D_0$.

b) Ist eine der beiden Mengen höchstens endlich, so gilt die Behauptung evidenterweise. Andernfalls sei etwa $\Gamma(\mathfrak{R}) = 0, e_1 \dots e_v \overline{f_1 \dots f_w}$, $\Gamma(\mathfrak{R}') = 0, e'_1 \dots e'_{v'} \overline{f'_1 \dots f'_{w'}}$. Dann sind $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ bis auf endlich viele Abweichungen Vereinigungen von gewissen Restklassen (mod $\{q, q'\}$) (kleinstes gem. Vielf.). Also sind auch $\mathfrak{R} \vee \mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{R} \wedge \mathfrak{R}'$ bis auf endlich viele Abweichungen Vereinigungen einer bestimmten (im Falle $\mathfrak{R} \wedge \mathfrak{R}'$ möglicherweise verschwindenden) Anzahl von Restklassen (mod $\{q, q'\}$), d. h. es ist $\mathfrak{R} \vee \mathfrak{R}' \in D_0$, $\mathfrak{R} \wedge \mathfrak{R}' \in D_0$.

Setzt man $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ als reinperiodisch voraus, so sind $\overline{\mathfrak{R}}, \mathfrak{R} \vee \mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R} \wedge \mathfrak{R}'$ reinperiodische oder leere Mengen. Daher gilt

Satz 10. *Die Klasse P der reinperiodischen Mengen einschließlich der leeren Menge ist eine Boolesche Algebra.*

Satz 11. *Ist $\mathfrak{R}$ rational, so ist $\mathfrak{R}^{(s)}$ rational $(s \gtreqless 0)$.*

Beweis. Für jede Menge $\mathfrak{R}$ ist

$$\Gamma(\mathfrak{R}^{(s)}) = \sum_{\substack{r \in \mathfrak{R} \\ r+s>0}} \frac{1}{2^{r+s}} = \frac{1}{2^s} \sum_{\substack{r \in \mathfrak{R} \\ r+s>0}} \frac{1}{2^r} = \frac{1}{2^s} \Gamma(\mathfrak{R}) - \left[\frac{1}{2^s} \Gamma(\mathfrak{R})\right],$$

und danach ist bei rationalem $\Gamma(\mathfrak{R})$ auch $\Gamma(\mathfrak{R}^{(s)})$ rational.

---

[6]) Siehe etwa [2].

Satz 12. *Ist $\mathfrak{R}$ rational (reinperiodisch), so ist $c \times \mathfrak{R}$ rational (reinperiodisch).*

Beweis. a) Ist $\mathfrak{R}$ reinperiodisch, also etwa $\Gamma(\mathfrak{R}) = 0, \overline{f_1 \ldots f_w}$, so gibt es eine Darstellung $\mathfrak{R} = \bigvee_{i=1}^{n} \mathfrak{R}_i$ $(1 \leqq n \leqq w)$, wo die $\mathfrak{R}_i$ Restklassen (mod w) sind. Nach Satz 3 ist dann $c \times \mathfrak{R} = \bigvee_{i=1}^{n} c \times \mathfrak{R}_i$, und die $c \times \mathfrak{R}_i$ sind Restklassen (mod cw). Daher ist $c \times \mathfrak{R}$ reinperiodisch. b) Ist $\mathfrak{R}$ rational und $\mathfrak{R} = \mathfrak{B} \vee \mathfrak{P}^{(v)}$ eine Darstellung gemäß Satz 7, so folgt die Behauptung aus $c \times \mathfrak{R} = (c \times \mathfrak{B}) \vee (c \times \mathfrak{P}^{(v)})$; denn wie man leicht bestätigt, ist $c \times \mathfrak{P}^{(v)} = (c \times \mathfrak{P})^{(cv)}$, und diese Menge ist nach Satz 11 in Verbindung mit Teil a) rational.

10. Die rationalen Mengen zeigen besonders einfache Eigenschaften hinsichtlich der Summation.

Satz 13. *Ist $\mathfrak{P}$ reinperiodisch, so ist $\mathfrak{P}^{(v)} \dot{+} \mathfrak{A}$ rational für jedes $\mathfrak{A}$ bei beliebigem v.*

Beweis. Es darf $v \geqq 0$ angenommen werden, da andernfalls $\mathfrak{P}^{(v)}$ reinperiodisch ist, also die Behauptung durch den Fall $v = 0$ mitbewiesen wird. Sei etwa $\mathfrak{P} = \bigvee_{i=1}^{n} \mathfrak{P}_i$ $(1 \leqq n \leqq w)$, wo die $\mathfrak{P}_i$ Restklassen (mod w) sind. Dann ist $\mathfrak{P}^{(v)} = \bigvee_{i=1}^{n} \mathfrak{P}_i^{(v)}$. Die Elemente von $\mathfrak{A}$ mögen (mod w) den Restklassen $\mathfrak{P}_j'$ $(j = 1, \ldots, m;\ m \leqq w)$ angehören; $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(m)}$ seien die entsprechenden kleinsten Vertreter aus $\mathfrak{A}$. Dann ist jedes x mit $x \in \mathfrak{P}^{(v)} \dot{+} \mathfrak{A}$ offenbar in einer der Restklassen $\mathfrak{P}_i^{(v)} \dot{+} \mathfrak{P}_j'$ $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m)$ enthalten. Andererseits folgt aus $x \in \mathfrak{P}_i^{(v)} \dot{+} \mathfrak{P}_j'$, wenn $x \geqq k = v + \max(a^{(1)}, \ldots, a^{(m)})$ ist, auch $x - a^{(j)} \in \mathfrak{P}_i^{(v)} \subset \mathfrak{P}^{(v)}$, also $x \in \mathfrak{P}^{(v)} \dot{+} \mathfrak{A}$, und somit ist

$$(\mathfrak{P}^{(v)} \dot{+} \mathfrak{A}) \wedge [k, \infty] = \bigvee_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m} (\mathfrak{P}_i^{(v)} \dot{+} \mathfrak{P}_j') \wedge [k, \infty],$$

also $\mathfrak{P}^{(v)} \dot{+} \mathfrak{A}$ nach Satz 9 rational.

Satz 14. *Für irgendwelche Mengen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ $(n \geqq 2)$ ist $\mathfrak{A}_1 + \cdots + \mathfrak{A}_n$ rational, wenn $\mathfrak{A}_1$ reinperiodisch und in dem Dualwert $\Gamma(\mathfrak{A}_1) = 0, \overline{f_1 \ldots f_w}$ noch $f_w = 1$ ist.*

Beweis. Es genügt der Nachweis für den Fall $n = 2$. In der Bezeichnungsweise von Satz 13 $(\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A})$ ist jedes $x \geqq k$ mit $x \in \mathfrak{A}_2$ in einer der Restklassen $\mathfrak{P}_j'$ enthalten und damit $x - a^{(j)} \equiv 0$ (mod w), also (wegen $f_w = 1$) $x - a^{(j)} \in \mathfrak{A}_1$, d. h. $x \in \mathfrak{A}_1 \dot{+} \mathfrak{A}_2$, folglich

$$\mathfrak{A}_2 \wedge [k, \infty] \subseteq (\mathfrak{A}_1 \dot{+} \mathfrak{A}_2) \wedge [k, \infty]. \tag{6}$$

Nach Satz 1 ist aber $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_1 \vee (\mathfrak{A}_1 \dot{+} \mathfrak{A}_2) \vee \mathfrak{A}_2$ und daher wegen (6)

$$(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2) \wedge [k, \infty] = (\mathfrak{A}_1 \vee (\mathfrak{A}_1 \dot{+} \mathfrak{A}_2)) \wedge [k, \infty].$$

Daraus folgt die Behauptung nach Satz 9 und Satz 13.

Ohne die Voraussetzung $f_w = 1$ wird der Satz falsch, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$\mathfrak{A}_1 = \{1, 4, 7, \ldots\}, \quad \text{also} \quad \Gamma(\mathfrak{A}_1) = 0,\overline{100}, \quad \mathfrak{A}_2 = \{3 \cdot 1^2, 3 \cdot 2^2, 3 \cdot 3^2, \ldots\}.$$

Sind $\mathfrak{R}_i$ die Restklassen $r \equiv i$ (mod 3) $(i = 1, 2, 3)$, so ist wegen $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{R}_3$ offenbar $\mathfrak{A}_1 \dot{+} \mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{R}_1$, so daß aus $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_1 \vee (\mathfrak{A}_1 \dot{+} \mathfrak{A}_2) \vee \mathfrak{A}_2$ folgt: $(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2) \wedge \mathfrak{R}_3 = \mathfrak{A}_2$. Wäre $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$ rational, so müßte deshalb nach Satz 9 auch $\mathfrak{A}_2$ rational sein, und das ist nach Wahl von $\mathfrak{A}_2$ nicht der Fall.

Satz 15. *Die Summen $\mathfrak{R}_1 \dot{+} \cdots \dot{+} \mathfrak{R}_n$ und $\mathfrak{R}_1 + \cdots + \mathfrak{R}_n$ $(n \geqq 2)$ sind rational, wenn die $\mathfrak{R}_i$ rational sind.*

Beweis. Auf Grund von Satz 1 und Satz 9 genügt es, die Behauptung für die Summe $\mathfrak{R}_1 \dot{+} \cdots \dot{+} \mathfrak{R}_n$ zu beweisen; ferner kann man sich auf den Fall $n = 2$ beschränken. Ist $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{B} \vee \mathfrak{P}^{(v)}$ eine Darstellung gemäß Satz 7 und etwa $\mathfrak{B} = \{b_1, \ldots, b_k\}$, so wird

$$\mathfrak{R}_1 \dot{+} \mathfrak{R}_2 = (\mathfrak{B} \dot{+} \mathfrak{R}_2) \vee (\mathfrak{P}^{(v)} \dot{+} \mathfrak{R}_2) = \left(\bigvee_{i=1}^{k} \mathfrak{R}_2^{(b_i)}\right) \vee (\mathfrak{P}^{(v)} \dot{+} \mathfrak{R}_2),$$

und hierin ist $\bigvee_{i=1}^{k} \mathfrak{R}_2^{(b_i)}$ nach Satz 11 und Satz 9, $\mathfrak{P}^{(v)} \dot{+} \mathfrak{R}_2$ nach Satz 13 rational.

11. Zu den rationalen Mengen gehören auch diejenigen, zu denen es Relativnullen gibt. Als Relativnull der Menge $\mathfrak{M}$ bezeichnen wir mit Ostmann [10] eine unendliche Menge $\mathfrak{R}$, für die $\mathfrak{M} + \mathfrak{R} = \mathfrak{M}$ ist. In Satz 15 der genannten Arbeit wird ein Kriterium dafür angegeben, wann eine Menge $\mathfrak{M}$ Relativnullen besitzt. Ein einfacheres Kriterium für diesen Sachverhalt liefert

Satz 16. *Dann und nur dann besitzt $\mathfrak{M}$ Relativnullen, wenn sich ihr Dualwert in der Form $\Gamma(\mathfrak{M}) = 0, e_1 \ldots e_v \overline{e_{v+1} \ldots e_{v+w}}$ $(v \geqq 0,\ w \geqq 1)$ schreiben läßt mit*

$$(7) \qquad e_{i+w} \geqq e_i \ (i = 1, \ldots, v), \quad w|v \text{ und } e_{v+w} = 1.$$

Beweis. a) $\mathfrak{M}$ erfülle die genannten Bedingungen. Dann werde $\mathfrak{R}$ durch $\Gamma(\mathfrak{R}) = 0, \underbrace{0 \ldots 0}_{v}\ \overline{\underbrace{0 \ldots 0}_{w-1}1}$ definiert (also $\mathfrak{R} = \{v + w, v + 2w, \ldots\}$). Ist dann $r \in \mathfrak{R}$ und $m \in \mathfrak{M}$, so ist $r \equiv 0 \pmod{w}$ wegen (7), also $r + m \equiv m \pmod{w}$, folglich $r + m = m + dw$ $(d > 0)$, und somit ergibt sich wegen $e_m = 1$ im Falle $m \leqq v$ durch d-malige Anwendung von $(7)_1$ und sonst wegen der Periodizität von $\Gamma(\mathfrak{M})$ die Gleichung $e_{m+r} = 1$, d. h. $m + r \in \mathfrak{M}$. Daher ist $\mathfrak{M} + \mathfrak{R} \subset \mathfrak{M}$, woraus $\mathfrak{M} + \mathfrak{R} = \mathfrak{M}$ folgt, da trivialerweise $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M} + \mathfrak{R}$ ist. b) $\mathfrak{M}$ besitze eine Relativnull $\mathfrak{R}$, und es sei $\Gamma(\mathfrak{M}) = 0, e_1 e_2 \ldots e_i \ldots$. Dann ist für jedes Element $m \in \mathfrak{M}$ auch $m + r_1 \in \mathfrak{M}$ und folglich

$$(8) \qquad e_{i+r_1} \geqq e_i \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

wenn mit r_1 das kleinste Element von $\mathfrak{R}$ bezeichnet wird. Setzt man daher

$$\sum_{i=(l-1)r_1+1}^{lr_1} e_i = u_l \qquad (l = 1, 2, \ldots),$$

so ist $u_{l+1} \geqq u_e$ $(l = 1, 2, \ldots)$. Da andererseits $0 \leqq u_l \leqq r_1$ $(l = 1, 2, \ldots)$ ist, gibt es ein s, so daß $u_l = u_s$. Dann ist $e_{i+r_1} = e_i$ $(i \geqq sr_1)$ nach (8) und somit $\Gamma(\mathfrak{M})$ von der Form $\Gamma(\mathfrak{M}) = 0, e_1 \ldots e_{sr_1} \overline{f_1 \ldots f_{r_1}}$. Damit erfüllt $\mathfrak{M}$ alle gestellten Bedingungen, da $\mathfrak{M}$ wegen (8) alle Vielfachen von r_1 enthält, folglich $f_{r_1} = 1$ ist.

§ 3. Pseudorationale Mengen.

12. Eine unendliche Menge $\mathfrak{Q}$ heißt *pseudorational*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ rationale oder leere Mengen $\mathfrak{R}_\varepsilon$ und $\mathfrak{R}^\varepsilon$ gibt, so daß

$$(9) \qquad \mathfrak{R}_\varepsilon \subseteq \mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{R}^\varepsilon$$

und

$$(10) \qquad D^*(\mathfrak{R}^\varepsilon - \mathfrak{R}_\varepsilon) < \varepsilon$$

ist [7]). Wie Buck [4] gezeigt hat, gibt es zu jedem ζ mit $0 \leqq \zeta \leqq 1$ pseudorationale Mengen $\mathfrak{Q}$ mit $D^*(\mathfrak{Q}) = \zeta$; als Beispiele für $\zeta = 0$ gibt er insbesondere die Menge der Primzahlen und die Menge der Quadratzahlen an. Somit gibt es kontinuierlich viele pseudorationale Mengen; doch hat, wie später (§ 7) beweisen wird, die Menge der zugehörigen Dualwerte das Lebesguesche Maß null.

Rationale Mengen $\mathfrak{Q}$ sind ebenfalls pseudorational, denn für jedes $\varepsilon > 0$ kann man $\mathfrak{R}_\varepsilon = \mathfrak{Q} = \mathfrak{R}^\varepsilon$ setzen. Zwischen beiden Klassen von Mengen besteht eine so enge Verwandtschaft, daß die meisten Aussagen über jene sich durch Grenzübergänge auf diese übertragen lassen.

Satz 17. *Für pseudorationales $\mathfrak{Q}$ existiert die natürliche Dichte $D^*(\mathfrak{Q})$.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Sind dann $\mathfrak{R}_\varepsilon$ und $\mathfrak{R}^\varepsilon$ die rationalen oder leeren Mengen gemäß (9) und (10), so ist $D^*(\mathfrak{R}_\varepsilon) \leqq \underline{D^*}(\mathfrak{Q}) \leqq \overline{D^*}(\mathfrak{Q}) \leqq D^*(\mathfrak{R}^\varepsilon)$. Daraus folgt $\underline{D^*}(\mathfrak{Q}) = \overline{D^*}(\mathfrak{Q})$, weil nach (10)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} D^*(\mathfrak{R}^\varepsilon) - \lim_{\varepsilon \to 0} D^*(\mathfrak{R}_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} D^*(\mathfrak{R}^\varepsilon - \mathfrak{R}_\varepsilon) = 0.$$

[7]) Die leere Menge ist also auch pseudorational, nicht aber eine endliche Menge.

Satz 18. *Dann und nur dann ist $\mathfrak{Q}$ pseudorational, wenn es Folgen $\mathfrak{R}_i$ und $\tilde{\mathfrak{R}}_i$ von rationalen oder leeren Mengen gibt, so daß*

$$\mathfrak{R}_i \leq \mathfrak{R}_{i+1} \leq \mathfrak{Q} \leq \tilde{\mathfrak{R}}_{i+1} \leq \tilde{\mathfrak{R}}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{11}$$

und

$$\lim_{i\to\infty} D^*(\mathfrak{R}_i) = D^*(\mathfrak{Q}) = \lim_{i\to\infty} D^*(\tilde{\mathfrak{R}}_i). \tag{12}$$

Bemerkung. (12) folgt nicht aus (11), denn setzt man beispielsweise

$$\mathfrak{R}_i = \mathfrak{R} \vee \{1, 2, \ldots, i\},$$

wo $\mathfrak{R}$ eine feste rationale Menge mit $D^*(\mathfrak{R}) < 1$ ist, so ist $\mathfrak{R}_i \leq \mathfrak{R}_{i+1}$, und da $D^*(\mathfrak{R}_i) = D^*(\mathfrak{R})$ für jedes i, wird $\lim\limits_{i\to\infty} D^*(\mathfrak{R}_i) = D^*(\mathfrak{R})$, während $\bigvee\limits_{i=1}^{\infty} \mathfrak{R}_i = \mathfrak{Z}$, also $D^*(\mathfrak{Q}) = D^*(\mathfrak{Z}) = 1$ ist.

Beweis. a) $\mathfrak{Q}$ sei pseudorational. Zu einer gegebenen Nullfolge $\varepsilon_n > 0$ gibt es Folgen $\mathfrak{R}_{\varepsilon_n}$ und $\mathfrak{R}^{\varepsilon_n}$ mit (9) und (10). Setzt man $\mathfrak{R}_i = \bigvee\limits_{n=1}^{i} \mathfrak{R}_{\varepsilon_n}$, $\tilde{\mathfrak{R}}_i = \bigwedge\limits_{n=1}^{i} \mathfrak{R}^{\varepsilon_n}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, so sind $\mathfrak{R}_i$ und $\tilde{\mathfrak{R}}_i$ nach Satz 9 rational, falls $\mathfrak{Q}$ nicht leer ist. Ferner gilt (11) und infolgedessen wegen

$$D^*(\tilde{\mathfrak{R}}_i - \mathfrak{R}_i) = D^*\left(\bigwedge_{n=1}^{i} \mathfrak{R}^{\varepsilon_n}\right) - D^*\left(\bigvee_{n=1}^{i} \mathfrak{R}_{\varepsilon_n}\right) \leqq D^*(\mathfrak{R}^{\varepsilon_i}) - D^*(\mathfrak{R}_{\varepsilon_i}) < \varepsilon_i \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

auch (12). Falls $\mathfrak{Q}$ leer ist, ist nichts zu beweisen.

b) Es gebe Mengenfolgen $\mathfrak{R}_i$ und $\tilde{\mathfrak{R}}_i$, so daß (11) und (12) gelten. Dann gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein i_0, sodaß $D^*(\mathfrak{Q}) - D^*(\mathfrak{R}_{i_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$ und $D^*(\tilde{\mathfrak{R}}_{i_0}) - D^*(\mathfrak{Q}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Da ohnehin $\mathfrak{R}_{i_0} \leq \mathfrak{Q} \leq \tilde{\mathfrak{R}}_{i_0}$, ist somit

$$D^*(\tilde{\mathfrak{R}}_{i_0} - \mathfrak{R}_{i_0}) = D^*(\tilde{\mathfrak{R}}_{i_0}) - D^*(\mathfrak{Q}) + D^*(\mathfrak{Q}) - D^*(\mathfrak{R}_{i_0}) < \varepsilon,$$

also $\mathfrak{Q}$ pseudorational.

13. Wie die Klasse der rationalen ist auch die der pseudorationalen Mengen abgeschlossen gegenüber der Bildung von Komplement, Durchschnitt und Vereinigung.

Satz 19. *Die Klasse D_0^* der pseudorationalen einschließlich der endlichen Mengen ist eine Boolesche Algebra.*

Beweis. Es ist zu zeigen, daß a) $\overline{\mathfrak{Q}} \in D_0^*$, b) $\mathfrak{Q} \vee \mathfrak{Q}' \in D_0^*$, c) $\mathfrak{Q} \wedge \mathfrak{Q}' \in D_0^*$, wenn $\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}' \in D_0^*$. Ist $\mathfrak{Q}$ oder $\mathfrak{Q}'$ höchstens endlich, so sind diese Aussagen trivial. Andernfalls seien $\mathfrak{R}_\varepsilon$, $\mathfrak{R}^\varepsilon$, $\mathfrak{R}'_\varepsilon$ und $\mathfrak{R}'^\varepsilon$ rationale oder leere Mengen mit $\mathfrak{R}_\varepsilon < \mathfrak{Q} < \mathfrak{R}^\varepsilon$, $\mathfrak{R}'_\varepsilon < \mathfrak{Q}' < \mathfrak{R}'^\varepsilon$, $D^*(\mathfrak{R}^\varepsilon - \mathfrak{R}_\varepsilon) < \varepsilon$ und $D^*(\mathfrak{R}'^\varepsilon - \mathfrak{R}'_\varepsilon) < \varepsilon$.

a) Da offenbar $\overline{\mathfrak{R}}^\varepsilon < \overline{\mathfrak{Q}} < \overline{\mathfrak{R}}_\varepsilon$ $(\overline{\mathfrak{R}}^\varepsilon, \overline{\mathfrak{R}}_\varepsilon \in D_0)$, folgt $\overline{\mathfrak{Q}} \in D_0^*$, da außerdem

$$D^*(\overline{\mathfrak{R}}_\varepsilon - \overline{\mathfrak{R}}^\varepsilon) = D^*(\mathfrak{R}^\varepsilon - \mathfrak{R}_\varepsilon) < \varepsilon \quad \text{ist}.$$

b) Setzt man $\mathfrak{R}_\varepsilon \vee \mathfrak{R}'_\varepsilon = \mathfrak{T}_\varepsilon$, $\mathfrak{R}^\varepsilon \vee \mathfrak{R}'^\varepsilon = \mathfrak{T}^\varepsilon$, so ist, wie aus Satz 9 folgt, $\mathfrak{T}_\varepsilon \in D_0$, $\mathfrak{T}^\varepsilon \in D_0$ und $\mathfrak{T}_\varepsilon \leq \mathfrak{Q} \vee \mathfrak{Q}' \leq \mathfrak{T}^\varepsilon$. Da ferner nach elementaren Sätzen

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}^\varepsilon - \mathfrak{T}_\varepsilon &= (\mathfrak{R}^\varepsilon \vee \mathfrak{R}'^\varepsilon) \wedge (\overline{\mathfrak{R}_\varepsilon \vee \mathfrak{R}'_\varepsilon}) = (\mathfrak{R}^\varepsilon \vee \mathfrak{R}'^\varepsilon) \wedge (\overline{\mathfrak{R}}_\varepsilon \wedge \overline{\mathfrak{R}}'_\varepsilon) \\ &= (\mathfrak{R}^\varepsilon \wedge (\overline{\mathfrak{R}}_\varepsilon \wedge \overline{\mathfrak{R}}_{\varepsilon'})) \vee (\mathfrak{R}'^\varepsilon \wedge (\overline{\mathfrak{R}}_\varepsilon \wedge \overline{\mathfrak{R}}'_\varepsilon)) < (\mathfrak{R}^\varepsilon \wedge \overline{\mathfrak{R}}_\varepsilon) \vee (\mathfrak{R}'^\varepsilon \wedge \overline{\mathfrak{R}}'_\varepsilon) = (\mathfrak{R}^\varepsilon - \mathfrak{R}_\varepsilon) \vee (\mathfrak{R}'^\varepsilon - \mathfrak{R}'_\varepsilon)\end{aligned}$$

und folglich

$$D^*(\mathfrak{T}^\varepsilon - \mathfrak{T}_\varepsilon) \leqq D^*((\mathfrak{R}^\varepsilon - \mathfrak{R}_\varepsilon) \vee (\mathfrak{R}'^\varepsilon - \mathfrak{R}'_\varepsilon)) \leqq D^*(\mathfrak{R}^\varepsilon - \mathfrak{R}_\varepsilon) + D^*(\mathfrak{R}'^\varepsilon - \mathfrak{R}'_\varepsilon) < 2\varepsilon$$

gilt, sind damit (9) und (10) für $\mathfrak{Q} \vee \mathfrak{Q}'$ nachgewiesen.

c) Setzt man $\mathfrak{R}_\varepsilon \wedge \mathfrak{R}'_\varepsilon = \mathfrak{S}_\varepsilon$, $\mathfrak{R}^\varepsilon \wedge \mathfrak{R}'^\varepsilon = \mathfrak{S}^\varepsilon$, so ist $\mathfrak{S}_\varepsilon \in D_0$, $\mathfrak{S}^\varepsilon \in D_0$ und $\mathfrak{S}_\varepsilon < \mathfrak{Q} \wedge \mathfrak{Q}' < \mathfrak{S}^\varepsilon$. Da ferner nach elementaren Sätzen

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}^\varepsilon - \mathfrak{S}_\varepsilon &= (\mathfrak{R}^\varepsilon \wedge \mathfrak{R}'^\varepsilon) \wedge (\overline{\mathfrak{R}_\varepsilon \wedge \mathfrak{R}'_\varepsilon}) = (\mathfrak{R}^\varepsilon \wedge \mathfrak{R}'^\varepsilon) \wedge (\overline{\mathfrak{R}}_\varepsilon \vee \overline{\mathfrak{R}}'_\varepsilon) \\ &= ((\mathfrak{R}^\varepsilon \wedge \mathfrak{R}'^\varepsilon) \wedge \overline{\mathfrak{R}}_\varepsilon) \vee ((\mathfrak{R}^\varepsilon \wedge \mathfrak{R}'^\varepsilon) \wedge \mathfrak{R}'_\varepsilon) < (\mathfrak{R}^\varepsilon \wedge \overline{\mathfrak{R}}_\varepsilon) \vee (\mathfrak{R}'^\varepsilon \wedge \overline{\mathfrak{R}}'_\varepsilon) = (\mathfrak{R}^\varepsilon - \mathfrak{R}_\varepsilon) \vee (\mathfrak{R}'^\varepsilon - \mathfrak{R}'_\varepsilon)\end{aligned}$$

und folglich

$$D^*(\mathfrak{S}^\varepsilon - \mathfrak{S}_\varepsilon) \leqq D^*(\mathfrak{R}^\varepsilon - \mathfrak{R}_\varepsilon) + D^*(\mathfrak{R}'^\varepsilon + \mathfrak{R}'_\varepsilon) < 2\varepsilon$$

gilt, sind damit (9) und (10) auch für $\mathfrak{Q} \wedge \mathfrak{Q}'$ nachgewiesen.

Satz 20. *Ist $\mathfrak{Q}$ pseudorational, so auch $\mathfrak{Q}^{(s)}$ für $s \gtreqless 0$.*

Beweis. Bei gegebenem $\varepsilon > 0$ seien $\mathfrak{R}^\varepsilon$ und $\mathfrak{R}_\varepsilon$ rationale oder leere Mengen gemäß (9) und (10). Dann ist offenbar $\mathfrak{R}_\varepsilon^{(s)} \leqq \mathfrak{Q}^{(s)} \leqq \mathfrak{R}^{\varepsilon^{(s)}}$, und nach Satz 11 sind $\mathfrak{R}_\varepsilon^{(s)}$ und $\mathfrak{R}^{\varepsilon^{(s)}}$ rationale oder leere Mengen, so daß aus

$$D^*(\mathfrak{R}^{\varepsilon^{(s)}} - \mathfrak{R}_\varepsilon^{(s)}) = D^*(\mathfrak{R}^{\varepsilon^{(s)}}) - D^*(\mathfrak{R}_\varepsilon^{(s)}) = D^*(\mathfrak{R}^\varepsilon - \mathfrak{R}_\varepsilon) < \varepsilon$$

die Behauptung folgt.

Satz 21. *Ist $\mathfrak{Q}$ pseudorational, so auch $c \times \mathfrak{Q}$ für $c \geqq 1$.*

Beweis. Bei gegebenem $\varepsilon > 0$ seien $\mathfrak{R}^\varepsilon$ und $\mathfrak{R}_\varepsilon$ rationale oder leere Mengen gemäß (9) und (10). Dann ist offenbar $c \times \mathfrak{R}_\varepsilon \leqq c \times \mathfrak{Q} \leqq c \times \mathfrak{R}^\varepsilon$, und nach Satz 12 sind $c \times \mathfrak{R}_\varepsilon$ und $c \times \mathfrak{R}^\varepsilon$ rationale oder leere Mengen, so daß die Behauptung folgt, da nach Satz 5

$$D^*(c \times \mathfrak{R}^\varepsilon - c \times \mathfrak{R}_\varepsilon) = D^*(c \times \mathfrak{R}^\varepsilon) - D^*(c \times \mathfrak{R}_\varepsilon) = \frac{1}{c} D^*(\mathfrak{R}^\varepsilon - \mathfrak{R}_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{c} \leqq \varepsilon$$

wird.

Satz 22. *Ist $\mathfrak{Q}$ pseudorational und $D^*(\mathfrak{Q}) < 1$, so sind die Längen der Ketten von $\mathfrak{Q}$ beschränkt.*

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es eine rationale Menge $\mathfrak{R} \geqq \mathfrak{Q}$ mit $D^*(\mathfrak{R}) < 1$. Ist etwa $\Gamma(\mathfrak{R}) = 0, e_1 \ldots e_v \overline{f_1 \ldots f_w}$, so ist wegen $D^*(\mathfrak{R}) < 1$ nach Satz 8 unter den Ziffern $f_1, \ldots, f_w$ mindestens eine Null, d. h. jede Kette von $\mathfrak{R}$ und folglich erst recht jede Kette von $\mathfrak{Q}$ enthält weniger als $v + w$ Elemente.

Satz 23. *Ist $\mathfrak{Q}$ pseudorational und $\Gamma(\mathfrak{Q})$ nicht dyadisch rational, so sind $\mathfrak{K}_\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{G}_\mathfrak{Q}$ pseudorational.*

Beweis. Nach Satz 6 ist $\mathfrak{K}_\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q} \wedge \mathfrak{Q}^{(1)}$, $\mathfrak{G}_\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q} \wedge \overline{\mathfrak{Q}^{(-1)}}$. Da $\mathfrak{Q}^{(1)}$ und $\mathfrak{Q}^{(-1)}$ nach Satz 20 pseudorational sind, sind $\mathfrak{K}_\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{G}_\mathfrak{Q}$ somit nach Satz 19 endliche oder pseudorationale Mengen. Der erste Fall kann aber nicht eintreten, weil dann $\overline{\mathfrak{Q}}$ endlich, also $\Gamma(\mathfrak{Q})$ entgegen der Voraussetzung dyadisch rational wäre.

14. Es ist zu vermuten, daß die Summe zweier pseudorationaler Mengen im allgemeinen nicht pseudorational ist. Jedoch hat diese Frage sich bisher leider nicht entscheiden lassen.

Satz 24. *Ist $\mathfrak{Q}$ pseudorational, $\mathfrak{R}$ rational, so sind $\mathfrak{Q} \dot{+} \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{Q} + \mathfrak{R}$ pseudorational.*

Beweis. Sei $\mathfrak{R} = \mathfrak{B} \vee \mathfrak{P}^{(v)}$, wo etwa $\mathfrak{B} = \{b_1, \ldots, b_k\}$, $\mathfrak{P}$ reinperiodisch ist. Dann wird

$$\mathfrak{Q} \dot{+} \mathfrak{R} = (\mathfrak{Q} \dot{+} \mathfrak{B}) \vee (\mathfrak{Q} \dot{+} \mathfrak{P}^{(v)}) = \left(\bigvee_{i=1}^{k} \mathfrak{Q}^{(b_i)}\right) \vee (\mathfrak{Q} \dot{+} \mathfrak{P}^{(v)}).$$

Da $\bigvee_{i=1}^{k} \mathfrak{Q}^{(b_i)}$ nach Satz 19 und Satz 20 und $\mathfrak{Q} \dot{+} \mathfrak{P}^{(v)}$ nach Satz 13 pseudorational ist, gilt dies auch für $\mathfrak{Q} \dot{+} \mathfrak{R}$ und damit für $\mathfrak{Q} + \mathfrak{R} = \mathfrak{Q} \vee (\mathfrak{Q} \dot{+} \mathfrak{R}) \vee \mathfrak{R}$.

15. Es sei

$$\varrho = \Gamma(\mathfrak{A}) = 0, e_1 e_2 \ldots e_i \ldots = \sum_{a \in \mathfrak{A}} \frac{1}{2^a}, \quad \sigma = \Gamma(\mathfrak{B}) = 0, f_1 f_2 \ldots f_i \ldots = \sum_{b \in \mathfrak{B}} \frac{1}{2^b}.$$

Dann gibt es genau eine Zahl τ mit $\tau \equiv \varrho + \sigma \pmod 1$ und $0 < \tau \leqq 1$. Wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ elementefremd sind, hat τ die dyadische Entwicklung $\tau = \Gamma(\mathfrak{C}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i + f_i}{2^i}$, so daß die durch $\tau = \Gamma(\mathfrak{C})$ definierte Menge $\mathfrak{C}$ die Vereinigung $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ ist. Setzt man $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} = \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} = \mathfrak{D}$, so wird im allgemeinen Fall

$$(13) \qquad e_i + f_i = \begin{cases} 0, & \text{wenn } i \in \overline{\mathfrak{B}} \\ 1, & \text{wenn } i \in \mathfrak{B} \wedge \overline{\mathfrak{D}} \\ 2, & \text{wenn } i \in \mathfrak{D} \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Die explizite Form von $\mathfrak{C}$ wird angegeben durch

Satz 25. *Es sei*

$\mathfrak{W}$ *die Menge derjenigen* $d_n \in \mathfrak{D}$ [8]*, für die es ein* $v \in \overline{\mathfrak{V}}$ *gibt mit* $d_n < v < d_{n+1}$,

$\mathfrak{X}$ *die Vereinigung der Ketten* $[x, y]$ *von* $\mathfrak{V} \wedge \overline{\mathfrak{D}}$ *mit* $y + 1 \in \overline{\mathfrak{V}}$,

$\mathfrak{Y}$ *die Menge der* $v_n \in \overline{\mathfrak{V}}$, *für die es ein* $d \in \mathfrak{D}$ *gibt mit* $v_n < d < v_{n+1}$.

Dann ist

$$\mathfrak{C} = (\mathfrak{D} - \mathfrak{W}) \vee \mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}.$$

Beweis. Nach (13) ist

$$\Gamma(\mathfrak{C}) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i + f_i}{2^i} \equiv \sum_{i \in \mathfrak{V} \wedge \overline{\mathfrak{D}}} \frac{1}{2^i} + \sum_{i \in \mathfrak{D}} \frac{2}{2^i} \equiv \sum_{i \in \mathfrak{V} \wedge \overline{\mathfrak{D}}} \frac{1}{2^i} + \sum_{i \in \mathfrak{D}^{(-1)}} \frac{1}{2^i} \qquad (\mathrm{mod}\ 1).$$

Wie man leicht bestätigt, ist

$$\mathfrak{D}^{(-1)} = \mathfrak{K}_{\mathfrak{D}}^{(-1)} \vee (\mathfrak{D} - \mathfrak{G}_{\mathfrak{D}}) = (\mathfrak{K}_{\mathfrak{D}}^{(-1)} \wedge (\mathfrak{V} \wedge \overline{\mathfrak{D}})) \vee (\mathfrak{K}_{\mathfrak{D}}^{(-1)} \wedge \overline{\mathfrak{V}}) \vee (\mathfrak{D} - \mathfrak{G}_{\mathfrak{D}})$$

und daher

$$(14) \qquad \Gamma(\mathfrak{C}) \equiv \sum_{i \in \mathfrak{M}_1} \frac{1}{2^i} + \sum_{i \in \mathfrak{M}_2} \frac{1}{2^i} + \sum_{i \in \mathfrak{M}_3} \frac{1}{2^i} + \sum_{i \in \mathfrak{M}_4} \frac{1}{2^i} \qquad (\mathrm{mod}\ 1),$$

wo $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{V} \wedge \overline{\mathfrak{D}}$, $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{K}_{\mathfrak{D}}^{(-1)} \wedge (\mathfrak{V} \wedge \overline{\mathfrak{D}})$, $\mathfrak{M}_3 = \mathfrak{K}_{\mathfrak{D}}^{(-1)} \wedge \overline{\mathfrak{V}}$, $\mathfrak{M}_4 = \mathfrak{D} - \mathfrak{G}_{\mathfrak{D}}$ ist. Wegen $\mathfrak{M}_3 \leq \overline{\mathfrak{V}}$, $\mathfrak{M}_4 \leq \mathfrak{D}$ sind $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_3$ und $\mathfrak{M}_4$ paarweise elementefremd. Sei $y \in \mathfrak{M}_2$. Dann ist $y + 1 \in \mathfrak{D}$, also y größtes Element einer Kette $[x(y), y]$ von $\mathfrak{V} \wedge \overline{\mathfrak{D}}$. Daher treten in $\sum_{\in \mathfrak{M}_1} \frac{1}{2^i}$ die Summanden $\frac{1}{2^{x(y)}} + \frac{1}{2^{x(y)+1}} + \cdots + \frac{1}{2^y}$ auf, und somit ist wegen

$$\frac{1}{2^y} + \sum_{i=x(y)}^{y} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{x(y)-1}}$$

$$\sum_{i \in \mathfrak{M}_1} \frac{1}{2^i} + \sum_{i \in \mathfrak{M}_2} \frac{1}{2^i} = \sum_{i \in \mathfrak{M}_1 - [x(y), y]} \frac{1}{2^i} + \sum_{i \in \mathfrak{M}_2 - \{y\}} \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{x(y)-1}}.$$

Führt man diese Operation für jedes $y \in \mathfrak{M}_2$ aus, so erhält man

$$(15) \qquad \sum_{i \in \mathfrak{M}_1} \frac{1}{2^i} + \sum_{i \in \mathfrak{M}_2} \frac{1}{2^i} = \sum_{i \in \mathfrak{X}'} \frac{1}{2^i} + \sum_{\substack{x \\ y \in \mathfrak{M}_2}} \frac{1}{2^{x(y)-1}},$$

wobei $\mathfrak{X}'$ die Menge aller $i \in \mathfrak{M}_1 - \bigvee_{y \in \mathfrak{M}_2} [x(y), y]$ ist. $\mathfrak{X}'$ entsteht also aus $\mathfrak{V} \wedge \overline{\mathfrak{D}}$ durch Streichung aller derjenigen Ketten $[x(y), y]$ von $\mathfrak{V} \wedge \overline{\mathfrak{D}}$, bei denen $y + 1 \in \mathfrak{D}$ ist. Für die verbleibenden Ketten $[x, y]$ von $\mathfrak{V} \wedge \overline{\mathfrak{D}}$ ist daher $y + 1 \in \overline{\mathfrak{V}}$, d. h. es ist $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X}$ im Sinne der Voraussetzung.

Bei den in $\sum_{y \in \mathfrak{M}_2} x \frac{1}{2^{x(y)-1}}$ in (15) auftretenden Exponenten $x(y) - 1$ ist wegen $x \in \mathfrak{K}_{\mathfrak{V} \wedge \overline{\mathfrak{D}}}$ offenbar $x - 1 \in \mathfrak{V} \wedge \overline{\mathfrak{D}}$, also entweder $x - 1 \in \overline{\mathfrak{V}}$ oder $x - 1 \in \mathfrak{D}$. Das Glied $\frac{1}{2^{x-1}}$ fügen wir im ersten Fall dem Ausdruck $\sum_{i \in \mathfrak{M}_3} \frac{1}{2^i}$, im zweiten Fall dem Ausdruck $\sum_{i \in \mathfrak{M}_4} \frac{1}{2^i}$ in (14) ein, was wegen $x - 1 \in \mathfrak{M}_3$ bzw. $x - 1 \in \mathfrak{M}_4$ möglich ist. Danach ergibt sich (wegen (14) und (15))

$$(16) \qquad \Gamma(\mathfrak{C}) \equiv \sum_{i \in \mathfrak{X}} \frac{1}{2^i} + \sum_{i \in \mathfrak{Y}'} \frac{1}{2^i} + \sum_{i \in \mathfrak{D} - \mathfrak{W}'} \frac{1}{2^i} \qquad (\mathrm{mod}\ 1).$$

Dabei ist a) $\mathfrak{Y}' = \mathfrak{M}_3 \vee \mathfrak{Y}''$, wo $\mathfrak{Y}''$ die Menge der $x - 1 \in \overline{\mathfrak{V}}$ ist, bei denen eine Kette $[x, y]$ von $\mathfrak{V} \wedge \overline{\mathfrak{D}}$ mit $y + 1 \in \mathfrak{D}$ existiert. $\mathfrak{Y}'$ enthält also, da ja $\mathfrak{M}_3 = \mathfrak{K}_{\mathfrak{D}}^{(-1)} \wedge \overline{\mathfrak{V}}$ ist, genau die Elemente $x - 1 \in \overline{\mathfrak{V}}$, bei denen entweder $x \in \mathfrak{D}$ ist oder eine Kette $[x, y]$ von

[8]) Die Elemente sollen der Größe nach numeriert sein, also $\mathfrak{D} = \{d_1, d_2, \ldots\}$, $\overline{\mathfrak{V}} = \{v_1, v_2, \ldots\}$.

$\mathfrak{B} \wedge \overline{\mathfrak{D}}$ mit $y+1 \in \mathfrak{D}$ existiert. Daher ist $\mathfrak{Y}' \leq \mathfrak{Y}$. Ist umgekehrt v_n irgendein Element von $\mathfrak{Y}$, so gibt es ein kleinstes $d \in \mathfrak{D}$ mit $v_n < d < \bar{v}_{n+1}$. Ist $d = v_n + 1$, so ist $v_n \in \mathfrak{M}_3$. Andernfalls bilden die Zahlen zwischen $\bar{v}_n$ und d eine Kette von $\mathfrak{B} \wedge \overline{\mathfrak{D}}$, d. h. es ist $\bar{v}_n \in \mathfrak{Y}''$. Daher ist $\mathfrak{Y} \leq \mathfrak{M}_3 \vee \mathfrak{Y}'' = \mathfrak{Y}'$ und somit $\mathfrak{Y}' = \mathfrak{Y}$.

b) $\mathfrak{D} - \mathfrak{W}' = \mathfrak{M}_4 \vee \mathfrak{W}'' = (\mathfrak{D} - \mathfrak{G}_{\mathfrak{D}}) \vee \mathfrak{W}''$, wobei $\mathfrak{W}''$ die Menge der $x - 1 \in \mathfrak{G}_{\mathfrak{D}}$ ist, bei denen eine Kette $[x, y]$ von $\mathfrak{B} \wedge \mathfrak{D}$ mit $y + 1 \in \mathfrak{D}$ existiert. Da $\mathfrak{W}'' \leq \mathfrak{G}_{\mathfrak{D}}$ und somit $\mathfrak{D} - \mathfrak{W}' = (\mathfrak{D} - \mathfrak{G}_{\mathfrak{D}}) \vee \mathfrak{W}'' = \mathfrak{D} - (\mathfrak{G}_{\mathfrak{D}} \wedge \overline{\mathfrak{W}''})$, ist $\mathfrak{W}' = \mathfrak{G}_{\mathfrak{D}} \wedge \overline{\mathfrak{W}''}$ die Menge der $x - 1 \in \mathfrak{G}_{\mathfrak{D}}$, bei denen eine Kette $[x, y]$ von $\overline{\mathfrak{B}}$ oder eine Kette $[x, y]$ von $\mathfrak{B} \wedge \overline{\mathfrak{D}}$ mit $y + 1 \in \mathfrak{D}$ existiert. Dieselbe Schlußweise wie unter a) ergibt daher $\mathfrak{W}' = \mathfrak{W}$.

Da $\mathfrak{X} \leq \mathfrak{B} \wedge \overline{\mathfrak{D}}$, $\mathfrak{Y} \leq \overline{\mathfrak{B}}$, $\mathfrak{D} - \mathfrak{W} \leq \mathfrak{D}$ ist, sind $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{D} - \mathfrak{W}$ paarweise elementefremd, so daß in (16), weil beide Seiten gleich Zahlen τ mit $0 < \tau \leqq 1$ sind, die Kongruenz (mod 1) durch eine Gleichung ersetzt werden darf. Somit ist

$$\Gamma(\mathfrak{C}) = \sum_{i \in \mathfrak{X}} \frac{1}{2^i} + \sum_{i \in \mathfrak{Y}} \frac{1}{2^i} + \sum_{i \in \mathfrak{D} - \mathfrak{W}} \frac{1}{2^i} = \Gamma((\mathfrak{D} - \mathfrak{W}) \vee \mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}),$$

woraus die Behauptung folgt.

Satz 26. *Sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ pseudorational und $D^*(\mathfrak{B} \wedge \overline{\mathfrak{D}}) < 1$, so ist die durch die Kongruenz $\Gamma(\mathfrak{C}) \equiv \Gamma(\mathfrak{A}) + \Gamma(\mathfrak{B})$ (mod 1) definierte Menge $\mathfrak{C}$ pseudorational.*

Beweis. Nach Satz 25 ist $\mathfrak{C} = (\mathfrak{D} - \mathfrak{W}) \vee \mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}$, so daß bei Beachtung von (4) die Behauptung nach Satz 19 folgt, wenn nachgewiesen wird, daß a) $\mathfrak{W}$, b) $\mathfrak{Y}$ und c) $\mathfrak{X}$ pseudorational oder endlich sind.

a) Sei $v(w_i)$ für jedes Element $w_i \in \mathfrak{W} = \{w_1, w_2, \ldots\}$ erklärt als die kleinste Zahl $v \in \overline{\mathfrak{B}}$ mit $v > w_i$. Dann ist wegen $w_i \in \mathfrak{G}_{\mathfrak{D}}$ jedes x mit $w_i < x < \bar{v}(w_i)$ in $\mathfrak{B} \wedge \overline{\mathfrak{D}}$ enthalten. Ist u die maximale Kettenlänge von $\mathfrak{B} \wedge \overline{\mathfrak{D}}$ — daß sie existiert, besagt Satz 22 — so wird daher wegen $w_i \in \mathfrak{D}$ die Differenz $\bar{v}(w_i) - w_i \leqq u + 1$. Die Menge derjenigen $w_i \in \mathfrak{W}$, für die $v(w_i) - w_i = j$ ist, werde mit $\mathfrak{W}_j$ $(j = 1, \ldots, u+1)$ bezeichnet, so daß $\mathfrak{W} = \bigvee_{j=1}^{u+1} \mathfrak{W}_j$ wird. Da $\mathfrak{W}_j$ nach Definition genau diejenigen Zahlen enthält, für die jede der Aussagen $x \in \mathfrak{D}$, $x + j \in \overline{\mathfrak{B}}$, $x \in \mathfrak{W}_e$ für $e \leqq j$ gilt, ist somit

$$\mathfrak{W}_1 = \overline{\mathfrak{B}}^{(-1)} \wedge \mathfrak{D} \quad \text{und} \quad \mathfrak{W}_j = \overline{\mathfrak{B}}^{(-j)} \wedge \mathfrak{D} \wedge \left(\bigvee_{l=1}^{j-1} \overline{\mathfrak{W}}_l\right) \qquad (j = 2, \ldots, u+1).$$

Also ist $\mathfrak{W}_1$ und damit auch $\mathfrak{W}_2, \ldots, \mathfrak{W}_{u+1}$, folglich ebenfalls $\mathfrak{W}$ nach den Sätzen 19 und 20 endlich oder pseudorational.

b) Daß $\mathfrak{Y}$ endlich oder pseudorational ist, beweist man völlig analog bei Vertauschung von $\overline{\mathfrak{B}}$ und $\mathfrak{D}$ unter Beibehaltung von $\mathfrak{B} \wedge \overline{\mathfrak{D}}$.

c) Nach Definition von $\mathfrak{X}$ ist $\mathfrak{G}_{\mathfrak{X}} = \mathfrak{G}_{\mathfrak{B} \wedge \overline{\mathfrak{D}}} \wedge \mathfrak{K}_{\overline{\mathfrak{B}}}^{(-1)}$, also $\mathfrak{G}_{\mathfrak{X}}$ nach den Sätzen 19, 20 und 23 endlich oder pseudorational, da $\Gamma(\mathfrak{B} \wedge \overline{\mathfrak{D}})$ wegen $D^*(\mathfrak{B} \wedge \overline{\mathfrak{D}}) < 1$ nicht dyadisch rational ist. Setzt man $\mathfrak{X}_j =$ Menge der $x \in \mathfrak{X}$ mit $[x, x + j - 1] \leq \mathfrak{X}$ und $x + j \in \mathfrak{X}$ $(j = 1, \ldots, u)$, wo u wieder die maximale Kettenlänge von $\mathfrak{B} \wedge \overline{\mathfrak{D}}$ ist, so wird $\mathfrak{X} = \bigvee_{j=1}^{u} \mathfrak{X}_j$. Offenbar ist

$$\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{G}_{\mathfrak{X}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{X}_j = \mathfrak{X}_{j-1}^{(-1)} \wedge (\mathfrak{B} \wedge \overline{\mathfrak{D}}) \qquad (j = 2, \ldots, u),$$

woraus wie oben folgt, daß die $\mathfrak{X}_j$ $(j = 1, \ldots, u)$ und somit auch $\mathfrak{X}$ endlich oder pseudorational sind.

Bemerkung. In dem oben ausgeschlossenen Fall $D^*(\mathfrak{B} \wedge \overline{\mathfrak{D}}) = 1$ braucht $\mathfrak{C}$ nicht pseudorational zu sein, wie folgende Überlegung zeigt: Sei $\mathfrak{Q}$ irgendeine pseudorationale Menge mit $D^*(\mathfrak{Q}) = 1$. Nach Satz 19 ist dann $\overline{\mathfrak{Q}}$ und folglich, wie aus $D^*(\overline{\mathfrak{Q}}) = 0$ an Hand von (9) und (10) leicht zu erschließen ist, auch jede unendliche Untermenge von $\overline{\mathfrak{Q}}$ pseudo-

rational. Es werden bei festen ζ_1 und ζ_2 mit $0 < \zeta_1 < \zeta_2 < 1$ die Mengen $\mathfrak{Q}' \leq \mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{L} = \{l_1, l_2, \ldots\}$ folgendermaßen rekursiv definiert:

$$\left.\begin{array}{l} l_1 = \text{kleinste Zahl in } \mathfrak{G}_{\mathfrak{Q}} \text{ mit } \dfrac{Q(l_1)}{l_1} \geqq \zeta_2; \\ \mathfrak{Q}' \wedge [1, l_1] = \mathfrak{Q} \wedge [1, l_1]; \\ l_{2n} = \text{kleinste Zahl} > l_{2n-1} \text{ in } \mathfrak{G}_{\mathfrak{Q}} \text{ mit } \dfrac{Q'(l_{2n-1})}{l_{2n} - 1}; \\ \mathfrak{Q}' \wedge [l_{2n-1} + 1, l_{2n} - 1] \text{ sei leer}; \\ l_{2n+1} = \text{kleinste Zahl} > l_{2n} \text{ in } \mathfrak{G}_{\mathfrak{Q}} \text{ mit } \dfrac{Q'(l_{2n}) + l_{2n+1} - l_{2n}}{l_{2n+1}} \geqq \zeta_2; \\ \mathfrak{Q}' \wedge [l_{2n}, l_{2n+1}] = \mathfrak{Q} \wedge [l_{2n}, l_{2n+1}] \end{array}\right\} (n = 1, 2, \ldots).$$

Dann ist offenbar $\underline{D}^*(\mathfrak{Q}') \leqq \zeta_1$, $\overline{D}^*(\mathfrak{Q}') \geqq \zeta_2$[9]. Setzt man also $\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{Q}} - \mathfrak{G}_{\mathfrak{Q}'}^{(1)}$ und $\mathfrak{A} = \mathfrak{Q} \vee \mathfrak{B}$, so ist $\mathfrak{B}$ wegen $\mathfrak{B} \leq \overline{\mathfrak{Q}}$ und folglich auch $\mathfrak{A}$ pseudorational. In der Schreibweise von Satz 25 erhält man $\mathfrak{D} = \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \wedge \overline{\mathfrak{D}} = \mathfrak{A} - \mathfrak{B} = \mathfrak{Q}$ sowie $\mathfrak{X} = \mathfrak{Q}'$, so daß $\mathfrak{D}^*(\mathfrak{B} \wedge \overline{\mathfrak{D}}) = 1$ und ferner wegen $D^*(\overline{\mathfrak{Q}}) = D^*(\mathfrak{D}) = 0$ offenbar $D^*(\mathfrak{W}) = D^*(\mathfrak{Y}) = 0$ wird. Daher ist nach Satz 25

$$\underline{D}^*(\mathfrak{C}) = \underline{D}^*(\mathfrak{X}) \leqq \zeta_1 \quad \text{und} \quad \overline{D}^*(\mathfrak{C}) = \overline{D}^*(\mathfrak{X}) \geqq \zeta_2,$$

und daraus folgt nach Satz 17, daß $\mathfrak{C}$ nicht pseudorational ist.

Kap. II. Hausdorffsche Dimensionen spezieller Klassen von Mengen.

§ 4. Der Hausdorffsche Maßbegriff.

16. Die Einführung der Dualwerte ermöglicht verfeinerte Aussagen darüber, „wieviele" Mengen natürlicher Zahlen eine vorgegebene Klasse N enthält; man braucht nur einen geeigneten Maßbegriff für die zugehörige Punktmenge ${}_rN$ heranzuziehen. Da das Lebesguesche Maß, wie sich zeigen wird, bei den hier untersuchten Punktmengen verschwindet[10], erweist sich der feiner unterscheidende Hausdorffsche Maßbegriff[11] als das geeignete Hilfsmittel. Wir führen ihn in Anlehnung an V. Knichal [8] folgendermaßen ein:

Sind M und V lineare Punktmengen, so heiße V eine ϱ-Überdeckung ($\varrho > 0$) von M, wenn $V \supset M$ ist und V aus höchstens abzahlbar vielen offenen Intervallen $\mathfrak{v}$ mit $|\mathfrak{v}| \leqq \varrho$ besteht. Dann sei

$$L_\varrho(M, \alpha) = \underset{V}{\mathrm{fin}} \sum_{\mathfrak{v} \in V} |\mathfrak{v}|^\alpha \qquad (0 < \alpha \leqq 1),$$

wo V zur Bildung der unteren Grenze alle ϱ-Überdeckungen von M durchläuft. Da für $\varrho' < \varrho$ offenbar $L_\varrho(M, \alpha) \leqq L_{\varrho'}(M, \alpha)$ ausfällt, existiert

$$\lim_{\varrho \to 0} L_\varrho(M, \alpha) = L(M, \alpha),$$

sofern auch der Wert ∞ zugelassen wird. Man nennt $L(M, \alpha)$ das *α-dimensionale Hausdorffsche Maß* von M; insbesondere fällt $L(M, 1)$ mit dem äußeren Lebesgueschen Maß von M zusammen. Wie man leicht bestätigt[12], ist

(17) $L(M, \alpha) \leqq L(M', \alpha)$, wenn $M \subset M'$;

(18) $L\left(\bigvee_{i=1}^{\infty} M_i, \alpha\right) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} L(M_i, \alpha)$ für eine beliebige Folge $M_1, M_2, \ldots$;

(19) $L(M, \alpha') = 0$, wenn $\alpha' > \alpha$ und $L(M, \alpha) < \infty$.

---

[9]) Ferner wird $\mathfrak{G}_{\mathfrak{Q}'}^{(1)} \leqq \mathfrak{G}_{\mathfrak{Q}}^{(1)} \leqq \mathfrak{Q}$, da jede Kette von $\mathfrak{Q}'$ zugleich Kette von $\mathfrak{Q}$ ist.

[10]) Der tiefere Grund hierfür liegt darin, daß es sich zumeist um Mengen handelt, die im Sinne von *K. Knopp* [9] homogen und daher vom Lebesgueschen Maß null oder eins sind.

[11]) Vgl. [7].

[12]) Vgl. etwa *Knichal* [8, § 1].

Die untere Grenze der Menge derjenigen α, für die $L(M, \alpha) = 0$ ist, wird (*Hausdorffsche*) *Dimension* von M, geschrieben dim M, genannt. Ist $L(M, \alpha) > 0$ für alle α mit $0 < \alpha \leqq 1$, so setzt man dim $M = 1$. Somit existiert dim M für jede lineare Punktmenge M, und zwar ist immer $0 \leqq \dim M \leqq 1$. Für $\alpha < \dim M$ ist $L(M, \alpha) = \infty$, denn aus $L(M, \alpha) < \infty$ würde nach (19) dim $M \leqq \alpha$ folgen. Für den Nachweis von dim $M = \delta$ wird daher im folgenden jeweils gezeigt: a) $L(M, \alpha) = 0$ für $\alpha > \delta$, b) $L(M, \alpha) = \infty$ für $\alpha < \delta$.

Satz 27. *Seien* $M_i\,(i = 1, 2, \ldots)$ *endlich oder abzählbar viele Punktmengen mit* dim $M_i = \delta_i$. *Dann ist* $\dim\left(\bigvee_i M_i\right) = \overline{\text{fin}}\ \delta_i$.

Beweis. a) Für $\alpha > \overline{\text{fin}}\ \delta_i$ ist $\alpha > \delta_i$ und daher $L(M_i, \alpha) = 0$ für jedes i, also $L\left(\bigvee_i M_i, \alpha\right) = 0$ nach (17).

b) Für $\alpha < \overline{\text{fin}}_i\ \delta_i$ ist $\delta_{i_0} > \alpha$ bei geeignetem i_0, folglich $L(M_{i_0}, \alpha) = \infty$ und somit $L\left(\bigvee_i M_i, \alpha\right) \geqq L(M_{i_0}, \alpha)$ nach (18).

§ 5. Einige allgemeinere Sätze über Hausdorffsche Dimensionen.

17. Die Bestimmung der Dimension einer Punktmenge M gelingt, wenn M sich in der Form

$$M = \bigwedge_{n=1}^{\infty} I_n \tag{20}$$

darstellen läßt, sofern jedes I_n eine aus endlich vielen, etwa g_n, getrennten offenen Intervallen $\mathfrak{i}_n^m\,(m = 1, \ldots, g_n)$[1] der gleichen Länge λ_n bestehende Menge ist und die Folge der I_n gewisse noch zu erläuternde Struktureigenschaften hat. Insbesondere setzen wir $I_n \geqq I_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ voraus, was keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet, da man sonst statt I_n nur $I'_n = \bigwedge_{m=1}^{n} I_m$ einzuführen brauchte. Ferner sei $I_n \leqq (0; 1)$ für $n = 1, 2, \ldots$, also auch $M \leqq (0; 1)$, sowie $g_n \leqq g_{n+1}$.

Einer solchen Menge $M = \bigwedge_{n=1}^{\infty} I_n$ ordnen wir zur Veranschaulichung einen unendlichen Graphen zu, der jedes Intervall $\mathfrak{i}_n^m$ durch einen „Punkt" in der n-ten Zeile darstellt $(n = 0, 1, 2, \ldots;\ \mathfrak{i}_0^1 = (0; 1))$, wobei im Fall $\mathfrak{i}_n^m \leqq \mathfrak{i}_{n-1}^{m'}$ die zugehörigen Punkte

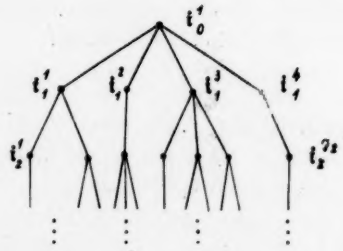

Fig. 1.

durch eine Strecke miteinander verbunden sind (Fig. 1). Wir nennen dann das Intervall $\mathfrak{i}_n^m$ dem Intervall $\mathfrak{i}_{n-1}^{m'}$ *unmittelbar unter-* und das Intervall $\mathfrak{i}_{n-1}^{m'}$ dem Intervall $\mathfrak{i}_n^m$ *unmittelbar übergeordnet.* Zwei Intervalle, die demselben Intervall unmittelbar untergeordnet sind, nennen wir einander *unmittelbar nebengeordnet.*

[13]) Im folgenden werden, wo es möglich ist, einer oder beide Indizes fortgelassen.

Satz 28. *Gibt es eine Konstante $\nu > 0$, so daß*

$$\lambda_n = 2^{-n(\nu+o(1))} \tag{21}$$

ist, so ist, falls μ_n durch $g_n = 2^{n\mu_n}$ definiert wird,

$$\dim M \leqq \frac{1}{\nu} \varliminf_{n\to\infty} \mu_n.$$

Beweis. Ist $\varliminf \mu_n = \infty$, so ist nichts zu beweisen. Andernfalls gilt, da bei festem $q \geqq 1$ jedes I_n mit $n \geqq q$ eine λ_q-Überdeckung von M darstellt, für $\alpha > \frac{1}{\nu} \varliminf_{n\to\infty} \mu_n$

$$L_{\lambda_q}(M, \alpha) \leqq \sum_{m=1}^{g_n} |\mathfrak{i}_n^m|^\alpha = g_n \lambda_n^\alpha \qquad (n \geqq q),$$

also auch

$$L_{\lambda_q}(M, \alpha) \leqq \varliminf_{n\geqq q} g_n \lambda_n^\alpha.$$

Hieraus folgt mit (21)

$$L(M, \alpha) = \lim_{q\to\infty} L_{\lambda_q}(M, \alpha) \leqq \lim_{q\to\infty} (\varliminf_{n\geqq q} g_n \lambda_n^\alpha) = \varliminf_{n\to\infty} g_n \lambda_n^\alpha = \varliminf_{n\to\infty} 2^{n(\mu_n - \nu\alpha + o(1))}.$$

Wegen $\nu\alpha > \varliminf_{n\to\infty} \mu_n$ ist somit $L(M, \alpha) = 2^{-\infty}$. Da das für jedes $\alpha > \frac{1}{\nu} \varliminf_{n\to\infty} \mu_n$ gilt, ist die Behauptung bewiesen.

18. In zwei Sonderfällen sollen für $\dim M$ auch Abschätzungen nach unten abgeleitet werden, deren Beweise weitgehend gemeinsam geführt werden können.

Satz 29. *Jedem Intervall $\mathfrak{i}_n^m$ ($m = 1, \ldots, g_n$; n fest) sei die gleiche Anzahl*[14]) *von Intervallen unmittelbar untergeordnet. Dann ist mit den Bezeichnungen von Satz 28*

$$\dim M \geqq \frac{1}{\nu} \varliminf_{n\to\infty} \mu_n.$$

Erfüllt M die Voraussetzungen der Sätze 28 und 29, so ist folglich

$$\dim M = \frac{1}{\nu} \varliminf_{n\to\infty} \mu_n. \tag{22}$$

Beispiel. Die sogenannte Cantorsche Wischmenge $C = \bigwedge_{n=1}^{\infty} I_n$ ist folgendermaßen definiert: $I_0 = (0; 1)$, und I_{n+1} entsteht aus I_n dadurch, daß in jedem Intervall $\mathfrak{i}_n$ das

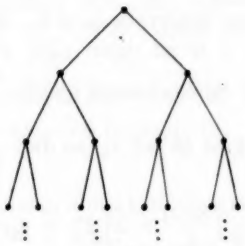

Fig. 2.

mittlere Drittel ohne Randpunkte entfernt wird. Dann besteht I_n aus $g_n = 2^n$ abgeschlossenen[15]) Intervallen der Länge $\lambda_n = \frac{1}{3^n} = 2^{-n\frac{\log 3}{\log z}}$, und der zugehörige Graph hat

---

[14]) Diese Anzahl ist dann also $\frac{g_{n+1}}{g_n}$, und jedes $\mathfrak{i}_n$ enthält genau $\frac{g_{n+k}}{g_n}$ Intervalle $\mathfrak{i}_{n+k}$ ($k = 1, 2, \ldots$). Von jedem Punkt der n-ten Zeile des Graphen geht also die gleiche Anzahl von Strecken aus.

[15]) Die Dimension von $M = \bigwedge_{n=1}^{\infty} I_n$ bleibt unverändert, wenn gewisse Endpunkte der $\mathfrak{i}_n^m$ mitgerechnet werden, da die Menge aller dieser Endpunkte abzählbar und folglich für jedes α von α-dimensionalem Maß null ist.

die aus Fig. 2 zu entnehmende Gestalt. Die Voraussetzungen von Satz 28 und Satz 29 sind mit $\mu = 1$, $\nu = \frac{\log 3}{\log 2}$, $\frac{g_{n+1}}{g_n} = 2$ erfüllt, so daß sich $\dim C = \frac{\log 2}{\log 3}$ ergibt. Diese Tatsache wird bei Hausdorff [7] direkt bewiesen.

Satz 30. a) *Es gebe Konstanten $\mu > 0$ und $\nu > 0$ mit*

$$g_n = 2^{n(\mu + o(1))} \quad \text{und} \quad \lambda_n = 2^{-n(\nu + o(1))}.$$

b) *Zu festem α mit $0 < \alpha < \frac{\mu}{\nu}$ gebe es ein $\tau_1 > 0$, so daß für jede aus endlich vielen der Intervalle $\mathfrak{i}_n^m$ bestehende Menge V', die M überdeckt,*

$$\sum_{\mathfrak{i} \in V'} |\mathfrak{i}|^\alpha \geqq g_k \lambda_k^\alpha \cdot \tau_1$$

wird, wenn k eine Zahl mit $\max\limits_{\mathfrak{i} \in V'} |\mathfrak{i}| \leqq \lambda_k$ ist.

Dann ist $L(M, \alpha) = \infty$, also $\dim M \geqq \alpha$.

Folgerung. Ist b) für jedes $\alpha < \frac{\mu}{\nu}$ erfüllt, so wird nach Satz 28

$$\dim M = \frac{\mu}{\nu}. \tag{23}$$

Den Beweis der Sätze 29 und 30 führen wir durch Verallgemeinerung einer im wesentlichen auf V. Jarník zurückgehenden und auch bei Knichal [8] angewandten Methode.

19. Diesen Beweis erbringen wir im restlichen Teil des vorliegenden Paragraphen in mehreren Schritten.

Satz 31. *Sei α fest $(0 < \alpha \leqq 1)$, und es gebe ein ν mit der Eigenschaft (21). Dann gibt es ein $\tau_2 > 0$, so daß zu jedem Intervall $(\eta_1; \eta_2) \subseteq (0; 1)$ eine aus endlich vielen der Intervalle $\mathfrak{i}_n^m$ bestehende Menge V existiert mit:*

$$(\eta_1; \eta_2) \wedge M \subseteq V, \tag{24}$$

$$|\mathfrak{i}| < \eta_2 - \eta_1 \text{ für jedes } \mathfrak{i} \in V, \tag{25}$$

$$\sum_{\mathfrak{i} \in V} |\mathfrak{i}|^\alpha < \tau_2 (\eta_2 - \eta_1)^\alpha. \tag{26}$$

Beweis. Wegen (21) gibt es ein n_0, so daß für $n \geqq n_0$

$$\lambda_n < \eta_2 - \eta_1 \leqq \lambda_{n_0 - 1} \tag{27}$$

ist. Sei V das System derjenigen Intervalle $\mathfrak{i}_{n_0} \in I_{n_0}$, die mit $(\eta_1; \eta_2)$ einen nicht leeren Durchschnitt haben. Wegen $I_{n_0} \supseteq M$ ist dann (24) erfüllt, also wegen (27) auch (25). Die Anzahl der Intervalle $\mathfrak{i}_{n_0} \in V$ ist höchstens gleich $\frac{\eta_2 - \eta_1}{\lambda_{n_0}} + 2 \leqq \frac{\lambda_{n_0 - 1}}{\lambda_{n_0}} + 2$. Da nach (21) die Folge $\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}$ konvergiert, gibt es ein τ_2, so daß $\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} + 2 < \tau_2$ wird für jedes n. Somit gilt

$$\sum_{\mathfrak{i} \in V} |\mathfrak{i}|^\alpha \leqq \left(\frac{\lambda_{n_0 - 1}}{\lambda_{n_0}} + 2 \right) \lambda_{n_0}^\alpha < \tau_2 (\eta_2 - \eta_1)^\alpha. \tag{28}$$

Satz 32 bzw. Satz 33. *Unter den Voraussetzungen von Satz 29 bzw. Satz 30 gibt es bei festem α mit $0 < \alpha < \frac{1}{\nu} \varliminf\limits_{n \to \infty} \mu_n$ bzw. $0 < \alpha < \frac{\mu}{\nu}$* [16]) *zu jedem $\varphi > 0$ und $\tau_3 > 0$ ein k, so daß eine aus endlich vielen der Intervalle $\mathfrak{i}_n^m$ bestehende Menge V' existiert mit $V' \supseteq M$ und*

$$|\mathfrak{i}| \leqq \lambda_k \text{ für jedes } \mathfrak{i} \in V', \tag{29}$$

$$\sum_{\mathfrak{i} \in V'} |\mathfrak{i}|^\alpha < \tau_2 (L_{\lambda_k}(M, \alpha) + \varphi), \tag{30}$$

$$g_n \lambda_n^\alpha > \varphi \tau_3 \qquad (n \geqq k). \tag{31}$$

[16]) Dabei wird (vgl. Satz 28) auch $\varliminf \mu_n = \infty$ zugelassen.

Beweis. Zunächst soll $g_n \lambda_n^\alpha \to \infty$ gezeigt werden; dann ist (31) für geeignetes k erfüllt. Für Satz 32 folgt dies aus

$$g_n \lambda_n^\alpha = 2^{n(\mu_n - \nu\alpha + o(1))},$$

da $\mu_n - \nu\alpha$ wegen $\underline{\lim}\, \mu_n > \nu\alpha$ für alle hinreichend großen n oberhalb einer positiven Schranke bleibt. Für Satz 33 folgt $g_n \lambda_n^\alpha \to \infty$ aus $g_n \lambda_n^\alpha = 2^{n(\mu - \nu\alpha + o(1))}$.

Sei $M' = \bigwedge_{n=1}^{\infty} I_n'$, wo I_n' aus I_n durch Hinzufügung der Endpunkte zu allen $\mathfrak{i}_n$ entsteht. Die I_n' und folglich auch M' sind abgeschlossen. Definitionsgemäß gibt es eine Menge R von höchstens abzählbar vielen Intervallen $\mathfrak{v}$ mit $|\mathfrak{v}| \leqq \lambda_k$, so daß $R \geq M'$ und

$$\sum_{\mathfrak{v} \in R} |\mathfrak{v}|^\alpha < L_{\lambda_k}(M', \alpha) + \varphi \tag{32}$$

ist. Nach dem Heine-Borelschen Überdeckungssatz gibt es dann eine Teilmenge $R' \subseteq R$ von endlich vielen Intervallen, die bereits zur Überdeckung von M' ausreicht. Wendet man auf die einzelnen Intervalle von R' Satz 31 an und faßt die dabei auftretenden Überdeckungsmengen V zu einer Menge V' zusammen, so ist (29) erfüllt, da nach (25) für jedes bei der Überdeckung eines Intervalls $\mathfrak{v} \in R$ auftretende Intervall $\mathfrak{i}$ offenbar $|\mathfrak{i}| < |\mathfrak{v}|$ und andererseits $|\mathfrak{v}| \leqq \lambda_k$ ist. Schließlich folgt aus (28) und (32)

$$\sum_{\mathfrak{i} \in V'} |\mathfrak{i}|^\alpha < \tau_2 \sum_{\mathfrak{i} \in R'} |\mathfrak{i}|^\alpha < \tau_2 (L_{\lambda_k}(M', \alpha) + \varphi),$$

womit wegen $L_{\lambda_k}(M', \alpha) = L_{\lambda_k}(M, \alpha)$ alles bewiesen ist.

In bezug auf die Menge V' gilt weiter der

Satz 34. *Sei* $\min_{\mathfrak{i} \in V'} |\mathfrak{i}| = \lambda_{k''}$, $\max_{\mathfrak{i} \in V'} |\mathfrak{i}| = \lambda_{k'}$ $(k \leqq k' \leqq k'')$. *Dann gibt es unter den Voraussetzungen von Satz* 29 *ein* k^* *mit* $k' \leqq k^* \leqq k''$ *und*

$$g_{k^*} \lambda_{k^*}^\alpha \leqq \sum_{\mathfrak{i} \in V'} |\mathfrak{i}|^\alpha. \tag{33}$$

Beweis. Durch Fortlassung gewisser Intervalle entsteht aus V' eine Menge $V^* \geq M$, die keinen inneren Punkt eines ihrer Intervalle mehrfach überdeckt. Dabei ist

$$\sum_{\mathfrak{i} \in V^*} |\mathfrak{i}|^\alpha \leqq \sum_{\mathfrak{i} \in V'} |\mathfrak{i}|^\alpha.$$

Ist $k'' = k'$, so ist nichts zu beweisen, weil dann notwendig $V^* = I_{k'}$ ist und daher (33) für $k^* = k'$ gilt. Sei also $k'' - k' > 0$. Wir setzen dann $V^* = V_0$ und konstruieren rekursiv weitere Mengen V_j^* $(0 \leqq j < k'' - k')$.

Es seien $V_0^*, V_1^*, \ldots, V_j$ bereits so definiert, daß sie aus je endlich vielen der Intervalle $\mathfrak{i}_n^m$ mit $\lambda_{k''} \leqq |\mathfrak{i}_n^m| \leqq \lambda_{k'}$ bestehen und folgende für $j = 0$ triviale Eigenschaften haben:

α) $V_j \supset M'$,

β) V_j^* überdeckt keinen inneren Punkt eines seiner Intervalle mehrfach.

γ)
$$\sum_{\mathfrak{i} \in V_j^*} |\mathfrak{i}|^\alpha \leqq \sum_{\mathfrak{i} \in V_{j-1}^*} |\mathfrak{i}|^\alpha \leqq \cdots \leqq \sum_{\mathfrak{i} \in V_1^*} |\mathfrak{i}|^\alpha \leqq \sum_{\mathfrak{i} \in V_0^*} |\mathfrak{i}|^\alpha.$$

δ) Die Längen der Intervalle von V_j^* haben höchstens $k'' - k - j + 1$ verschiedene Werte, darunter höchstens einen — er heiße $\lambda_{v(j)}$ — der Werte

$$\lambda_{k''}, \lambda_{k''-1}, \ldots, \lambda_{k''-j} \qquad (k'' - j \leqq v(j) \leqq k'').$$

Dann werde V_{j+1}^* folgendermaßen eingeführt: Existiert $v(j)$ nicht, so sei $V_{j+1}^* = V_j^*$. Damit sind α), β), γ) und δ) auch für $j + 1$ statt j erfüllt. Andernfalls sei S_j das System der in V_j^* enthaltenen Intervalle $\mathfrak{i}_{v(j)}$. Jedes von ihnen ist wegen $I_{v(j)} \subset I_{k''-j-1}$ in einem Intervall $\mathfrak{i}_{k''-j-1}$ enthalten, das seinerseits wegen β) nicht zu V_j^* gehört. Das System dieser Intervalle $\mathfrak{i}_{k''-j-1}$ werde mit U_j, ihre Anzahl mit c_j bezeichnet. Dann besteht S_j

aus allen $c_j \cdot \frac{g_{v(j)}}{g_{k''-j-1}}$ in den Intervallen von U_j enthaltenen Intervallen $\mathfrak{i}_{v(j)}$; denn für jedes $\mathfrak{i}_{k''-j-1} \in S_j$ wird wegen α) der Durchschnitt $\mathfrak{i}_{k''-j-1} \wedge M'$ durch Intervalle von V_j^* überdeckt, und als solche überdeckenden Intervalle kommen wegen β) nur Intervalle $\mathfrak{i}$ mit $|\mathfrak{i}| < \lambda_{k''-j-1}$, also wegen δ) nur die $\mathfrak{i}_{v(j)}$ in Frage.

a) Ist nun

$$g_{v(j)} \lambda^{\alpha}_{v(j)} \geqq g_{k''-j-1} \lambda^{\alpha}_{k''-j-1}, \tag{34}$$

so sei V_{j+1}^* diejenige Menge, die aus V_j^* dadurch entsteht, daß S_j durch U_j ersetzt wird. Dann ist nach (33)

$$\sum_{\mathfrak{i} \in V_{j+1}^*} |\mathfrak{i}|^{\alpha} = \sum_{\mathfrak{i} \in V_j^*} |\mathfrak{i}|^{\alpha} - c_j \frac{g_{v(j)}}{g_{k''-j-1}} \lambda^{\alpha}_{v(j)} + c_j \lambda^{\alpha}_{k''-j-1} \leqq \sum_{\mathfrak{i} \in V_j^*} |\mathfrak{i}|^{\alpha}.$$

b) Ist dagegen

$$g_{v(j)} \lambda^{\alpha}_{v(j)} < g_{k''-j-1} \lambda^{\alpha}_{k''-j-1}, \tag{35}$$

so sei U_j' das System der Intervalle $\mathfrak{i}_{k''-j-1} \in V_j^*$ und c_j' deren Anzahl ($c_j' \geqq 0$), ferner S_j' das System der $c_j' \cdot \frac{g_{v(j)}}{g_{k''-j-1}}$ Intervalle $\mathfrak{i}_{v(j)}$, die in den Intervallen von U_j' liegen. Dann ist wegen β) kein Intervall von S_j' zugleich Intervall von V_j^*. In diesem Fall sei V_{j+1}^* diejenige Menge, die aus V_j^* bei Ersetzung von U_j' durch S_j' entsteht. Wegen (35) ist dann

$$\sum_{\mathfrak{i} \in V_{j+1}^*} |\mathfrak{i}|^{\alpha} = \sum_{\mathfrak{i} \in V_j^*} |\mathfrak{i}|^{\alpha} - c_j' \lambda^{\alpha}_{k''-j-1} + c_j' \frac{g_{v(j)}}{g_{k''-j-1}} \lambda^{\alpha}_{v(j)} < \sum_{\mathfrak{i} \in V_j^*} |\mathfrak{i}|^{\alpha}.$$

Folglich gelten γ) und — wie man leicht bestätigt — auch α), β) und δ) für $j+1$ statt j in beiden Fällen, also allgemein für $j = 0, 1, \ldots, k'' - k'$. Somit haben die Intervalle von $V_{k''-k'}^*$ wegen δ) sämtlich die gleiche Länge, etwa λ_{k^*} ($k' \leqq k^* \leqq k''$). Wegen α) und β) ist daher $V_{k''-k'}^* = I_{k^*}$, und dies liefert zusammen mit γ) die Behauptung (33):

$$\sum_{\mathfrak{i} \in V_{k''-k'}^*} |\mathfrak{i}|^{\alpha} = \sum_{\mathfrak{i} \in I_{k^*}} |\mathfrak{i}|^{\alpha} = g_{k^*} \lambda^{\alpha}_{k^*} \leqq \sum_{\mathfrak{i} \in V^*} |\mathfrak{i}|^{\alpha} \leqq \sum_{\mathfrak{i} \in V'} |\mathfrak{i}|^{\alpha}.$$

20. Der Beweis der beiden angekündigten Sätze läßt sich nunmehr abschließen.

A) *Zu Satz* 29: Nach (31) und (33) ist $\sum_{\mathfrak{i} \in V'} |\mathfrak{i}|^{\alpha} \geqq g_{k^*} \lambda^{\alpha}_{k^*} > \varphi \tau_3$, wegen (30) also

$$\varphi \tau_3 < \tau_2 (L_{\lambda_k}(M, \alpha) + \varphi), \text{ d. h. } L_{\lambda_k}(M, \alpha) > \varphi \left(\frac{\tau_3}{\tau_2} - 1 \right).$$

Bei geeigneter Wahl der Konstanten τ_3, über die ja noch frei verfügt werden darf, wird also $L_{\lambda_k}(M, \alpha) > \varphi$. Folglich ist auch $L(M, \alpha) > \varphi$ und daher $L(M, \alpha) = \infty$, weil φ beliebig groß gewählt werden kann. Da dies für jedes α mit $0 < \alpha < \frac{1}{\nu} \lim \mu_n$ gilt, ergibt sich, wie behauptet, $\dim M \geqq \frac{1}{\nu} \varliminf_{n \to \infty} \mu_n$.

B) *Zu Satz* 30: Nach Satz 33 und Voraussetzung b) ist

$$\tau_2 (L_{\lambda_k}(M, \alpha) + \varphi) > \sum_{\mathfrak{i} \in V'} |\mathfrak{i}|^{\alpha} \geqq g_k \lambda^{\alpha}_k \tau_1 > \varphi \tau_4 \tau_1,$$

also $L_{\lambda_k}(M, \alpha) > \varphi \left(\frac{\tau_3 \tau_1}{\tau_2} - 1 \right)$. Bei geeigneter Wahl von τ_3 wird daher $L_{\lambda_k}(M, \alpha) > \varphi$, folglich auch $L(M, \alpha) > \varphi$, und da das für jedes $\varphi > 0$ gilt, folgt $L(M, \alpha) = \infty$, wie behauptet.

§ 6. Die Klasse der Untermengen einer festen Menge.

21. Für eine unendliche Menge $\mathfrak{A}$ von natürlichen Zahlen sei $[\mathfrak{A}]$ die Klasse ihrer unendlichen Untermengen. Es gilt (vgl. Nr. 3)

Satz 35. $\dim_r [\mathfrak{A}] = \underline{D}^*(\mathfrak{A})$.

Beweis. Sei H_n $(n = 1, 2, \ldots)$ die Klasse der unendlichen Mengen $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{B} \wedge [1, n] \leq \mathfrak{A} \wedge [1, n]$. Dann ist $H_n \geq H_{n+1}$ und $\bigwedge_{n=1}^{\infty} {}_{\Gamma}H_n = {}_{\Gamma}[\mathfrak{A}]$. Offenbar besteht ${}_{\Gamma}H_n$ aus denjenigen Intervallen $\mathfrak{h}_n^m$ $(m = 1, \ldots, g_n;\ g_n \geqq 1)$ der Länge $\lambda_n = \frac{1}{2^n}$, bei denen $(\mathfrak{h}_n^m) = 0, e_1 \ldots e_n$ ist[17]) mit $e_i = 0$ für $i \in \mathfrak{A} \wedge [1, n]$. Da unter den Ziffern $e_1, \ldots, e_n$ also $A(n)$ fest vorgeschriebene und $n - A(n) = A(n)$ willkürliche sind, ist die Anzahl solcher n-stelligen Dualbrüche $g_n = 2^{A(n)}$.

Von den Intervallen $(0, e_1 \ldots e_n 0)$ und $(0, e_1 \ldots e_n 1)$ sind, wenn $(0, e_1 \ldots e_n) \in {}_{\Gamma}H_n$ ist, entweder beide oder nur das erstere in ${}_{\Gamma}H_{n+1}$ enthalten, je nachdem ob $n + 1 \in \mathfrak{A}$ ist oder nicht. Also enthält jedes der Intervalle $\mathfrak{h}_n$ genau $2^{A(n+1)-A(n)} = \frac{g_{n+1}}{g_n}$ Intervalle $\mathfrak{h}_{n+1}$. Damit sind die Voraussetzungen von Satz 28 und Satz 29 mit $\nu = 1$ und $g_n = 2^{\mu_n n} = 2^{\frac{A(n)}{n} n}$ erfüllt, woraus nach (22)

$$\dim {}_{\Gamma}[\mathfrak{A}] = \frac{1}{\nu} \varliminf_{n \to \infty} \mu_n = \varliminf_{n \to \infty} \frac{A(n)}{n} = D^*(\mathfrak{A})$$

folgt.

Beispiel. Sei $\Gamma(\mathfrak{A}) = 0{,}\overline{10}$, also $\mathfrak{A} = \{1, 3, 5, \ldots\}$. Dann haben die ersten Zeilen des zu ${}_{\Gamma}[\mathfrak{A}] = \bigwedge_{n=1}^{\infty} {}_{\Gamma}H_n$ gehörenden Graphen die Gestalt der Figur 3.

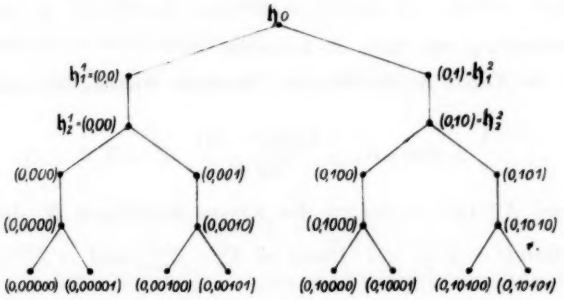

Fig. 3.

Folgerung. Ist $D^*(\mathfrak{A}) < 1$, so ist (vgl. Nr. **16**) das Lebesguesche Maß $L({}_{\Gamma}[\mathfrak{A}], 1) = 0$. Dieser Spezialfall von Satz 35 wurde 1947 ohne Beweis von Buck[18]) angegeben.

§ 7. Die Klasse der Mengen mit beschränkter Kettenlänge.

22. In § 3, Satz 22, wurde bewiesen, daß die Ketten einer pseudorationalen Menge $\mathfrak{Q}$ mit $D^*(\mathfrak{Q}) < 1$ eine bestimmte Maximallänge nicht überschreiten. Dadurch wird die Frage nach der Klasse K aller unendlichen Mengen mit beschränkter Kettenlänge nahegelegt. Die hierfür bekannten Resultate enthalten implizit den

Satz 36. *Fast alle Mengen natürlicher Zahlen enthalten Ketten beliebiger Länge, d. h. es ist* $L({}_{\Gamma}K, 1) = 0$.

Beweis. Hardy und Littlewood [6] haben bewiesen, daß bei einer ganzwertigen Funktion $g(x)$ mit $g(x+1) > g(x)$ die Zahlen $\varrho g(x) - [\varrho g(x)]$ für fast alle ϱ $(0 \leqq \varrho \leqq 1)$ im

[17]) Bezeichnungen gemäß Nr. 4.

[18]) *Buck* [5], Seite 419, Fußnote [4]). Wie aus einer brieflichen Mitteilung von Herrn Prof. *Buck* an Herrn Prof. *Rohrbach* hervorgeht, wird der Beweis wahrscheinlich in den Proc. Amer. Math. Soc. erscheinen.

Intervall (0; 1) überall dicht[19]) liegen. Das besagt für $g(x) = 2^x$ in Verbindung mit der beim Beweis von Satz 11 verwendeten Gleichung: Für fast alle $\varrho = \Gamma(\mathfrak{A}) = 0, e_1 e_2 \ldots e_i \ldots$ liegen die Zahlen

$$\varrho 2^x - [\varrho 2^x] = \Gamma(\mathfrak{A}^{(-x)}) = 0, e_{x+1} e_{x+2} \ldots \qquad (x = 1, 2, \ldots)$$

im Intervall (0; 1) überall dicht. Ist also $0, f_1 \ldots f_i$ ein beliebiger abbrechender Dualbruch, so gibt es für fast alle Mengen $\mathfrak{A}$ ein $x \geqq 0$, so daß $\Gamma(\mathfrak{A}^{(-x)})$ im Intervall $(0, f_1 \ldots f_i)$ liegt. Hieraus folgt für den Fall $f_1 = \cdots = f_i = 1$, daß zu fast allen Mengen $\mathfrak{A}$ ein x mit $[x+1, x+i] \leq \mathfrak{A}$ existiert. M. a. W.: Bei festem $i \geqq 2$ ist für die Klasse K_i derjenigen $\mathfrak{A}$, welche keine Kette von i (oder mehr) Elementen enthalten, $L({}_rK_i, 1) = 0$. Da ${}_rK = \bigvee_{i=2}^{\infty} {}_rK_i$, ist somit nach (18) auch $L({}_rK, 1) = \sum_{i=2}^{\infty} L({}_rK_i, 1) = 0$.

Mit Satz 36 läßt sich auf Grund von Satz 22 nun auch folgende Behauptung von Buck[8]) beweisen.

Satz 37. *Für die Menge D_0' der Dualwerte der pseudorationalen Mengen ist $L(D_0', 1) = 0$.*

Beweis. Sei M_1 die Menge der $\psi \in D_0'$ mit $\Delta^*(\psi) < 1$, $M_2 = D_0' - M_1$ die Menge der $\psi \in D_0'$ mit $\Delta^*(\psi) = 1$. Spiegelt man M_2 am Punkt $\frac{1}{2}$, so geht jedes $\psi \in M_2$ in $1 - \psi$ mit $\Delta^*(1 - \psi) = 0$, also mit $1 - \psi \in M_1$ über. Daher ist $L(M_2, 1) \leqq L(M_1, 1)$. Andererseits ist nach Satz 22 für jedes $\psi \in M_1$ bei der durch $\psi = \Gamma(\mathfrak{Q})$ definierten Menge $\mathfrak{Q}$ die Länge der Ketten beschränkt, also $\psi \in {}_rK$ und daher $M_1 \leq {}_rK$.

Nach Satz 36 ist somit $L(M_2, 1) = L(M_1, 1) = 0$ und folglich wegen $D_0' = M_1 \vee M_2$ auch $L(D_0', 1) = 0$.

23. Als Verschärfung von Satz 36 beweisen wir:

Satz 38. *Für die Klasse K_i der Mengen, die keine Ketten von i (oder mehr) Elementen enthalten, gilt*

$$\frac{i-1}{i} \leqq \dim {}_rK_i \leqq \frac{\log(2^i - 1)}{\log 2^i} \quad (i = 2, 3, \ldots).$$

Beweis. a) Sei $X_n^{(i)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ die Klasse derjenigen $\mathfrak{A}$, die keine der Zahlen $i, 2i, \ldots, ni$ enthalten $(i = 2, 3, \ldots)$. Dann ist $X_n^{(i)} \geq X_{n+1}^{(i)}$ und $\bigwedge_{n=1}^{\infty} X_n^{(i)} \leq K_i$, da die Mengen $\mathfrak{A} \in \bigwedge_{n=1}^{\infty} X_n^{(i)}$ keine der Zahlen ni $(n = 1, 2, \ldots)$, also auch keine i-gliedrige Kette enthalten. ${}_rX_n^{(i)}$ besteht aus denjenigen Intervallen $\mathfrak{x}_{n,i}^m$ $(m = 1, \ldots, g_n^{(i)};\ g_n^{(i)} \geqq 1)$ der Länge $\lambda_n^{(i)} = \frac{1}{2^{ni}}$, bei denen $(\mathfrak{x}_{n,i}^m) = 0, e_1 \ldots e_{ni}$ ist mit $e_i = e_{2i} = \cdots = e_{ni} = 0$. Von den in Ziffern eines solchen Dualbruches $(\mathfrak{x}_{n,i}^m)$ sind also n festgelegt, die übrigen $(i-1)n$ willkürlich. Daher ist $g_n^{(i)} = 2^{n(i-1)}$. Da offenbar jedes $\mathfrak{x}_{n,i}^m$ genau $\frac{g_{n+1}^{(i)}}{g_n^{(i)}} = 2^{i-1}$ Intervalle $\mathfrak{x}_{n+1,i}$ enthält, sind Satz 28 und Satz 29 mit $M = \bigwedge_{n=1}^{\infty} {}_rX_n^{(i)}$, $\nu = i$, $\mu_n = i - 1$ anwendbar, und es folgt

$$\dim {}_rK_i \geqq \dim \bigwedge_{n=1}^{\infty} {}_rX_n^{(i)} = \frac{i-1}{i}. \tag{36}$$

b) Sei $W_n^{(i)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ die Klasse derjenigen $\mathfrak{A}$, die keine der Ketten $[1, i]$, $[i+1, 2i], \ldots, [(n-1)i + 1, ni]$ vollständig enthalten $(i = 2, 3, \ldots)$. Dann ist $W_n^{(i)} \geq W_{n+1}^{(i)}$ und $\bigwedge_{n=1}^{\infty} W_n^{(i)} > K_i$, da die Mengen $\mathfrak{A} \in K_i$ keine i-gliedrigen Ketten, also auch

[19]) Eine Menge M heißt bekanntlich *überall dicht* im Intervall (0; 1), wenn jedes Teilintervall einen Punkt von M enthält.

keine der speziellen Ketten $[(n-1)\,i+1, ni]$ $(n=1, 2, \ldots)$ enthalten. ${}_rW_n^{(i)}$ besteht aus 2^i-1 Intervallen der Länge $\frac{1}{2^i}$, nämlich aus allen Intervallen $(0, e_1 \ldots e_i)$ mit Ausnahme von $(0, \underbrace{11\ldots1}_{i})$. Besteht ${}_rW_n^{(i)}$ aus $g_{n,i}$ Intervallen $\mathfrak{w}_{n,i}^m$ $(m=1, \ldots, g_{n,i})$ der Länge $\lambda_{n,i}=\frac{1}{2^{ni}}$, so enthält jedes von ihnen 2^i-1 Intervalle $\mathfrak{w}_{n+1,i}$; denn ist etwa $\mathfrak{w}_{n,i}=(0, e_1 \ldots e_{ni})$, so sind zu $\mathfrak{w}_{n,i}$ alle Intervalle der Form $(0, e_1 \ldots e_{ni} f_1 \ldots f_i)$ mit Ausnahme von $(0, e_1 \ldots e_{ni}\underbrace{11\ldots1}_{i})$ unmittelbar untergeordnet. Daher ist $\frac{g_{n+1,i}}{g_{n,i}}=2^i-1$, so daß nach Satz 28 und Satz 29 mit $M=\bigwedge_{n=1}^{\infty} {}_rW_n^{(i)}$, $\nu=i$, $g_n=(2^i-1)^n=2^{n\mu_n}$, $\mu_n=\frac{\log(2^i-1)}{\log 2}$

$$\dim {}_rK_i \leqq \dim \bigwedge_{n=1}^{\infty} {}_rW_n^{(i)}=\frac{\log(2^i-1)}{i\log 2} \tag{37}$$

wird. (36) und (37) ergeben zusammen die Behauptung.

Als unmittelbare Folgerung aus Satz 38 ergibt sich nach Satz 27 wegen $K=\bigvee_{i=2}^{\infty} K_i$

$$\dim {}_rK=\overline{\underset{i=2,3,\ldots}{\mathrm{fin}}}\ \dim {}_rK_i=1.$$

Dies besagt zusammen mit Satz 36 gewissermaßen, daß ${}_rK$ so umfassend ist, wie eine Menge vom Maße null nur irgend sein kann.

24. Nachdem in Nr. **23** die ungefähre Größe der Zahlen $\dim {}_rK_i$ ermittelt ist, sollen sie exakt bestimmt werden. Es gilt

Satz 39. *Sei γ_i die positive Wurzel*[20]) *der Gleichung*

$$\xi^i-\sum_{j=0}^{i-1}\xi^j=0. \tag{38}$$

Dann ist

$$\dim {}_rK_i=\frac{\log\gamma_i}{\log 2}.$$

Der *Beweis* von Satz 39 erfolgt in mehreren Schritten mittels der Sätze 40 bis 48.

Sei $V_n^{(i)}$ die Klasse derjenigen $\mathfrak{A}$, bei denen $[1, n]\wedge\mathfrak{A}$ keine i-gliedrigen Ketten enthält. Dann ist $V_n^{(i)}\geqq V_{n+1}^{(i)}$ und $K_i=\bigwedge_{n=1}^{\infty} V_n^{(i)}$. Bezeichnet man die Anzahl der n-stelligen Dualbrüche $0, e_1 \ldots e_n$, unter deren Ziffern nicht i aufeinanderfolgende Einsen vorkommen, mit $h_i(n)$ $(n=1, 2, \ldots)$, so besteht also $V_n^{(i)}$ aus $h_i(n)$ Intervallen $\mathfrak{v}_{i,n}^m$ der Länge $\lambda_n=\frac{1}{2^n}$. Um die Hilfsmittel des § 5 heranziehen zu können, muß man zunächst das asymptotische Verhalten von $h_i(n)$ feststellen.

Satz 40. *Setzt man $h_i(0)=1$, so gelten die Beziehungen*

$$h_i(n)=2^n \qquad (n=0, \ldots, i-1), \tag{39}$$

$$h_i(n+1)=\sum_{j=0}^{i-1} h_i(n-j) \qquad (n\geqq i-1), \tag{40}$$

$$h_i(n+1)=2h_i(n)-h_i(n-i) \qquad (n\geqq i). \tag{41}$$

Beweis. (39) folgt aus der Tatsache, daß für $0<n<i$ keiner der 2^n vorhandenen n-stelligen Dualbrüche eine Sequenz von i Einsen enthält. — Zu festem j mit $0\leqq j<i$ möge es $r_j(n+1)$ Intervalle $\mathfrak{v}_{i,n+1}$ geben $(n+1\geqq i)$, bei denen der Dualbruch $(\mathfrak{v}_{i,n+1})$

[20]) Daß (38) genau eine positive Wurzel hat, folgt aus bekannten Sätzen der Algebra.

mit einer Sequenz von genau j Einsen endigt, d. h. bei denen die j letzten Ziffern $= 1$ sind und die unmittelbar vorausgehende $= 0$ ist. Dann ist

$$h_i(n+1) = \sum_{j=0}^{i-1} r_j(n+1). \tag{42}$$

Bei einem solchen Dualbruch $(\mathfrak{v}_{i,n+1}) = 0, e_1 \ldots e_{n+1} = 0, e_1 \ldots e_{n-j} \underbrace{01\ldots1}_{j}$ ist $(0, e_1 \ldots e_{n-j}) \in V_{n-j}^{(i)}$. Da auch umgekehrt aus $(0, e_1 \ldots e_{n-j}) \in V_{n-j}^{(i)}$ immer

$$(0, e_1 \ldots e_{n-j} \underbrace{01\ldots1}_{j}) \in V_{n+1}^{(i)}$$

folgt, ist $r_j(n+1) = h_i(n-j)$, so daß (40) aus (42) folgt. Somit ist

$$h_i(n+1) - h_i(n) = \sum_{j=0}^{i-1} h_i(n-j) - \sum_{j=1}^{i} h_i(n-j) = h_i(n) - h_i(n-i) \qquad (n \geqq i).$$

Damit ist auch (41) bewiesen.

Es werde $\dfrac{h_i(n)}{h_i(n-1)} = \beta_{i,n} (n = 1, 2, \ldots)$ gesetzt. Nach (39) ist dann $\beta_{i,n} = 2$ für $0 < n < i$, ferner nach (40) für $n \geqq i$

$$\beta_{i,n} = \frac{h_i(n-1) + h_i(n-2) + \cdots + h_i(n-i)}{h_i(n-1)} \tag{43}$$

$$= 1 + \frac{1}{\beta_{i,n-1}} + \frac{1}{\beta_{i,n-1}\beta_{i,n-2}} + \cdots + \frac{1}{\beta_{i,n-1}\beta_{i,n-2}\cdots\beta_{i,n-i+1}}$$

und nach (41) für $n \geqq i+1$

$$\beta_{i,n} = \frac{h_i(n)}{h_i(n-1)} = 2 - \frac{h_i(n-i-1)}{h_i(n-1)} = 2 - \frac{1}{\beta_{i,n-1}\beta_{i,n-2}\cdots\beta_{i,n-i}}. \tag{44}$$

Im Fall $i = 2$ ist also, wenn $\beta_{2,0} = 1$ gesetzt wird, $\beta_{2,n} = 1 + \dfrac{1}{\beta_{2,n-1}}$ $(n \geqq 1)$, d. h. die $\beta_{2,n}$ sind die Näherungsbrüche des Kettenbruches

$$\gamma_2 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

der die positive Nullstelle des Polynoms $\xi^2 - \xi - 1 = 0$ darstellt. Es soll bewiesen werden, daß auch für jedes andere $i \geqq 2$ der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_{i,n}$ existiert und $= \gamma_i$ ist. Dazu schicken wir einige Hilfsbetrachtungen voraus.

Satz 41. $\qquad \beta_{i,i} \leqq \beta_{i,n} \leqq 2 \qquad (n = 1, 2, \ldots;\ i \geqq 2).$

Beweis. a) Der rechte Teil der Behauptung erhellt aus (39) für $1 \leqq n \leqq i-1$, aus (43) für $n = i$ $\left(\text{es ergibt sich nämlich } \beta_{i,i} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{i-1}} = 2 - \frac{1}{2^{i-1}}\right)$ und aus (44) für $n \geqq i$.

b) Sei $n > i$. Ist dann $(0, e_1 \ldots e_{n-i+1}) \in V_{n-i-1}^{(i)}$, so folgt $(0, e_1 \ldots e_{n-i-1} 0 f_i \ldots f_{i-1}) \in V_{n-1}^{(i)}$ für jedes der 2^{i-1} Intervalle dieser Form. Daher enthält jedes $\mathfrak{v}_{i,n-i-1}$ mindestens 2^{i-1} Intervalle $\mathfrak{v}_{i,n-1}$, d. h. es ist $\dfrac{h_i(n-1)}{h_i(n-i-1)} \leqq \dfrac{1}{2^{i-1}}$, und somit nach (44)

$$\beta_{i,n} = 2 - \frac{h_i(n-i-1)}{h_i(n-1)} \geqq 2 - \frac{1}{2^{i-1}} = \beta_{i,i}.$$

Damit ist auch der linke Teil der Behauptung bewiesen, da er für $1 \leqq n \leqq i$ trivialerweise gilt.

Satz 42. $\qquad \sum\limits_{j=1}^{i-1} j 2^{i-j-1} = 2^i - i - 1 \qquad (i \geqq 2).$

Beweis. Bezeichnet man die linke Seite mit $L(i)$, die rechte mit $R(i)$, so ist

$$2R(i) + i = 2(2^i - i - 1) + i = 2^{i+1} - i - 2 = R(i+1),$$

$$2L(i) + i = \sum_{j=1}^{i-1} j 2^{i-j} + i \cdot 2^0 = \sum_{j=1}^{i} j 2^{i-j} = L(i+1).$$

Da also beide Seiten derselben Rekursionsgleichung genügen, sind sie wegen $L(2) = 1 = R(2)$ identisch.

Satz 43. $$\sum_{j=1}^{i-1} j\beta_{i,i}^{i-j-1} < \beta_{i,i}^{i} \qquad (i \geqq 2).$$

Beweis. In der Summe

$$(45) \qquad \left(2 - \frac{1}{2^{i-1}}\right)^i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{i}{j} \frac{1}{2^{(i-1)j}} = 2^i - i + \binom{i}{2}\frac{1}{2^i} - + \cdots$$

ist das Betragsverhältnis zweier aufeinanderfolgenden Glieder

$$\frac{\binom{i}{j}}{\binom{i}{j+1}} 2^i = \frac{j+1}{i-j} 2^i \geqq \frac{1}{i} 2^i \geqq i \qquad (0 \leqq j \leqq i-1).$$

Da die Summe alterniert, ist somit nach Satz 42, wie behauptet,

$$\left(2 - \frac{1}{2^{i-1}}\right)^i > 2^i - i > \sum_{j=1}^{i-1} j 2^{i-j-1} > \sum_{j=1}^{i-1} j \left(2 - \frac{1}{2^{i-1}}\right)^{i-j-1}.$$

Satz 44. $$\beta_{i,i} < \gamma_i < 2 \qquad (i \geqq 2).$$

Beweis. An jeder Nullstelle ξ_0 des Polynoms (38) wird $\xi_0^i = \xi_0^{i-1} + \cdots + \xi_0^0$, so daß dort die Funktion

$$(46) \qquad F_i(\xi) = \frac{\xi^{i-1} + \cdots + \xi^0}{\xi^i} = \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi^2} + \cdots + \frac{1}{\xi^i} = \frac{1 - \frac{1}{\xi^i}}{\xi - 1}$$

den Wert $F_i(\xi_0) = 1$ annimmt. Dies tritt, da $F_i(\xi)$ für $\xi > 0$ monoton fällt und $F_i(0) = \infty$, $F_i(\infty) = 0$ ist, für genau ein positives ξ ein, d. h. (38) hat, wie schon bemerkt, genau eine positive Wurzel γ_i. Daher ist die Behauptung gleichbedeutend mit $F_i(2) < 1 < F_i(\beta_{i,i})$.

Nach (46) ist $F_i(2) = \dfrac{1 - \frac{1}{2^i}}{2 - 1} < 1$; also bleibt wegen $\beta_{i,i} = 2 - \dfrac{1}{2^{i-1}}$ noch

$$(47) \qquad \sum_{j=0}^{i-1} \left(2 - \frac{1}{2^{i-1}}\right)^j > \left(2 - \frac{1}{2^{i-1}}\right)^i$$

zu beweisen. Schreibt man jeden Summanden der linken Seite als eine Summe $\sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} (-1)^l 2^{j-i-l}$, so erkennt man wie oben, daß diese durch Abbruch nach dem zweiten Gliede verkleinert wird, also $\geqq 2^j - \dfrac{j}{2^{i-j}}$ ist. Ferner ist für $i \geqq 2$

$$\sum_{j=0}^{i-1} \frac{j}{2^{i-j}} = \frac{i-1}{2} + \frac{i-2}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{i-1}} \leqq \frac{i-1}{2} + \frac{i-2}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{i-2}}\right)$$
$$= \frac{i-1}{2} + \frac{i-2}{2} + \frac{i-2}{2^i} \leqq i - \frac{3}{2}.$$

Daher wird

$$(48) \qquad \sum_{j=0}^{i-1} \left(2 - \frac{1}{2^{i-1}}\right)^j \geqq -i + \frac{3}{2} + \sum_{j=0}^{i-1} 2^j = 2^i - i + \frac{1}{2}.$$

Für die rechte Seite von (47) erhält man nach (45)

$$\left(2 - \frac{1}{2^{i-1}}\right)^i \leqq 2^i - i + \frac{i(i-1)}{2^{i+1}} \leqq 2^i - i + \frac{3}{8} \qquad (i \geqq 2).$$

Dies ergibt zusammen mit (48) wegen $\frac{1}{2} > \frac{3}{8}$ die Behauptung (47).

Satz 45. *Für $\xi \geqq \beta_{i,i}$ ist*

$$|F'_{i-1}(\xi)| \leqq |F'_{i-1}(\beta_{i,i})| = \varepsilon_i < 1 \qquad \left(i \geqq 2;\, F_1(\xi) = \frac{1}{\xi}\right).$$

Beweis. Da $|F'_{i-1}(\xi)| = \frac{1}{\xi^2} + \frac{2}{\xi^3} + \cdots + \frac{i-1}{\xi^i}$ für $\xi > 0$ monoton fällt, braucht nur $|F'_{i-1}(\beta_{i,i})| < 1$, d. h.

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\beta_{i,i}^2} + \frac{2}{\beta_{i,i}^3} + \cdots + \frac{i-1}{\beta_{i,i}^i} = \frac{\sum_{j=1}^{i-1} j\beta_{i,i}^{i-j-1}}{\beta_{i,i}^i} < 1$$

gezeigt zu werden. Dies ist aber gerade die Aussage von Satz 43.

Satz 46. $\lim_{n\to\infty} \beta_{i,n} = \gamma_i \qquad (i \geqq 2).$

Beweis. Nach Satz 45 genügt der Nachweis, daß für jedes n mit $mi < n \leqq (m+1)\,i$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$

$$|\beta_{i,n} - \gamma_i| \leqq \frac{\varepsilon_i^m}{2^{i-1}}$$

ausfällt. Da nach Satz 41 und Satz 44 offenbar $|\beta_{i,n} - \gamma_i| \leqq 2 - \beta_{i,i} = \frac{1}{2^{i-1}}$ wird, ist die Behauptung für $m = 0$ richtig. Sie sei für irgendein $m \geqq 0$ bewiesen, es gelte also

$$(49) \qquad \gamma_i - \frac{\varepsilon_i^m}{2^{i-1}} \leqq \beta_{i,n} \leqq \gamma_i + \frac{\varepsilon_i^m}{2^{i-1}} \qquad (mi < n \leqq (m+1)\,i).$$

Dann ist wegen (43)

$$\beta_{i,(m+1)i+1} \geqq 1 + \frac{1}{\gamma_i + \frac{\varepsilon_i^m}{2^{i-1}}} + \cdots + \frac{1}{\left(\gamma_i + \frac{\varepsilon_i^m}{2^{i-1}}\right)^{i-1}} = 1 + F_{i-1}\left(\gamma_i + \frac{\varepsilon_i^m}{2^{i-1}}\right).$$

Weiter ist nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$F_{i-1}\left(\gamma_i + \frac{\varepsilon_i^m}{2^{i-1}}\right) = F_{i-1}(\gamma_i) + \frac{\varepsilon_i^m}{2^{i-1}} F'_{i-1}(\gamma_i + \vartheta) \qquad \left(0 < \vartheta < \frac{\varepsilon_i^m}{2^{i-1}}\right)$$

und daraus folgt, da wegen $\gamma_i + \vartheta > \gamma_i > \beta_{i,i}$ nach Satz 45 $|F'_{i-1}(\gamma_i + \vartheta)| \leqq \varepsilon_i$ ausfällt, $\beta_{i,(m+1)i+1} \geqq 1 + F_{i-1}(\gamma_i) - \frac{\varepsilon_i^{m+1}}{2^{i-1}}$. Wie sich aus der Identität $\gamma_i^i = \gamma_i^{i-1} + \cdots + \gamma_i^0$ bei Division durch γ_i^{i-1} ergibt, ist $\gamma_i = 1 + F_{i-1}(\gamma_i)$, also

$$\beta_{i,(m+1)i+1} \geqq \gamma_i - \frac{\varepsilon_i^{m-1}}{2^{i-1}}.$$

Setzt man andererseits $\gamma_i - \beta_{i,i} = \eta \left(0 < \eta < \frac{1}{2^{i-1}}\right)$, so wird, da ja $\beta_{i,n} \geqq \beta_{i,i}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ist, nach (43) und Satz 45

$$\begin{aligned} \beta_{i(m+1)i+1} &\leqq 1 + F_{i-1}(\beta_{i,i}) = 1 + F_{i-1}(\gamma_i - \eta) \\ &= 1 + F'_{i-1}(\gamma_i) - \eta F'_{i-1}(\gamma_i - \vartheta), \end{aligned}$$

wo $0 < \vartheta' < \eta$ ist, und weiter ergibt sich nach derselben Schlußweise wie oben wegen $\gamma_i - \vartheta' > \gamma_i - \eta = \beta_{i,i}$

$$\beta_{i,(m+1)i+1} \leqq \gamma_i + \frac{\varepsilon_i^{m+1}}{2^{i-1}}.$$

Somit ist (49) für $n = (m+1)\,i + 1$ und, wie man durch Induktion nach n bei passender Induktionsvoraussetzung (49) erkennt, um so mehr für jedes größere n, also insbesondere für die n mit $(m+1)\,i + 1 < n \leqq (m+2)\,i$ richtig. Folglich gilt (49) auch für $m+1$ statt m und daher allgemein.

Satz 47. $h_i(n) = 2^{n\varkappa_i}, \ \varkappa_i = \frac{\log \gamma_i}{\log 2} + o(1) \qquad (i \geqq 2 \text{ fest};\ n = 1, 2, \ldots).$

Beweis. Wegen der Festsetzung $h_i(0) = 1$ wird

$$h_i(n) = \prod_{l=1}^{n} \frac{h_i(l)}{h_i(l-1)} = \prod_{l=1}^{n} \beta_{i,l} = 2^{\lambda_i} \text{ mit } \lambda_i = \frac{1}{\log 2} \sum_{l=1}^{n} \log \beta_{i,l},$$

und da wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_{i,n} = \gamma_i$ auf Grund des Satzes von der Konvergenz des arithmetischen Mittels

$$\sum_{l=1}^{n} \log \beta_{i,l} = n \sum_{l=1}^{n} \frac{\log \beta_{i,l}}{n} = n\,(\log \gamma_i + o(1))$$

ist, folgt somit die Behauptung.

25. Auf Grund von Satz 47 sind für ${}_rK_i = \bigwedge\limits_{n=1}^{\infty} {}_rV_n^{(i)}$ die Voraussetzungen von Satz 28 und die Voraussetzung a) von Satz 30 mit $\underline{\lim}\, \mu_n = \mu = \dfrac{\log \gamma_i}{\log 2}$ und $\nu = 1$ erfüllt. Zum Abschluß des Beweises von Satz 39 fehlt daher noch der Nachweis von

Satz 48. *Bei*

$${}_rK_i = \bigwedge_{n=1}^{\infty} {}_rV_n^{(i)}$$

(wo ${}_rV_n^{(i)}$ aus $h_i(n)$ Intervallen $\mathfrak{v}_{i,n}^m$ der Länge $\lambda_n = \dfrac{1}{2^n}$ besteht), wird Voraussetzung b) *von Satz* 30 *für jedes α mit $0 < \alpha < \dfrac{\log \gamma_i}{\log 2}$ durch $\tau_1 = \dfrac{1}{2^\alpha}$ erfüllt.*

Beweis. Sei $i \geqq 2$ fest. Die Behauptung ist gleichbedeutend mit der Aussage, daß für jede aus endlich vielen der Intervalle $\mathfrak{v}_{i,n}^m$ bestehende Menge Y_i mit $Y_i \supseteq {}_rK_i$ und $\max\limits_{\mathfrak{v}\in Y_i} |\mathfrak{v}| = \lambda_k$ ($k \geqq i$ in der Bedeutung von Satz 30)

$$\sum_{\mathfrak{v}\in Y_i} |\mathfrak{v}|^\alpha \geqq \frac{h_i(k)}{2^{\alpha k}} \cdot \frac{1}{2^\alpha} \qquad \left(\alpha \text{ fest},\ 0 < \alpha < \frac{\log \gamma_i}{\log 2}\right) \tag{50}$$

gilt. Sei $\min\limits_{\mathfrak{v}\in Y_i} |\mathfrak{v}| = \lambda_{k''}$ ($k'' \geqq k$). Da es für festes m $(1 \leqq m \leqq h_i(k))$ nur endlich viele aus Intervallen $\mathfrak{v}_{i,n}$ bestehende Mengen S^m mit $S^m \geqq {}_rK_i \wedge \mathfrak{v}_{i,k}^m$ gibt, bei denen $\lambda_{k''} \leqq |\mathfrak{v}| \leqq \lambda_k$ ist für jedes $\mathfrak{v} \in S^m$, existiert unter ihnen eine Menge $S_{k,k''}^m$, für die der Ausdruck $\sum\limits_{\mathfrak{v}\in S^m} |\mathfrak{v}|^\alpha$ sein Minimum erreicht. Dieses $S_{k,k''}^m$ überdeckt keinen inneren Punkt seiner Intervalle mehrfach. Da Y_i eine Vereinigung $\bigvee\limits_{m=1}^{h_i(k)} S^m$ von irgendwelchen S^m ist, wird somit

$$\sum_{\mathfrak{v}\in Y_i} |\mathfrak{v}|^\alpha \geqq \sum_{m=1}^{h_i(k)} \sum_{\mathfrak{v}\in S_{k,k''}^m} |\mathfrak{v}|^\alpha.$$

Hieraus folgt (50), sobald

$$\sum_{\mathfrak{v}\in S_{k,k''}^m} |\mathfrak{v}|^\alpha \geqq \frac{1}{2^{(k+1)\alpha}} \qquad (m = 1, \ldots, h_i(k)) \tag{51}$$

bewiesen sein wird.

Sei $\mathfrak{v}_{i,k}^m = (0, e_1 \ldots e_k) = (0, e_1 \ldots e_{k-j} \underbrace{11\ldots1}_{j})$, wo $0 \leqq j < i$, $e_{k-j} = 0$ ist. Für $k'' - k = 0$ ist $S_{k,k''}^m = \{\mathfrak{v}_{i,k}^m\}$, so daß (51) wegen $\dfrac{1}{2^{\alpha k}} > \dfrac{1}{2^{\alpha(k+1)}}$ erfüllt ist. Sei (51) für $k'' - k = 0, 1, 2, \ldots, d$ $(d \geqq 0)$ bewiesen. Dann kann für $k'' - k = d + 1$ nur einer der beiden folgenden Fälle eintreten:

A) Es gibt ein Intervall $\mathfrak{v}_{i,k''} \in S_{k,k''}^m$, etwa das Intervall $\mathfrak{v}_{i,k''}^{p_0}$.

B) Es ist $S_{k,k''}^m = S_{k,k''-1}^m$. Da (51) im Falle B) nach Induktionsvoraussetzung erfüllt ist, braucht man nur A) zu betrachten. Das zu $\mathfrak{v}_{i,k''}^{p_0}$ unmittelbar übergeordnete Intervall $\mathfrak{v}_{i,k''-1}^{q_1}$ gehört wegen verbotener Doppelüberdeckung nicht zu $S_{k,k''}^m$. Also darf kein

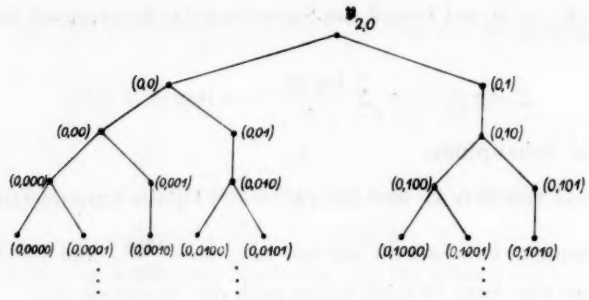

Fig. 4.

Der zu $rK_2 = \bigwedge_{n=1}^{\infty} V_n^{(i)}$ gehörende Graph.

zu $\mathfrak{v}_{i,k''}^{p_0}$ unmittelbar nebengeordnetes Intervall $\mathfrak{v}_{i,k''}^{q_0}$ existieren; denn sonst wäre für die Menge $S^* = (S_{k,k''}^m \vee \{\mathfrak{v}_{i,k''-1}^{q_1}\}) - \{\mathfrak{v}_{i,k''}^{p_0}, \mathfrak{v}_{i,k''}^{q_0}\}$

$$\sum_{\mathfrak{v}\in S^*} |\mathfrak{v}|^\alpha = \sum_{\mathfrak{v}\in S_{k,k''}^m} |\mathfrak{v}|^\alpha + \frac{1}{2^{(k''-1)\alpha}} - \frac{2}{2^{k''\alpha}} < \sum_{\mathfrak{v}\in S_{k,k''}^m} |\mathfrak{v}|^\alpha,$$

im Widerspruch zur Definition von $S_{k,k''}^m$. Demnach ist der Dualbruch $(\mathfrak{v}_{i,k''}^{p_0})$ von der Form $0, e_1 \ldots e_{k''-i} \underbrace{11\ldots1}_{i-1}0$, wo folglich $e_{k''-i} = 0$ ist. Da aber $(\mathfrak{v}_{i,k''}^{p_0})$ mit

$$(\mathfrak{v}_{i,k}^m) = 0, e_1 \ldots e_{k-j} \underbrace{11\ldots1}_{j}$$

wegen $\mathfrak{v}_{i,k''}^{p_0} < \mathfrak{v}_{i,k}^m$ in den ersten k Ziffern übereinstimmt, ist entweder a) $k'' - i \leqq k - j$ oder b) $k'' - i > k$.

a1) $d + 1 = k'' - k < i - j$. Da unter den $\mathfrak{v}_{i,k''} \leqq \mathfrak{v}_{i,k}^m$ alle 2^{d+1} Intervalle der Form $\mathfrak{v}_{i,k''} = (0, e_1 \ldots e_{k-j} \underbrace{11\ldots1}_{j} f_1 \ldots f_{d+1})$ auftreten, existiert zu jedem von ihnen ein unmittelbar nebengeordnetes Intervall. Daher ist A) in diesem Fall unhaltbar, so daß B) und damit nach Induktionsvoraussetzung auch (51) gilt.

a2) $d + 1 = k'' - k = i - j$. Ersichtlich ist $S_{k,k''}^m \wedge \mathfrak{v}_{i,k''-1}^{q_1} = \mathfrak{v}_{i,k''}^{p_0}$. Es werde $\mathfrak{v}_{i,k''-l+1}^{p_{l-1}} = (0, e_1 \ldots e_{k-j} \underbrace{11\ldots1}_{i-l}0)$ und $\mathfrak{v}_{i,k''-l}^{q_l} = (0, e_1 \ldots e_{k-j} \underbrace{11\ldots1}_{i-l})$ gesetzt

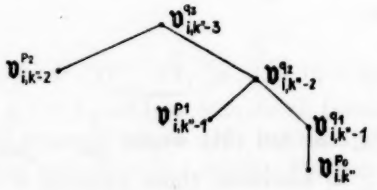

Fig. 5.

$(1 \leqq l \leqq d + 1)$, so daß sich das Schema der Figur 5 ergibt, die nach oben fortgesetzt zu denken ist. Dann möge für irgendein $l \geqq 1$ die im Fall $l = 1$ erwiesene Aussage

$$(52) \qquad S_{k,k''}^m \wedge \mathfrak{v}_{i,k''-l}^{q_l} = \mathfrak{v}_{i,k''}^{p_0} \vee \mathfrak{v}_{i,k''-1}^{p_1} \vee \cdots \vee \mathfrak{v}_{i,k''-l+1}^{p_{l-1}}$$

gelten. Folglich ist $\mathfrak{v}_{i,k''-l-1}^{p_{l+1}} \notin S_{k,k''}^{m}$ wegen verbotener Doppelüberdeckung. Da offenbar $\mathfrak{v}_{i,k''-l}^{p_l}$ und $\mathfrak{v}_{i,k''-l}^{q_l}$ die beiden zu $\mathfrak{v}_{i,k''-l-1}^{q_{l+1}}$ unmittelbar untergeordneten Intervalle sind, ist somit nach Definition von $S_{k,k''}^{m}$

$$S_{k,k''}^{m} \wedge \mathfrak{v}_{i,k''-l-1}^{q_{l+1}} = (S_{k,k''}^{m} \wedge \mathfrak{v}_{i,k''-l}^{p_l}) \vee (S_{k,k''}^{m} \wedge \mathfrak{v}_{i,k''-l}^{q_l})$$
$$= S_{k''-l,k''}^{p_l} \vee (S_{k,k''}^{m} \wedge \mathfrak{v}_{i,k''-l}^{q_l}).$$

Aus Teil a1) folgt bei entsprechenden Veränderungen

$$S_{k''-l,k''}^{p_l} = S_{k''-l,k''-1}^{p_l} = \cdots = S_{k''-l,k''-l}^{p_l} = \mathfrak{v}_{i,k''-l}^{p_l}.$$

Nach (52) wird also $S_{k,k''}^{m} \wedge \mathfrak{v}_{i,k''-l-1}^{q_{l+1}} = \mathfrak{v}_{i,k''}^{p_0} \vee \mathfrak{v}_{i,k''-1}^{p_1} \vee \cdots \vee \mathfrak{v}_{i,k''-l}^{p_l}$, d. h. (52) gilt auch für $l+1$ statt l und daher für jedes l mit $1 \leqq l \leqq d+1$. Somit ist wegen $\mathfrak{v}_{i,k''-d-1}^{q_{d+1}} = \mathfrak{v}_{i,k}^{m}$

$$S_{k,k''}^{m} \wedge \mathfrak{v}_{i,k''-d-1}^{q_{d+1}} = S_{k,k''}^{m} = \mathfrak{v}_{i,k''}^{p_0} \vee \mathfrak{v}_{i,k''-1}^{p_1} \vee \cdots \vee \mathfrak{v}_{i,k+1}^{p_d}$$

und daher nach (46)

$$\sum_{\mathfrak{v} \in S_{k,k''}^{m}} |\mathfrak{v}|^{\alpha} = \frac{1}{2^{(k+1)\alpha}} + \frac{1}{2^{(k+2)\alpha}} + \cdots + \frac{1}{2^{(k+i-j)\alpha}} = \frac{1}{2^{k\alpha}} F_{i-j}(2^{\alpha}),$$

d. h.

$$\sum_{\mathfrak{v} \in S_{k,k''}^{m}} |\mathfrak{v}|^{\alpha} \geqq \begin{cases} \dfrac{1}{2^{k\alpha}} F_1(2^{\alpha}) = \dfrac{1}{2^{(k+1)\alpha}}, & \text{wenn } j > 0, \\[2ex] \dfrac{1}{2^{k\alpha}} F_i(2^{\alpha}) > \dfrac{1}{2^{k\alpha}} F_i(\gamma_i) = \dfrac{1}{2^{k\alpha}}, & \text{wenn } j = 0. \end{cases}$$

b) $d+1 = k'' - k > i$. Wie unter a2) folgt die Existenz von Intervallen $\mathfrak{v}_{i,k''-l+1}^{p_{l-1}}$ und $\mathfrak{v}_{i,k''-l}^{q_l}$ $(l = 1, \ldots, i)$ derart, daß $\mathfrak{v}_{i,k''-l}^{q_l}$ zu $\mathfrak{v}_{i,k''-l+1}^{p_{l-1}}$ unmittelbar übergeordnet und zu $\mathfrak{v}_{i,k''-l}^{p_l}$ unmittelbar nebengeordnet ist, daß ferner $\mathfrak{v}_{i,k''-l}^{p_l} \in S_{k,k''}^{m}$ und (52) gilt.

Ersetzt man in $S_{k,k''}^{m}$ das System der Intervalle $\mathfrak{v}_{i,k''}^{p_0}, \mathfrak{v}_{i,k''-1}^{p_1}, \ldots, \mathfrak{v}_{i,k''-i+1}^{p_{i-1}}$ durch das Intervall $\mathfrak{v}_{i,k''-i}^{q_i}$, so entsteht eine Menge $S^* \geqq \mathfrak{v}_{i,k}^{m} \wedge {}_{r}K_i$ mit

$$\sum_{\mathfrak{v} \in S^*} |\mathfrak{v}|^{\alpha} = \sum_{\mathfrak{v} \in S_{k,k''}^{m}} |\mathfrak{v}|^{\alpha} - \frac{1}{2^{(k''-i)\alpha}} \left(\frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{2^{2\alpha}} + \cdots + \frac{1}{2^{i\alpha}}\right) + \frac{1}{2^{(k''-i)\alpha}}$$
$$= \sum_{\mathfrak{v} \in S_{k,k''}^{m}} |\mathfrak{v}|^{\alpha} + \frac{1}{2^{(k''-i)\alpha}} (1 - F_i(2^{\alpha})) < \sum_{\mathfrak{v} \in S_{k,k''}^{m}} |\mathfrak{v}|^{\alpha},$$

letzteres wegen $F_i(2\alpha) > F_i(\gamma_i) = 1$. Das widerspricht der Definition von $S_{k,k''}^{m}$ und beweist, daß die Annahme A) auch in diesem Fall unhaltbar ist, so daß B) und damit (51) gilt.

Somit ist Satz 48 und folglich auch Satz 39 bewiesen.

§ 8. Die Klasse der Mengen mit fester asymptotischer Dichte.

26. Eine Reihe von bekannten Resultaten über das asymptotische Verhalten der Größe $\frac{1}{x} \sum_{i=1}^{x} e_i$ bei dyadischen Zahlen $0, e_1 e_2 \ldots e_i \ldots$ lassen sich unmittelbar als Aussagen über die Klasse aller unendlichen Mengen $\mathfrak{A}$ von natürlichen Zahlen mit einer bestimmten Eigenschaft hinsichtlich ihrer asymptotischen Dichte interpretieren. Das älteste Ergebnis in dieser Richtung ist der

Satz von Borel[21]). *Für fast alle Zahlen ϱ mit $0 \leqq \varrho \leqq 1$ ist $\Delta^*(\varrho) = \frac{1}{2}$.* M. a. W.: *Fast alle Mengen $\mathfrak{A}$ haben die natürliche Dichte $D^*(\mathfrak{A}) = \frac{1}{2}$.*

[21]) [3].

Daraus ergibt sich eine unmittelbare Folgerung über die Mengen der Form $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$. Ordnet man jedem Mengenpaar $(\mathfrak{A}; \mathfrak{B})$ den Punkt $(\varrho; \sigma)$ mit den Koordinaten $\varrho = \Gamma(\mathfrak{A})$, $\sigma = \Gamma(\mathfrak{B})$ eines ebenen kartesischen Systems zu, so gilt nämlich

Satz 49. *Für fast alle Mengenpaare* $(\mathfrak{A}; \mathfrak{B})$ *(d. h. bis auf eine Klasse, bei der die Menge der zugehörigen Punkte* $(\varrho; \sigma)$ *vom ebenen Lebesgueschen Maß null ist) gilt* $D^*(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = 1$.

Beweis. Nach dem Satz von Borel ist $D^*(\mathfrak{A}) = D^*(\mathfrak{B}) = \frac{1}{2}$ für fast alle $(\mathfrak{A}; \mathfrak{B})$, und nach Satz 36 enthält bei fast allen $(\mathfrak{A}; \mathfrak{B})$ die Menge $\mathfrak{B}$ Ketten beliebiger Länge. Also gelten für fast alle $(\mathfrak{A}; \mathfrak{B})$ beide Aussagen zugleich. Da nach Ostmann [11]

$$\underline{D}^*(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \geqq \underline{D}^*(\mathfrak{A}) + \frac{i-1}{i}\, \underline{D}^*(\mathfrak{B})$$

wird, wenn $\mathfrak{B}$ eine i-gliedrige Kette enthält, ist somit für fast alle $(\mathfrak{A}; \mathfrak{B})$

$$\underline{D}^*(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \geqq \lim_{i \to \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{i-1}{i} \cdot \frac{1}{2}\right) = 1,$$

d. h. $\underline{D}^*(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = D^*(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = 1$.

Die Menge derjenigen ϱ, bei denen $\Delta^*(\varrho)$ nicht existiert oder $\neq \frac{1}{2}$ ist, hat nach dem Satz von Borel das Maß null. Aussagen über diese Menge haben (unabhängig voneinander) Knichal und Besicovitch mit Hilfe der Hausdorffschen Maßtheorie erarbeitet. Ihre Ergebnisse lassen sich mit Hilfe der Funktion

$$(53) \qquad d(\zeta) = \frac{\zeta \log \zeta + (1-\zeta) \log (1-\zeta)}{\log \frac{1}{2}} \qquad (0 < \zeta < 1,\ d(0) = d(1) = 0)$$

folgendermaßen formulieren:

Satz von Knichal[22]. *Sei* $\overline{A}_\varrho(x)$ *die Anzahl der Nullen unter den ersten* x *Ziffern von* ϱ $(0 \leqq \varrho \leqq 1)$ *und* $K'(\zeta)$ *die Menge derjenigen* ϱ, *für die es unendlich viele* x *mit* $\overline{A}_\varrho(x) < \zeta x$ $(0 < \zeta < \frac{1}{2})$ *gibt. Dann ist* $\dim K'(\zeta) = d(\zeta)$.

Satz von Besicovitch[23]. *Sei* $B(\zeta)$ *die Menge der* ϱ $(0 \leqq \varrho \leqq 1)$ *mit* $0 < \overline{\Delta}^*(\varrho) \leqq \zeta$, *wo* $0 < \zeta < \frac{1}{2}$ *ist. Dann ist* $\dim B(\zeta) = d(\zeta)$.

27. Es soll im folgenden ein Satz bewiesen werden, der die Sätze von Knichal und Besicovitch als Spezialfälle enthält. Dazu definieren wir für jedes ζ mit $0 \leqq \zeta \leqq 1$ die Klassen

$G_1(\zeta)$ = Klasse der Mengen $\mathfrak{A}$, bei denen $D^*(\mathfrak{A})$ existiert und $= \zeta$ ist,
$G_2(\zeta)$ = Klasse der Mengen $\mathfrak{A}$ mit $\underline{D}^*(\mathfrak{A}) = \zeta$,
$G_3(\zeta)$ = Klasse der Mengen $\mathfrak{A}$ mit $\overline{D}^*(\mathfrak{A}) = \zeta$,
$G_4(\zeta)$ = Klasse der Mengen $\mathfrak{A}$, bei denen ζ Häufungspunkt der Folge

$$\frac{A(x)}{x} \qquad (x = 1, 2, \ldots)$$

ist. Ersichtlich gelten die Beziehungen

$$G_1(\zeta) = G_2(\zeta) \wedge G_3(\zeta),$$
$$G_1(\zeta) \leq G_2(\zeta) \leq G_4(\zeta),$$
$$G_1(\zeta) \leq G_3(\zeta) \leq G_4(\zeta).$$

Wird die aus einer Punktmenge M durch Spiegelung am Punkt $\frac{1}{2}$ entstehende Menge mit $\widetilde{M}$ bezeichnet, so gilt ferner

Satz 50. $\qquad {}_rG_4(\zeta) = {}_r\widetilde{G}_4(1-\zeta) \qquad (0 \leqq \zeta \leqq 1).$

---

[22]) [8].
[23]) [1].

Beweis. Ist $\mathfrak{A} \in G_4(\zeta)$, so gibt es eine Folge x_m mit $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{A(x_m)}{x_m} = \zeta$. Dann ist $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{\bar{A}(x_m)}{x_m} = \lim\limits_{m\to\infty} \frac{x_m - A(x_m)}{x_m} = 1 - \zeta$. Daher folgt aus $\varrho \in {}_\Gamma G_4(1-\zeta)$ offenbar $1 - \varrho \in {}_\Gamma G_4(1-\zeta)$, d. h. $\varrho \in {}_\Gamma \tilde{G}_4(1-\zeta)$, und umgekehrt.

Betrachtet man speziell den kleinsten bzw. größten Häufungspunkt von $\frac{A(x)}{x}$, so erhält man

$$ {}_\Gamma G_2(\zeta) = \tilde{G}_3(1-\zeta) \quad \text{bzw.} \quad {}_\Gamma G_3(\zeta) = {}_\Gamma \tilde{G}_2(1-\zeta) \qquad (0 \leqq \zeta \leqq 1). $$

Satz 51. $G_4(\zeta) = \bigvee\limits_{0 \leqq \eta \leqq \zeta} (G_2(\eta)) \wedge \left(\bigvee\limits_{\zeta \leqq \eta \leqq 1} G_3(\eta) \right) \qquad (0 \leqq \zeta \leqq 1).$

Beweis. Die rechts stehende Klasse N enthält genau diejenigen $\mathfrak{A}$, bei denen $\underline{D}^*(\mathfrak{A}) \leqq \zeta \leqq \overline{D}^*(\mathfrak{A})$ ist. Daher folgt für $\mathfrak{A} \in N$ nach Satz 2, daß ζ Häufungspunkt der Folge $\frac{A(x)}{x}$, also $\mathfrak{A} \in G_4(\zeta)$ ist. Umgekehrt gilt für $\mathfrak{A} \in G_4(\zeta)$ trivialerweise $\underline{D}^*(\mathfrak{A}) \leqq \zeta \leqq \overline{D}^*(\mathfrak{A})$, also ist $N = G_4(\zeta)$.

In dieser Schreibweise erhält der Satz von Knichal die Gestalt

$$ \dim \bigvee_{0 \leqq \eta \leqq \zeta} {}_\Gamma G_2(\eta) = d(\zeta) \qquad (0 < \zeta < \tfrac{1}{2}). \tag{54} $$

Definiert man nämlich die Klasse $K(\zeta)$ durch $\tilde{K}'(\zeta) = {}_\Gamma K(\zeta)$, so ist $1 - \varrho \in {}_\Gamma K(\zeta)$ für jedes $\varrho \in K'(\zeta)$, und für die durch $1 - \varrho = \Gamma(\mathfrak{A})$ definierte Menge $\mathfrak{A} \in K(\zeta)$ wird $A(x) = \bar{A}_\varrho(x)$. Daher ist für jedes solche $\mathfrak{A}$ unendlich oft $A(x) < \zeta x$, also $\underline{D}^*(\mathfrak{A}) \leqq \zeta$ und somit ${}_\Gamma K(\zeta) \leqq \bigwedge\limits_{0 \leqq \eta \leqq \zeta} {}_\Gamma G_2(\eta)$. Andererseits ist für ζ' mit $\zeta < \zeta' < \frac{1}{2}$ bei jedem $\mathfrak{A} \in \bigvee\limits_{0 \leqq \eta \leqq \zeta} {}_\Gamma G_2(\eta)$ unendlich oft $A(x) < \zeta' x$, d. h. $\bigvee\limits_{0 \leqq \eta \leqq \zeta} {}_\Gamma G_2(\eta) \leqq {}_\Gamma K(\zeta')$. Also folgt, da die Dimension einer Punktmenge gegenüber Spiegelungen invariant ist, $\dim {}_\Gamma K(\zeta) = \dim K'(\zeta)$ und hieraus nach dem Satz von Knichal

$$ d(\zeta) \leqq \dim \bigvee_{0 \leqq \eta \leqq \zeta} {}_\Gamma G_2(\eta) \leqq d(\zeta') \qquad (0 < \zeta < \zeta' < \tfrac{1}{2}). $$

Dies liefert durch Grenzübergang $\zeta' \to \zeta$ wegen der Stetigkeit von $d(\zeta)$ die Gleichung (54).

Der Satz von Besicovitch ist offensichtlich gleichbedeutend mit

$$ \dim \bigvee_{0 \leqq \eta \leqq \zeta} {}_\Gamma G_3(\eta) = d(\zeta) \qquad (0 < \zeta < \tfrac{1}{2}). \tag{55} $$

Daß hier die (bei Besicovitch nicht zugelassene) Menge ${}_\Gamma G_3(0)$ in die Vereinigung mit aufgenommen werden darf, bestätigt man, wie beim Beweis von Satz 52 für $R(\zeta)$, leicht durch Grenzübergang $\zeta \to 0$.

28. Die angekündigte Verallgemeinerung der Sätze von Knichal und Besicovitch bringt nun

Satz 52. *Bei festem ζ sei $R(\zeta)$ die Vereinigung aller Klassen $G_4(\eta)$, für die η der Bedingung $|\frac{1}{2} - \eta| \geqq |\frac{1}{2} - \zeta|$ genügt. Ist dann $Q(\zeta)$ irgendeine Klasse mit $G_1(\zeta) \leqq Q(\zeta) \leqq R(\zeta)$, so gilt*

$$ \dim {}_\Gamma Q(\zeta) = d(\zeta) \qquad (0 \leqq \zeta \leqq 1). \tag{56} $$

Bemerkung. Hierin sind die Sätze (54) und (55) wegen

$$ G_1(\zeta) \leqq \bigvee_{0 \leqq \eta \leqq \zeta} G_j(\eta) \leqq \bigvee_{0 \leqq \eta \leqq \zeta} G_4(\eta) \leqq R(\zeta) \qquad (0 < \zeta < \tfrac{1}{2},\ j = 2 \text{ oder } 3) $$

enthalten. Ferner folgt, da auch die $G_j(\zeta)$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ zu den Klassen $Q(\zeta)$ gehören

$$ \dim {}_\Gamma G_j(\zeta) = d(\zeta) \qquad (0 \leqq \zeta \leqq 1;\ j = 1, 2, 3, 4). \tag{57} $$

Beweis von Satz 52. Ist der Satz für irgendein ζ bewiesen, so gilt er wegen

$$_rG_1(1-\zeta) = {_r\widetilde{G}_1}(\zeta) \leqq {_rQ}(1-\zeta) \leqq {_r\widetilde{R}}(\zeta) = {_rR}(1-\zeta)$$

und $d(\zeta) = d(1-\zeta)$ auch für $1-\zeta$. Gilt der Satz für jedes $\zeta > 0$, so ist wegen $_rR(0) \leqq {_rR}(\zeta)$ $(\zeta \geqq 0)$ offenbar $0 \leqq \dim {_rR}(0) \leqq \lim\limits_{\zeta\to 0} \dim {_rR}(\zeta) = 0$, d. h. er gilt auch für $\zeta = 0$. Daher kann $0 < \zeta \leqq \frac{1}{2}$ vorausgesetzt werden. Für solche ζ beweisen wir

$$\text{a) } \dim {_rG_1}(\zeta) \geqq d(\zeta), \qquad \text{b) } \dim {_rR}(\zeta) \leqq d(\zeta).$$

Beides zusammen ergibt dann die Behauptung (56).

a) Sei $M_n(s, \zeta)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ die Klasse derjenigen $\mathfrak{A}$, bei denen $A(is) = [i\zeta s]$ ist $(i = 1, \ldots, n;\ s \geqq 1$ fest). Dann ist $M_n(s, \zeta) \geqq M_{n+1}(s, \zeta)$, und für jede Menge $\mathfrak{A}$ aus $\bigwedge\limits_{n=1}^{\infty} M_n(s, \zeta) = M(s, \zeta)$ existiert, wie eine elementare Rechnung zeigt,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x} = \lim_{i\to\infty} \frac{A(is)}{is} = \lim_{i\to\infty} \frac{[i\zeta s]}{is} = \zeta.$$

Also ist $M(s, \zeta) \leqq G_1(\zeta)$.

$_rM_n(s, \zeta)$ besteht aus einer Anzahl $g_{n,s,\zeta}$ von Intervallen $\mathfrak{m}^m_{n,s,\zeta}$ $(m = 1, \ldots, g_{n,s,\zeta})$ der Länge $\frac{1}{2^{ns}}$. Ist etwa $\mathfrak{m}^m_{n,s,\zeta} = (0, e_1 \ldots e_{ns})$, so ist $\sum\limits_{i=1}^{ns} e_i = [n\zeta s]$ und daher für jedes Intervall $\mathfrak{m}_{n+1,s,\zeta} \leqq \mathfrak{m}^m_{n,s,\zeta}$ offenbar $\mathfrak{m}_{n+1,s,\zeta} = (0, e_1 \ldots e_{ns} f_1 \ldots f_s)$, wo

$$\sum_{i=1}^{s} f_i = [(n+1)s\zeta] - [ns\zeta]$$

ist. Setzt man $[(n+1)s\zeta] - [ns\zeta] = s\zeta_{n,s}$, so enthält demnach jedes Intervall $\mathfrak{m}_{n,s,\zeta}$ die gleiche Anzahl $\frac{g_{n+1,s,\zeta}}{g_{n,s,\zeta}} = \binom{s}{s\zeta_{n,s}}$ von Intervallen $\mathfrak{m}_{n+1,s,\zeta}$. Somit ist $g_{n,s,\zeta} = \prod\limits_{i=1}^{n} \binom{s}{s\zeta_{i,s}}$ da $g_{1,s,\zeta} = \binom{s}{[s\zeta]} = \binom{s}{\zeta_{1,s}s}$ ist. Da allgemein $\alpha - \beta - 1 \leqq [\alpha] - [\beta] \leqq \alpha - \beta + 1$ ist, wird definitionsgemäß $s\zeta - 1 \leqq s\zeta_{i,s} \leqq s\zeta + 1$ und folglich $\lim\limits_{s\to\infty} \zeta_{i,s} = \zeta$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Ferner ist $\zeta_{i,s} \geqq \zeta - \frac{1}{s}$, also $g_{n,s,\zeta} \geqq \left(\binom{s}{\left[\left(\zeta - \frac{1}{s}\right)s\right]}\right)^n = \binom{s}{[\zeta s - 1]}^n$, d. h. nach dem (anschließend bewiesenen) Satz 53 mit $\lambda(s) = \binom{s}{[\zeta s - 1]}$:

$$g_{n,s,\zeta} \geqq 2^{nsd_s(\zeta)}, \text{ wo } \lim_{s\to\infty} d_s(\zeta) = d(\zeta).$$

Auf $_rM(s,\zeta) = \bigwedge\limits_{n=1}^{\infty} M_n(s,\zeta)$ sind Satz 28 und Satz 29 mit $\nu = s$ und $\underline{\lim}\ \mu_n \geqq sd_s(\zeta)$ anwendbar, so daß $\dim {_rM}(s,\zeta) \geqq d_s(\zeta)$ folgt. Da das für jedes $s \geqq 1$ gilt und da $\bigvee\limits_{s=1}^{\infty} M(s,\zeta) \leqq G_1(\zeta)$, ist nach Satz 27

$$\dim {_rG_1}(\zeta) \geqq \dim \bigvee_{s=1}^{\infty} {_rM_1}(s,\zeta) = \overline{\operatorname{fin}}_{s=1,2,\ldots}\ d_s(\zeta) \geqq \lim_{s\to\infty} d_s(\zeta) = d(\zeta).$$

b) Ist $\zeta = \frac{1}{2}$, so wird nach Teil a) $\dim {_rR}(\zeta) \geqq \dim {_rG_1}(\zeta) \geqq d(\zeta) = 1$, also $\dim {_rR}(\zeta) = 1$. Es sei daher $0 < \zeta < \frac{1}{2}$. Setzt man dann $\bigvee\limits_{0 \leqq \eta \leqq \zeta} G_4(\eta) = R'(\zeta)$, so ist $_rR(\zeta) = {_rR'}(\zeta) \vee {_r\widetilde{R}}(\zeta)$, nach Satz 27 also $\dim {_rR}(\zeta) = \dim {_rR'}(\zeta)$. Sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, daß $\zeta + 2\varepsilon < \frac{1}{2}$ ist. Dann ist für jedes $\mathfrak{A} \in R'(\zeta)$, da ja die Folge $\frac{A(x)}{x}$ definitionsgemäß

einen Häufungspunkt $\eta \leqq \zeta$ hat, unendlich oft $A(x) < x(\zeta + \varepsilon)$. Also gibt es, wenn mit $J_n(\zeta + \varepsilon)$ die Klasse der $\mathfrak{A}$ mit $A(n) < n(\zeta + \varepsilon)$ bezeichnet wird, für jedes $\mathfrak{A} \in R'(\zeta)$ unendlich viele n mit $\mathfrak{A} \in J_n(\zeta + \varepsilon)$. Da ${}_rJ_n(\zeta + \varepsilon)$ aus $g_{n,\zeta+\varepsilon} = \sum\limits_{i=0}^{[(\zeta+\varepsilon)n]} \binom{n}{i}$ Intervallen der Länge $\frac{1}{2^n}$ besteht, bildet somit für jedes $m \geqq 1$ die Menge $\bigvee\limits_{n=m}^{\infty} J_n(\zeta + \varepsilon)$ eine $\frac{1}{2^m}$-Überdeckung von ${}_rR'(\zeta)$. Folglich wird nach Nr. **16** und Satz 53 mit $\lambda(n) = g_{n,\zeta+\varepsilon}$

$$L_{2^{-m}}({}_rR'(\zeta), d(\zeta+2\varepsilon)) \leqq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{g_{n,\zeta+\varepsilon}}{2^{nd(\zeta+2\varepsilon)}} = \sum_{m=n}^{\infty} 2^{n(d_n(\zeta+\varepsilon)-d(\zeta+2\varepsilon))},$$

wo $d_n(\zeta + \varepsilon) - d(\zeta + 2\varepsilon)$ gegen $d(\zeta + \varepsilon) - d(\zeta + 2\varepsilon) = -\delta < 0$ konvergiert und daher bei gegebenen $\varepsilon' > 0$ und δ' mit $0 < \delta' < \delta$ ein m existiert, so daß

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{g_{n,\zeta+\varepsilon}}{2^{nd(\zeta+2\varepsilon)}} \leqq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{2^{\delta' n}} = \frac{1}{2^{\delta' m}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\delta'}}} < \varepsilon'$$

wird. Daraus folgt $L({}_rR'(\zeta), d(\zeta + 2\varepsilon)) = 0$, und da das für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, ergibt sich schließlich $\dim {}_rR(\zeta) = \dim {}_rR'(\zeta) \leqq d(\zeta)$.

Damit fehlt zum Beweis von Satz 52 nur noch der (einem Hilfssatz von Besicovitch [1] nachgebildete)

Satz 53. *Sei $\lambda(s)$ eine Funktion mit $\binom{s}{[\zeta s - 1]} \leqq \lambda(s) \leqq \sum\limits_{i=0}^{[\zeta s]} \binom{s}{i}$; $\binom{s}{-1} = 0$. Dann ist $\lambda(s) = 2^{sd_s(\zeta)}$, wo $\lim\limits_{s \to \infty} d_s(\zeta) = d(\zeta)$ ist $(0 < \zeta \leqq \frac{1}{2})$.*

Beweis. Für i mit $0 \leqq i \leqq [\zeta s]$ ist

$$\binom{s}{i-1} : \binom{s}{i} = \frac{i}{s-i+1} < \frac{i}{s-i} \leqq \frac{\zeta s}{s - \zeta s} = \frac{\zeta}{1-\zeta}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Ungleichung und nachfolgende Summation erhält man

$$\binom{s}{i} < \frac{\zeta}{1-\zeta}\binom{s}{i+1} < \cdots < \left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right)^{[\zeta s]-i}\binom{s}{[\zeta s]},$$

$$\sum_{i=0}^{[\zeta s]} \binom{s}{i} < \binom{s}{[\zeta s]} \sum_{i=0}^{[\zeta s]} \left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right)^{[\zeta s]-i} < \binom{s}{[\zeta s]} \frac{1-\zeta}{1-2\zeta}.$$

Da für alle hinreichend großen s bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$

$$\binom{s}{[\zeta s - 1]} : \binom{s}{[\zeta s]} = \frac{[\zeta s]}{s - [\zeta s - 1]} > \frac{\zeta s - 1}{(1-\zeta)s + 2} > \left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right) + \varepsilon$$

und andererseits $\binom{s}{[\zeta s - 1]} < \binom{s}{[\zeta s]} < \sum\limits_{i=0}^{[\zeta s]} \binom{s}{i}$ ist, sind somit die Funktionen $\binom{s}{[\zeta s - 1]}$, $\binom{s}{[\zeta s]}$, $\lambda(s)$ und $\sum\limits_{i=0}^{[\zeta s]} \binom{s}{i}$ sämtlich von derselben Größenordnung. Daraus folgt die Behauptung; denn nach der Stirlingschen Formel ist, wenn $[\zeta s] = \zeta' s$ gesetzt wird,

$$\binom{s}{[\zeta s]} = \frac{s!}{(\zeta' s)!\,((1-\zeta')s)!} \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi\zeta(1-\zeta)s}} \cdot \frac{1}{\zeta^{s\zeta}(1-\zeta)^{s(1-\zeta)}} = 2^{s(d(\zeta)+o(1))}.$$

Literaturverzeichnis.

1. *A. S. Besicovitch*, On the sum of digits of real numbers represented in the dyadic system. Math. Ann. **110** (1934). 321–330.
2. *G. Birkhoff*, Lattice Theory, New York 1948.

3. *E. Borel*, Les probabilités denombrables et leurs applications arithmétiques, Rend. Circ. Mat. Palermo **27** (1909), 247–271.
4. *R. C. Buck*, The measure theoretic approach to density, Amer. Journ. of Math. **68** (1946), 560–580.
5. *E. F. Buck* und *R. C. Buck*, A note on finitely additive measures, Amer. Journ. of Math. **69** (1947), 413–420.
6. *G. Hardy — J. Littlewood*, The fractional part of $n^k\theta$, Acta Math. **37** (1914), 155–191.
7. *F. Hausdorff*, Dimension und äußeres Maß, Math. Ann. **79** (1918), 157–179.
8. *V. Knichal*, Dyadische Entwicklungen und Hausdorffsches Maß, Mém. Soc. Roy. Sci. Bohême, Classe des Sciences, 1933, Nr. XIV.
9. *K. Knopp*, Mengentheoretische Behandlung einiger Probleme der diophantischen Approximationen und der transfiniten Wahrscheinlichkeiten, Math. Ann. **95** (1925), 409–420.
10. *H.-H. Ostmann*, Untersuchungen über den Summenbegriff in der additiven Zahlentheorie, Math. Ann. **120** (1948), 165–196.
11. *H.-H. Ostmann*, Verfeinerte Lösung der asymptotischen Dichtenaufgabe, Journ. f. d. reine u. ang. Math. **187** (1949), 183–188.

Eingegangen 15. April 1951.

Zusatz bei der Korrektur (März 1952).

Inzwischen ist der erste Teil einer Arbeit von H. G. Eggleston[24]) erschienen, die einige Berührungspunkte mit den §§ 5 und 8 der vorliegenden Arbeit aufweist. Insbesondere läßt sich Satz 29 aus Egglestons Theorem 5 herleiten, und ein Teil der Aussage von Satz 52, nämlich

$$\dim {}_rG_1(\zeta) = \dim \bigvee_{0 \leqq \eta \leqq \zeta} {}_rG_2(\eta) = \dim \bigvee_{0 \leqq \eta \leqq \zeta} {}_rG_3(\eta) = d(\zeta) \qquad (0 \leqq \zeta \leqq 1),$$

ist in Egglestons Theorem 14 enthalten. Jedoch unterscheiden sich die beiden Untersuchungen wesentlich in ihren Gesichtspunkten und Methoden.

---

[24]) *H. G. Eggleston*, Sets of fractional dimensions which occur in some problems of number theory, Proc. London Math. Soc. **54** (1951), 42–80.

Die algebraische Struktur des Gruppenringes einer endlichen Gruppe über einem Zahlkörper.

Von *Ernst Witt* in Hamburg.

$K\mathfrak{G}$ sei der Gruppenring einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ über einem algebraischen Zahlkörper K. Jedem absolut irreduziblen Charakter χ von $\mathfrak{G}$ ist eindeutig ein einfacher Bestandteil $\mathfrak{A}$ der Wedderburnschen Zerlegung von $K\mathfrak{G}$ zugeordnet durch $\chi(\mathfrak{A}) \neq 0$.

Ein minimales Linksideal $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{A}$ vermittelt eine irreduzible Darstellung von $\mathfrak{A}$ durch Matrizen aus K, die bei Erweiterung zum algebraisch abgeschlossenen Körper Ω in der Weise zerfällt, daß die vorkommenden Summanden alle mit derselben Vielfachheit $[\mathfrak{A}]$ auftreten. Dies hat I. Schur bereits im Jahre 1906 bewiesen, und er hat im Anschluß daran das Problem gestellt, aus der Gruppentafel von $\mathfrak{G}$ und den Werten des Charakters χ den *Index* $[\mathfrak{A}]$ zu bestimmen.

In dieser Hinsicht haben G. Frobenius und I. Schur über dem Körper der reellen Zahlen gezeigt, daß $[\mathfrak{A}]$ der reduzierte Nenner ist von

$$\frac{1}{4}(1:\mathfrak{G})\sum_a\left(\chi^2(a)-\chi(a^2)\right) \qquad (a\in\mathfrak{G})$$

(das ist der halbe Rang des Moduls invarianter schiefsymmetrischer Bilinearformen für die zu χ gehörige absolut irreduzible Darstellung).

In dieser Arbeit wird allgemeiner die Aufgabe gelöst, das von H. Hasse angegebene volle Invariantensystem von $\mathfrak{A}$ aus der Gruppentafel von $\mathfrak{G}$ und den Werten des Charakters χ zu bestimmen. Insbesondere bekommt man so auch den Schurschen Index $[\mathfrak{A}]$.

Über den Inhalt der drei Kapitel ist in großen Zügen folgendes zu sagen:

I. Wesentliches Hilfsmittel ist ein Induktionssatz von R. Brauer, nach dem jeder Charakter χ durch Induktion aus einreihigen Untergruppencharakteren ganzzahlig linear kombiniert werden kann. In der hier vorangehenden Arbeit von P. Roquette wurde der Beweis dieses Satzes durch das p-adische Studium des Charakterenringes wesentlich vereinfacht. Diese Arbeit, die ich noch vor ihrer Drucklegung einsehen durfte, war der direkte Anlaß für die vorliegende Untersuchung. Es erweist sich hier als notwendig, den Induktionssatz von R. Brauer allgemeiner auf Darstellungen durch Matrizen aus einem Schiefkörper $\mathfrak{S}$ zu übertragen und entsprechend zu formulieren (Satz 7). So muß die ganze Charakterentheorie noch einmal in dieser Allgemeinheit entwickelt werden, wobei sich trotz der Komplikation einige weitere Vereinfachungen ergeben. Die engen Beziehungen zur Theorie von R. Brauer über den modularen Gruppenring werden hierbei kurz gestreift.

II. Den absolut irreduziblen Untergruppencharakteren χ, ψ, deren Werte in K liegen mögen, seien wie oben die Algebren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zugeordnet. χ komme im induzierten Charakter $\dot{\psi}$ genau (χ, ψ)-mal vor. Wenn in $\mathfrak{G}$ die Regel $x^g = 1$ gilt, darf für die Unter-

suchung angenommen werden, daß der Grad $\left(K\left(\sqrt[g]{1}\right):K\right)$ eine Potenz einer Primzahl p ist. Satz 8 lautet dann: Aus $p \nmid (\chi, \psi)$ folgt die Algebrenähnlichkeit $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$. Zu vorgegebenem Charakter χ trifft dies nun nach Satz 9 immer für mindestens einen *elementaren* Charakter ψ zu, dessen Untergruppe $\mathfrak{H}$ im Normalisator einer zyklischen Untergruppe liegt und dessen Darstellung metabelsch ist.

III. Damit ist die Struktur von $\mathfrak{A}$ auf die Struktur der *elementaren* Algebra $\mathfrak{B}$ zurückgeführt, deren q-adische Hasse-Invariante unter Benutzung meiner Verlagerungstheorie für Algebren direkt aus der Gruppentafel von $\mathfrak{H}$ numerisch bestimmt wird. Satz 12 besagt, daß diese Invariante Null ist, wenn K die $(q-1)$-ten Einheitswurzeln enthält (bzw. $\sqrt{-1}$ für $q = 2$).

Literaturverzeichnis.

R. Brauer, On the representation of a group of order g in the field of the g-th roots of unity. Am. Journ. of Math. **67** (1945), 461—471. Dort weitere Literaturangaben.

R. Brauer, On Artin's L-series with general group characters. Ann. of Math. **48** (1947).

R. Brauer, Applications of induced characters. Am. Journ. of Math. **69** (1947).

C. Chevalley, La theorie du symbole de restes normiques. Crelles Journal **169** (1932), 140—157.

G. Frobenius und I. Schur, Über die reellen Darstellungen der endlichen Gruppen. Sitz.Ber. Preuß. Akad. d. Wiss. 1906, 186—208.

P. Roquette, Arithmetische Untersuchung des Charakterringes einer endlichen Gruppe. Crelles Journal **190** (1952), 148—168.

I. Schur, Arithmetische Untersuchungen über endliche Gruppen linearer Substitutionen. Sitz.Ber. Preuß. Akad. d. Wiss. 1906, 164—184.

H. Zassenhaus, Über endliche Fastkörper. Satz 10, Abh. Math. Sem. Hamburg **11** (1936), S. 207.

Für die Darstellungstheorie und die Algebrentheorie, die in dieser Arbeit vorausgesetzt werden, vgl.

M. Deuring, Algebren. Berlin 1935.

B. L. van der Waerden, Moderne Algebra II, 2. Aufl. Berlin 1940.

I.

Darstellungen durch Matrizen aus einem Schiefkörper und ihre Charaktere.

$\mathfrak{S}$ sei ein Schiefkörper endlichen Ranges $(\mathfrak{S}:K)$ über dem Körper K. Wir betrachten Darstellungen $a \to A$ einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ mit der Regel $x^g = 1$ durch Matrizen aus $\mathfrak{S}$. Da jeder $\mathfrak{S}$-Rechtsmodul zugleich ein K-Modul ist, liefert jede Darstellung $\mathfrak{D}/\mathfrak{S}$ zugleich eine Darstellung $\mathfrak{D}/K$ von einem $(\mathfrak{S}:K)$-mal so großen Grade.

1. Induzierte Darstellungen. Ist $\mathfrak{m}$ ein Darstellungsmodul der Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$, also $\mathfrak{H}\mathfrak{m} = \mathfrak{m} = \mathfrak{m}\mathfrak{S}$, so erhält man den sogenannten induzierten Darstellungsmodul von

$$\mathfrak{G} = \bigcup_{\nu} r_\nu \mathfrak{H}$$

als direkte Modulsumme

$$\mathfrak{M} = \cdot \sum_{\nu} r_\nu \mathfrak{m},$$

in der die Einwirkung von $\mathfrak{G}$ auf natürliche Weise erklärt wird. Änderung der Repräsentanten r_ν liefert äquivalente Darstellungen. Für das Induzieren von Darstellungen bei Untergruppen $\mathfrak{G}_1 \leq \mathfrak{G}_2 \leq \mathfrak{G}_3$ gilt das Transitivgesetz. Eine Darstellung, die nur von sich selber induziert wird, heißt *primitiv*. Jede Darstellung wird von mindestens einer primitiven Untergruppendarstellung induziert.

2. Verallgemeinerung eines Satzes von Blichfeldt. Dieser besagt, daß sich jede Darstellung einer p-Gruppe durch Matrizen aus $R\left(\sqrt[g]{1}\right)$ auf monomiale Gestalt transformieren läßt (R = Körper der rationalen Zahlen).

Satz 1. *Die Faktoren einer Hauptreihe von $\mathfrak{G}$ seien bis auf einen letzten abelschen Normalteiler $\mathfrak{G}_1$ alle zyklisch. Dann ist jede irreduzible Darstellung $\mathfrak{D}/\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}$ durch Matrizen aus $\mathfrak{S}$ die Induzierte einer metabelschen Darstellung $\mathfrak{d}/\mathfrak{S}$ einer Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$.*

Beweis. $\mathfrak{D}/\mathfrak{S}$ werde induziert von der primitiven Untergruppendarstellung $\mathfrak{d}/\mathfrak{S}$, die dann ebenfalls irreduzibel ist. $\mathfrak{d}/\mathfrak{S}$ kann als treue Darstellung der Faktorgruppe $\mathfrak{h}$ einer Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ aufgefaßt werden. Die vorausgesetzte Eigenschaft von $\mathfrak{G}$ überträgt sich nun auf $\mathfrak{h}$, dabei sei $\mathfrak{h}_1$ der $\mathfrak{G}_1$ entsprechende abelsche Normalteiler. Die Behauptung lautet jetzt $\mathfrak{h}'' = 1$.

$\mathfrak{h}_2$ sei ein zunächst beliebiger Normalteiler von $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{w}$ das Radikal von $K\mathfrak{h}_2$ und $K\mathfrak{h}_2/\mathfrak{w} = \cdot \sum \mathfrak{a}_\nu$ die Wedderburnsche Zerlegung in einfache Ringe. (Wenn K die Charakteristik $p_K = 0$ hat, ist bekanntlich $\mathfrak{w} = 0$.)

$\mathfrak{m}$ sei der irreduzible Darstellungsmodul von $\mathfrak{d}/\mathfrak{S}$. Wir behaupten: $\mathfrak{w}\mathfrak{m} = 0$.

Zunächst ist $\mathfrak{w}\mathfrak{m}$ ein $\mathfrak{h}$-Modul: $x\mathfrak{w}\mathfrak{m} = x\mathfrak{w}x^{-1} \cdot x\mathfrak{m} = \mathfrak{w}\mathfrak{m}$. Im Falle $\mathfrak{w}\mathfrak{m} \neq 0$ ergibt sich nun der Widerspruch $\mathfrak{w}\mathfrak{m} = \mathfrak{m} = \mathfrak{w}^N\mathfrak{m} = 0$.

$\mathfrak{h}$ permutiert die von Null verschiedenen Summanden der direkten Zerlegung

$$\mathfrak{m} = K\mathfrak{h}_2\mathfrak{m} = \cdot \sum \mathfrak{a}_\nu \mathfrak{m}$$

wegen $x\mathfrak{a}_\nu\mathfrak{m} = x\mathfrak{a}_\nu x^{-1}\ x\mathfrak{m} = \mathfrak{a}_\mu\mathfrak{m}$, und zwar transitiv, weil $\mathfrak{m}$ irreduzibel ist. Das bedeutet, die Darstellung $\mathfrak{d}/\mathfrak{S}$ wird von der Darstellung der Fixgruppe $\mathfrak{h}^*$ von $\mathfrak{a}_1\mathfrak{m}$ induziert ($\mathfrak{a}_1\mathfrak{m} \neq 0$ vorausgesetzt). Weil nun $\mathfrak{d}/\mathfrak{S}$ primitiv vorausgesetzt war, ist $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{h}$ und $\mathfrak{m} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{m}$. Da sich $\mathfrak{a}_1$ in $K\mathfrak{h}_2$-operatorisomorphe minimale Linksideale zerlegen läßt, folgt weiter, daß die eingeschränkte Darstellung $\mathfrak{d}(\mathfrak{h}_2)/K$ direkte Summe ist von gewissen äquivalenten irreduziblen treuen Darstellungen $\mathfrak{d}_2/K$.

Jetzt wollen wir noch voraussetzen, daß $\mathfrak{h}_2$ ein $\mathfrak{h}_1$ enthaltender möglichst großer abelscher Normalteiler von $\mathfrak{h}$ ist. Da eine abelsche irreduzible Darstellung $\mathfrak{d}_2/K$ immer zyklisch ist, folgt $\mathfrak{h}_2 = (b)$. Für den Normalisator gilt $Nb = (b)$, denn sonst enthielte eine durch Nb gelegte Hauptreihe von $\mathfrak{h}/(b)$ infolge der vorausgesetzten Hauptreiheneigenschaft einen zyklischen Faktor $\mathfrak{h}_3/(b)$; $\mathfrak{h}_3$ wäre dann abelsch, also $\mathfrak{h}_2 = (b)$ nicht maximal abelsch. Schließlich ist nun $\mathfrak{h}/(b)$ als Gruppe von Automorphismen einer zyklischen Gruppe abelsch, also $\mathfrak{h}$ metabelsch, q. e. d.

Für später merken wir noch an:

1. Wenn $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1$ eine p-Gruppe ist, so trifft dies auch zu für $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_1$, also auch für $\mathfrak{h}/(b)$.

2. In der oben eingeführten Darstellung $\mathfrak{d}_2/K$ von (b) werde b durch die Matrix B dargestellt, die der in K irruduziblen Gleichung $f(B) = 0$ genüge. Dieselbe Gleichung gilt dann auch in der Darstellung $\mathfrak{d}/\mathfrak{S}$.

Für die Konstruktion von treuen primitiven irreduziblen Darstellungen ist nun von besonderer Bedeutung, daß der Quotientenring

$$K\mathfrak{h}/f(b)$$

als verschränktes Produkt des

$$\text{Körpers } K(b)/f(b) \text{ mit der Gruppe } \mathfrak{h}/(b)$$

einfach ist. Diesen Quotientenring werden wir wegen seiner verhältnismäßig einfachen Struktur *elementar* nennen.

3. Im algebraisch abgeschlossenen Körper Ω sei $f(\beta) = 0$. Durch $b^\lambda \to \beta^\lambda$ wird eine einreihige Darstellung von (b) definiert. Sie induziert in $\mathfrak{h}$ eine absolut irreduzible Darstellung, denn ihr Grad ist gleich der Gruppenordnung von $\mathfrak{h}/(b)$.

4. Es liege der Fall $\mathfrak{S} = K$ vor, und K enthalte die g-ten Einheitswurzeln. Dann ist $\mathfrak{d}_2/K$ einreihig, also b in der Darstellung $\mathfrak{d}$ Vielfaches der Einheitsmatrix. Folglich ist $\mathfrak{h} = Nb = (b)$ zyklisch, also die primitive irreduzible Darstellung $\mathfrak{d}/K$ ebenfalls einreihig.

In diesem Fall reduziert sich Satz 1 im wesentlichen auf den Satz von Blichfeld.

3. Charaktere. Wir fassen vor allem den Fall ins Auge, daß der Körper K die Charakteristik $p_K = 0$ hat, deuten aber in Klammern [ ] die Modifikationen an, die im Fall $p_K \neq 0$ nötig sind.

Unter dem Charakter $\chi(a)$ einer Darstellung $\mathfrak{D}/\mathfrak{S}$ durch Matrizen aus dem Schiefkörper $\mathfrak{S}/K$ verstehen wir die Matrizenspur der zugeordneten Darstellung $\mathfrak{D}/K$. Dabei werde K stets als Zentrum von $\mathfrak{S}$ vorausgesetzt.

Der folgende bekannte Satz rechtfertigt den Namen Charakter:

Satz 2. *Durch den Charakter $\chi(a)$ einer Darstellung $\mathfrak{D}/\mathfrak{S}$ sind die Anzahlen n_ν äquivalenter irreduzibler Konstituenten von $\mathfrak{D}/\mathfrak{S}$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. $\mathfrak{S}^{-1}$ sei ein zu $\mathfrak{S}$ invers-isomorpher Schiefkörper. $n_\nu \in K$ ist dann gleich der in $\mathfrak{D}/K$ gebildeten Spur eines Elements a_ν aus dem Ring $\mathfrak{a}_\nu$ der Wedderburnschen Zerlegung

$$K\mathfrak{G} \times \mathfrak{S}^{-1}/\text{Radikal} = \cdot \sum \mathfrak{a}_\nu ,$$

wenn a_ν in der irreduziblen Darstellung von $\mathfrak{a}_\nu/K$ die Spur 1 hat.

[Im Fall $p_K \neq 0$ fordern wir zusätzlich $\mathfrak{S} = K$. Dann können wir wieder schließen, daß $\mathfrak{a}_\nu$ ein Element mit der Spur 1 enthält; denn $\mathfrak{a}_\nu$ ist dann ein voller Matrizenring über einer separablen Körpererweiterung von K, nach dem Satz von Wedderburn, wonach ein Schiefkörper aus endlich vielen Elementen stets kommutativ ist, angewandt auf die Wedderburnsche Zerlegung des Gruppenringes/Radikal über dem Primkörper.

Der obige Beweis liefert die Anzahlen n_ν nur mod p_K. Dies genügt für viele Fälle.

Um aber n_ν selbst zu bekommen, ersetze man nach R. Brauer die Wurzeln der Darstellungsmatrix A/K erst durch mod $\mathfrak{p}_K$ kongruente Einheitswurzeln aus $R\left(\sqrt[g]{1}\right)$, als deren Summe der Brauersche Charakter $\chi(a)$ erklärt wird. Hier gilt also nur $\chi(a) \equiv$ Spur A mod $\mathfrak{p}_K$. Dabei ist $\mathfrak{p}_K$ ein fester Primidealteiler von p_K in $R\left(\sqrt[g]{1}\right)$.

Jetzt ist n_ν durch $\chi(a)$ rekursiv in bezug auf den Grad $\chi(1)$ festgelegt: Falls ein $n_\nu \not\equiv 0$ ist, streiche man einmal den Konstituenten $\mathfrak{D}_\nu$; sind dagegen alle $n_\nu \equiv 0$, so gehe man zu einer Darstellung mit den proportionalen Anzahlen $n_\nu : p_K$ über.

Man verliert nichts, wenn man nach R. Brauer den Definitionsbereich der Charaktere auf p_K-reguläre Elemente einschränkt (d. h. in deren Ordnung p_K nicht aufgeht). Denn für eine geeignete Potenz P von p_K ist a^P p_K-regulär und $\chi(a) = \chi(a^P)$, wie sich aus dem Verhalten der Darstellungswurzeln ergibt.]

$\mathsf{X}_{\mathfrak{S}}^{\mathfrak{G}}$ bedeute die Gesamtheit aller Charaktere und ihrer Differenzen von Darstellungen $\mathfrak{D}/\mathfrak{S}$. Hierin bilden die *irreduziblen* Charaktere χ_ν eine *linear unabhängige* Basis, denn eine Relation ließe sich auf die Form $\sum n_\nu \chi_\nu = \sum n'_\nu \chi_\nu$ mit $n_\nu, n'_\nu \geqq 0$ bringen, und nach Satz 2 würde $n_\nu = n'_\nu$ folgen.

Das direkte Produkt eines K-Moduls mit einem $\mathfrak{S}$-Rechtsmodul läßt sich wieder als $\mathfrak{S}$-Rechtsmodul erklären. Daraus folgt

$$\mathsf{X}_K^{\mathfrak{G}} \cdot \mathsf{X}_{\mathfrak{S}}^{\mathfrak{G}} = \mathsf{X}_{\mathfrak{S}}^{\mathfrak{G}}.$$

Insbesondere ist $\mathsf{X}_K^{\mathfrak{G}}$ ein Ring mit Einselement.

Ist ψ der Charakter einer Darstellung $\mathfrak{d}/\mathfrak{S}$ der Untergruppe $\mathfrak{H}$, so werde mit $\dot{\psi}$ der Charakter der induzierten Darstellung bezeichnet. Wenn man ψ Null setzt für Argumente außerhalb $\mathfrak{H}$, ergibt sich aus der Spurdefinition des Charakters und $\mathfrak{G} = \bigcup_\nu r_\nu \mathfrak{H}$ unmittelbar

$$\dot{\psi}(a) = \sum_{r_\nu} \psi(r_\nu a r_\nu^{-1}) = (1:\mathfrak{H}) \sum_{x \in \mathfrak{G}} \psi(xax^{-1}),$$

$$(\chi\psi)^{\cdot} = \chi\dot{\psi}.$$

[Für die Brauerschen Charaktere ($p_K \neq 0$) muß der Definitionsbereich generell auf p_K-reguläre Elemente eingeschränkt werden (vgl. $g = p_K = 2$). Dann bleibt die linksstehende Formel für $\dot{\psi}(a)$ richtig, erfordert aber einen besonderen Beweis, in welchem die Formelbeiträge entsprechend der Zerlegung der Permutation $r_\nu\mathfrak{H} \to ar_\nu\mathfrak{H}$ in Zyklen mit geeigneten Vertretern $(r, ar, \ldots, a^{n-1}r)$ studiert werden.]

4. $\mathfrak{p}$-adische Erweiterung. Die Untersuchung des Charaktermoduls $\mathsf{X}_{\mathfrak{S}}^{\mathfrak{G}}$ wird uns volle Übersicht über die möglichen Darstellungen $\mathfrak{D}/\mathfrak{S}$ liefern. Durch Erweiterung des Koeffizientenbereiches erhalten wir den erweiterten Charaktermodul $k_{\mathfrak{p}}^o \mathsf{X}_{\mathfrak{S}}^{\mathfrak{G}}$, der leichter zu behandeln ist, und deshalb von Roquette eingeführt wurde. Dabei sei

$k_{\mathfrak{p}}$ ein $\mathfrak{p}$-adischer Körper, der $h\left(\sqrt[g]{1}\right)$ enthält,

$k_{\mathfrak{p}}^o$ der Ring der ganzen $\mathfrak{p}$-adischen Zahlen,

p die Charakteristik des Restklassenkörpers $k_{\mathfrak{p}}^o$ mod $\mathfrak{p}$.

5. Oberklassen. Wir zerlegen den Exponenten g, für den $x^g = 1$ für alle Gruppenelemente x vorausgesetzt war, teilerfremd in $g = p^t \cdot g_1$.

$\mathfrak{J}$ sei die Menge aller Zahlen $i, j, \ldots$, die beim Potenzieren der g_1-ten Einheitswurzeln Automorphismen von $K\left(\sqrt[g_1]{1}\right)/K$ hervorrufen, die also die Elemente von K festlassen.

In Abhängigkeit von K und der Primzahl p erklären wir jetzt eine Einteilung der Gruppe $\mathfrak{G}$ in Oberklassen. Darunter wollen wir bezüglich der Operationen $a \to xax^{-1}$ und $a \to a^i$ abgeschlossene Minimalmengen verstehen ($x \in \mathfrak{G}$, $i \in \mathfrak{J}$).

In jeder Oberklasse findet man p-reguläre Elemente a^i, in deren Ordnung p also nicht aufgeht, indem man $i = yp^t \equiv 1 \bmod g_1$ wählt.

Die Bedeutung des Begriffes Oberklasse geht aus folgendem Satz hervor.

Satz 3. *Auf einer Oberklasse ist jeder Charakter* mod p *konstant. Es gibt immer Charaktere aus* $k_{\mathfrak{p}}^o \mathsf{X}_K^{\mathfrak{G}}$, *die auf den Oberklassen vorgeschriebene Werte* mod p *annehmen.*

Beweis. Zur ersten Hälfte von Satz 3 bemerken wir, daß für eine geeignete Potenz P von p^t die Darstellungswurzeln von a und a^P mod $\mathfrak{p}$ für jedes a übereinstimmen. Die Wurzeln der p-regulären Elemente a^P und a^{Pi} genügen für $i \in \mathfrak{J}$ derselben charakteristischen Gleichung a. So folgt

$$\chi(a) \equiv \chi(a^P) = \chi(a^{Pi}) \equiv \chi(a^i) \bmod \mathfrak{p}.$$

Zum Beweis der zweiten Hälfte des Satzes 3 müssen wir weiter ausholen. Wir erwähnen jetzt noch eine direkte Folgerung aus Satz 3 für den Fall, daß alle p_K-regulären Elemente auch p-regulär sind.

Satz 4. *In den Fällen $p \nmid g$ oder $p = p_K \neq 0$ ist auf einer Oberklasse jeder Charakter schlechthin konstant; $\mathfrak{G}$ hat ebenso viele Oberklassen wie irreduzible Darstellungen in K.*

Beweis. Die Wurzeln der p_K-regulären Elemente b, b^i $(i \in \mathfrak{J})$, die also zugleich p-regulär sind, genügen bei irgendeiner Darstellung wieder derselben charakteristischen Gleichung, folglich ist $\chi(b) = \chi(b^i)$.

Für $p \nmid g$ ist $\mathfrak{J}$ von p unabhängig, also auch die Einteilung von $\mathfrak{G}$ in Oberklassen. Nach Satz 2 sind die k verschiedenen irreduziblen Charaktere χ_ν / K linear unabhängig. Aus det $\chi_\nu(a_\mu) \neq 0$ folgt det $\chi_\nu(a_\mu) \not\equiv 0$ mod $\mathfrak{p}$ zu passendem $p \nmid g$. Also sind die χ_ν ebenfalls mod $\mathfrak{p}$ linear unabhängig, und ein Blick auf Satz 3 zeigt k = Anzahl der Oberklassen.

Für $p = p_K \neq 0$ zeigt der Beweis von Satz 2, daß die k irreduziblen Charaktere χ_ν mod p_K genommen linear unabhängig sind, also auch mod p, und Satz 3 gibt wieder k = Anzahl der Oberklassen.

[In diesem Fall $p = p_K \neq 0$ kann man die Sätze 3 und 4 auch mit Spurcharakteren aussprechen und beweisen, kommt also ganz ohne Brauersche Charaktere aus.]

6. Die Untergruppe $(c)\mathfrak{P}$. $\mathfrak{C}$ sei die Menge der Potenzen c^i eines p- und p_K-regulären Elementes c der Ordnung n $(i \in \mathfrak{J})$.

$\mathfrak{P}$ sei eine p-Sylowgruppe des Normalisators $N\mathfrak{C}$,

$(c)\mathfrak{P}$ ist dann eine Untergruppe von $N\mathfrak{C}$ mit (c) als charakteristischer Untergruppe.

Hilfssatz. *Jede Darstellung $\mathfrak{d}/K$ der zyklischen Gruppe (c) läßt sich auf $(c)\mathfrak{P}$ fortsetzen.*

Beweis. Der Kern der Darstellung ist ein Normalteiler von $(c)\mathfrak{P}$, daher darf $\mathfrak{d}$ treu und irreduzibel gedacht werden. Es sei daran erinnert, daß das zerfallende verschränkte Produkt von $K\left(\sqrt[n]{1}\right)/K$ mit seiner galoisschen Gruppe isomorph einem vollen Matrizenring über K ist. Nun wird $\mathfrak{d}$ durch eine Zuordnung $c \to \sqrt[n]{1}$ im verschränkten Produkt realisiert. Die gewünschte Fortsetzung von $\mathfrak{d}$ bekommt man jetzt, indem man $\mathfrak{P}$ auf die Untergruppe der Galoisgruppe von entsprechender Wirkung abbildet.

ξ sei ein absolut irreduzibler Charakter von (c). Dann ist $\eta = \sum \xi^j$, summiert über die verschiedenen ξ^j mit $j \in \mathfrak{J}$, der Charakter einer irreduziblen Darstellung $\mathfrak{d}/K$ von (c).

Die charakteristische Funktion $\omega_{\mathfrak{C}}$ von $\mathfrak{C}$, die also auf $\mathfrak{C}$ den Wert 1 und sonst den Wert 0 hat, läßt sich aus den η mit Koeffizienten aus $k_{\mathfrak{p}}^o$ linear kombinieren, denn es ist $n^{-1} \in k_{\mathfrak{p}}^o$ und, summiert über $c^i \in \mathfrak{C}$ und alle ξ,

$$n\omega_{\mathfrak{C}} = \sum \xi(c^{-i})\, \xi = \sum \xi^j(c^{-i})\, \xi^j = \sum \xi(c^{-i})\, \xi^j,$$

wonach also ξ und ξ^j $(j \in \mathfrak{J})$ denselben Koeffizienten aus $k_{\mathfrak{p}}^o$ haben.

ω sei die nach dem Hilfssatz in $k_{\mathfrak{p}}^o X_K^{(c)\mathfrak{P}}$ vorhandene Fortsetzung von $\omega_{\mathfrak{C}}$ auf $(c)\mathfrak{P}$. Zum vollständigen Beweis von Satz 3 berechnen wir jetzt die Induzierte $\dot{\omega}(a)$ mod $\mathfrak{p}$. Nach der schon bewiesenen Hälfte des Satzes genügt es, a als p-regulär anzunehmen. $a^x = xax^{-1}$ ist dann ebenfalls p-regulär.

Aus $\omega(a^x) \neq 0$ folgt nun der Reihe nach

$$a^x \in (c)\mathfrak{P}, \quad a^x \in (c), \quad \omega_{\mathfrak{C}}(a^x) \neq 0, \quad a^{ix} \in \mathfrak{C} \qquad \text{für } i \in \mathfrak{J}.$$

Im Falle $a = c$ folgt also $x \in N\mathfrak{C}$. Umgekehrt ergibt sich hieraus $\omega(c^x) = 1$. Damit haben wir das Ergebnis

$$\dot{\omega}(a) = (1:(c)\mathfrak{P}) \sum_{x \in \mathfrak{G}} \omega(xax^{-1}) = \begin{cases} N\mathfrak{C}:(c)\mathfrak{P} \not\equiv 0 & \text{für } a = c, \\ 0 & \text{für } a \neq x^{-1}c^t x. \end{cases}$$

$\dot{\omega}$, das nach Konstruktion in $k_{\mathfrak{p}}^o \mathsf{X}_K^{\mathfrak{G}}$ liegt, ist also nur auf der c enthaltenden Oberklasse $\not\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}$.

Charaktere mit gewünschten Werten mod $\mathfrak{p}$ erhält man nun leicht durch lineare Kombination solcher $\dot{\omega}$. Damit ist Satz 3 vollständig bewiesen.

7. Gewinnung vorgelegter Charaktere durch Induzieren aus den Untergruppen $(c)\mathfrak{P}$. Mit Hilfe der Eulerschen Funktion $\varphi(\mathfrak{p}^\nu)$ führen wir für $\alpha \in k_{\mathfrak{p}}^o$ den folgenden Grenzwert ein:

$$\alpha^\dagger = \lim_{\nu \to \infty} \alpha^{\varphi(\mathfrak{p}^\nu)-1} = \begin{cases} \alpha^{-1} & \text{für } \alpha \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{p} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist also, je nachdem, $\alpha^\dagger \alpha = 1$ oder 0.

Nach der Methode der Basisergänzung erkennt man, daß $k_{\mathfrak{p}}^o \mathsf{X}_K^{\mathfrak{G}}$ topologisch abgeschlossen ist in der naheliegenden Topologie des Moduls $k_{\mathfrak{p}}F$ aller Funktionen auf der Gruppe $\mathfrak{G}$ mit Werten aus dem $\mathfrak{p}$-adischen Körper $k_{\mathfrak{p}}$.

Daher liegt mit χ auch $\chi^\dagger$ im Ring $k_{\mathfrak{p}}^o \mathsf{X}_K^{\mathfrak{G}}$.

$\dot{\omega}^\dagger \dot{\omega}$ ist die charakteristische Funktion der Oberklasse von c und liegt in $k_{\mathfrak{p}}^o \mathsf{X}_K^{\mathfrak{G}}$. Es ist $\sum \dot{\omega}^\dagger \dot{\omega} = 1$, wenn über alle Oberklassen summiert wird.

Satz 5. $k_{\mathfrak{p}}^o \mathsf{X}_{\mathfrak{S}}^{\mathfrak{G}} = \sum_c k_{\mathfrak{p}}^o \dot{\mathsf{X}}_{\mathfrak{S}}^{(c)\mathfrak{P}}$.

Dies folgt aus $\chi = \chi \sum \dot{\omega}^\dagger \dot{\omega} = \sum (\chi \dot{\omega}^\dagger \omega)^{\cdot}$.

Satz 6. $\mathsf{X}_{\mathfrak{S}}^{\mathfrak{G}} = \sum \dot{\mathsf{X}}_{\mathfrak{S}}^{(c)\mathfrak{P}}$.

Beweis. Die beiden Seiten seien mit X, Y bezeichnet. Wegen $Y \leq X \leq k_{\mathfrak{p}}^o Y$ haben X und Y denselben rationalen Rang. Drückt man nun $\chi \in X$ rational durch eine ganzzahlige Basis von Y aus, so treten keine wirklichen Nenner auf, denn $X < k_{\mathfrak{p}}^o Y$ gilt für jedes $\mathfrak{p}$. Daher ist auch umgekehrt $X < Y$.

Durch Anwendung von Satz 1 auf $(c)\mathfrak{P}$ mit (c) als abelschem Normalteiler ergibt sich jetzt aus Satz 6 der folgende Satz, der auch für die wirkliche Berechnung der Charaktere nützlich ist:

Satz 7. *Jeder Charakter $\chi_{\mathfrak{S}}^{\mathfrak{G}}$ läßt sich ganzzahlig linear aus induzierten Charakteren $\dot{\psi}_{\mathfrak{S}}^{\mathfrak{H}}$ von irreduziblen metabelschen Untergruppendarstellungen $\mathfrak{H}/\mathfrak{S}$ kombinieren.*

Nach den Anmerkungen zum Beweis von Satz 1 können wir dabei über die Gruppe $\mathfrak{H}$ der Matrizen aus $\mathfrak{H}$ noch voraussetzen:

1) $\mathfrak{H}$ enthält einen zyklischen Normalteiler (b) mit $Nb = (b)$.

2) $\mathfrak{H}/(b)$ ist eine abelsche p-Gruppe.

Im Falle $\mathfrak{S} = K = R\left(\sqrt[g]{1}\right)$ ist d einreihig, also absolut irreduzibel. Bezeichnet Ω den algebraischen Abschluß von K, so ist also

$$\mathsf{X}_{\Omega}^{\mathfrak{G}} = \{\dot{\psi}_{\Omega}^{\mathfrak{H}}\} = \{\dot{\psi}_{K}^{\mathfrak{H}}\} = \mathsf{X}_{K}^{\mathfrak{G}}.$$

Aus der Bedeutung dieser Moduln folgen jetzt unmittelbar die lange vermuteten, aber erst von R. Brauer im Jahre 1945 bzw. 1947 bewiesenen Sätze:

A) *Jeder absolut irreduzible Charakter läßt sich ganzzahlig linear aus induzierten Charakteren von einreihigen Untergruppendarstellungen kombinieren.*

B) *In* $R\left(\sqrt[g]{1}\right)$ *zerfällt jede Darstellung in absolut irreduzible Darstellungen.*

C) *Der Gruppenring* $R\left(\sqrt[g]{1}\right)\mathfrak{G}$ *ist direkte Summe voller Matrizenringe über* $R\left(\sqrt[g]{1}\right)$.

D) *Die L-Reihen von Artin sind meromorphe Funktionen.*

II.

Bestimmung der Struktur des Gruppenringes $\mathfrak{C}$ K.

Von jetzt an sei K ein Körper der Charakteristik $p_K = 0$ und Ω ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Vorgelegt sei ein absolut irreduzibler Charakter χ der endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$, für welche die Regel $x^g = 1$ erfüllt sei.

$\mathfrak{A}$ bezeichne den durch $\chi(\mathfrak{A}) \neq 0$ gekennzeichneten einfachen Summanden der Wedderburnschen Zerlegung des Gruppenringes $K\mathfrak{G}$.

Das Ziel ist die Bestimmung der Struktur von $\mathfrak{A}$ durch die Werte von χ.

8. Der von den Werten des Charakters χ erzeugte Körper Z. Als Teilkörper von $K\left(\sqrt[g]{1}\right)$ ist Z/K galoissch und der Grad gleich der Anzahl n der zu χ konjugierten Charaktere $\chi_1, \ldots, \chi_n$.

Das Einselement e von $\mathfrak{A}$ ist die Summe der n untereinander konjugierten absolut irreduziblen Zentrumsidempotenten

$$e_\nu = (1 : \mathfrak{G}) \sum_a \chi_\nu(a^{-1})\, a \qquad (a \in \mathfrak{G}).$$

$\mathfrak{Z}$ bezeichne das Zentrum von $\mathfrak{A}$. Es ist dann $Z\mathfrak{Z}$ das Zentrum von $Z\mathfrak{A}$. Nun ergibt sich folgende Schlußkette:

$$e_\nu = e_\nu e \in Z\mathfrak{G}\mathfrak{A} = Z\mathfrak{A},$$

$$e_\nu \in Z\mathfrak{Z},\ Z\mathfrak{Z} = \cdot\sum_1^n e_\nu Z,$$

$$(\mathfrak{Z} : K) = (Z\mathfrak{Z} : Z) = n = (Z : K),$$

$$e_\nu \mathfrak{Z} = e_\nu Z,\ \mathfrak{Z} \cong Z,$$

$$Z\mathfrak{A} = \cdot\sum_1^n e_\nu Z\mathfrak{A} = \cdot\sum_1^n e_\nu \mathfrak{Z}\mathfrak{A} = \cdot\sum_1^n e_\nu \mathfrak{A},$$

zusammengefaßt als

Hilfssatz. *Z ist isomorph dem Zentrum von $\mathfrak{A}$, und $Z\mathfrak{A}$ ist eine direkte Summe von lauter zu $\mathfrak{A}$ isomorphen Summanden.*

9. Der Schursche Index $[\mathfrak{A}]$. Er ist dadurch definiert, daß jedes minimale Linksideal von $\mathfrak{A}$ in $(\mathfrak{Z} : K) \cdot [\mathfrak{A}]$ absolut irreduzible Linksideale zerfällt. Für die weitere Untersuchung sei

$\mathfrak{S}$ ein willkürlicher Schiefkörper endlichen Ranges mit K als Zentrum,

$\mathfrak{S}^{-1}$ ein zu $\mathfrak{S}$ invers isomorpher Schiefkörper.

Ein minimales Linksideal $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{A}\mathfrak{S}^{-1}$ kann bekanntlich als $\mathfrak{S}$-Rechtsmodul angesehen werden und vermittelt so eine irreduzible Darstellung $\mathfrak{D}/\mathfrak{S}$, die den Charakter $\chi_{\mathfrak{S}}$ habe.

So ist also einem absolut irreduziblen Charakter χ ein irreduzibler Charakter $\chi_{\mathfrak{S}}$ eindeutig zugeordnet.

Umgekehrt ist natürlich durch $\chi_{\mathfrak{S}}$ nur die Schar $\chi_1, \ldots, \chi_n$ der zu χ konjugierten Charaktere bestimmt, deren Summe mit sp χ bezeichnet werde.

9. Die Zerlegungsformel. Sie lautet

$$\chi_{\mathfrak{S}} = [\mathfrak{A}\mathfrak{S}^{-1}] \cdot [\mathfrak{S}] \cdot \mathrm{sp}\, \chi$$

und wird erhalten, indem wir folgende mit dem algebraisch abgeschlossenen Körper Ω erweiterten Ringe in irreduzible Linksideale zerlegen:

$\mathfrak{A}_\Omega = \sum \mathfrak{l}$ (hierin treten $(\mathfrak{Z} : K)$ konjugierte Typen $\mathfrak{l}_i$ auf),
$\mathfrak{S}_\Omega^{-1} = \sum \mathfrak{s}$ $((\mathfrak{s} : \Omega) = [\mathfrak{S}])$,
$(\mathfrak{A}\mathfrak{S}^{-1})_\Omega = \sum \mathfrak{l}\mathfrak{s}$ ($\mathfrak{l}\mathfrak{s}$ ist irreduzibel).

Das minimale Linksideal $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{A}\mathfrak{S}^{-1}$ zerfällt nun bis auf Operatorisomorphie in $(\mathfrak{Z} : K) \cdot [\mathfrak{A}\mathfrak{S}^{-1}]$ Summanden $\mathfrak{l}\mathfrak{s}$ und jeder von ihnen in $[\mathfrak{S}]$ Summanden $\mathfrak{l}$. Dabei treten $(\mathfrak{Z} : K)$ konjugierte Typen $\mathfrak{l}_i$ auf:

$$\mathfrak{L}_\Omega \cong [\mathfrak{A}\mathfrak{S}^{-1}] \cdot [\mathfrak{S}] \cdot \sum \mathfrak{l}_i,$$

und hieraus resultiert die Zerlegungsformel.

10. Beziehungen zwischen den Charakteren zweier Untergruppen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{H}$. Der in φ, ψ symmetrische bilineare Ausdruck

$$(\varphi, \psi) = (1 : \mathfrak{F})\,(1 : \mathfrak{H}) \sum_{u,x} \varphi(u^{-1})\, \psi(u^x)$$

gibt allgemein für einen absolut irreduziblen Charakter φ einer Untergruppe $\mathfrak{F}$ an, wie oft φ im induzierten Charakter $\dot{\psi}$ des Charakters ψ der Untergruppe $\mathfrak{H}$ vorkommt. (Die Symmetrie folgt aus der Transformation $u^x = v^{-1}$, $x^{-1} = y$.)

Allgemeiner bedeute

$$(\varphi_{\mathfrak{S}}, \psi_{\mathfrak{S}}, \mathfrak{S}) \qquad (\varphi_{\mathfrak{S}} \text{ irreduzibel})$$

die Anzahl, mit der $\varphi_{\mathfrak{S}}$ in $\dot{\psi}_{\mathfrak{S}}$ vorkommt.

Trivialerweise ist diese Anzahl linear in $\psi_{\mathfrak{S}}$ und ändert sich nicht beim Übergang $\psi_{\mathfrak{S}} \to \dot{\psi}_{\mathfrak{S}}$.

Es seien jetzt φ, ψ absolut irreduzibel und $\varphi_{\mathfrak{S}}$, $\psi_{\mathfrak{S}}$ die zugehörigen irreduziblen Charaktere, ferner seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ die durch $\varphi(\mathfrak{A}) \neq 0$, $\psi(\mathfrak{B}) \neq 0$ gekennzeichneten einfachen Summanden der Wedderburnschen Zerlegung von $K\mathfrak{F}$, $K\mathfrak{H}$. Aus

$$\dot{\psi}_{\mathfrak{S}} = (\varphi_{\mathfrak{S}}, \psi_{\mathfrak{S}}, \mathfrak{S})\, \varphi_{\mathfrak{S}} + \cdots$$

ergibt sich durch Anwendung der Zerlegungsformel

$$[\mathfrak{B}\mathfrak{S}^{-1}]\,[\mathfrak{S}]\,\mathrm{sp}\ \dot{\psi} = (\varphi_{\mathfrak{S}}, \psi_{\mathfrak{S}}, \mathfrak{S})\ [\mathfrak{A}\mathfrak{S}^{-1}]\,[\mathfrak{S}]\,\varphi + \cdots$$

und hieraus die **Umrechnungsformel**

$$(\varphi_{\mathfrak{S}}, \psi_{\mathfrak{S}}, \mathfrak{S}) = \frac{[\mathfrak{B}\mathfrak{S}^{-1}]}{[\mathfrak{A}\mathfrak{S}^{-1}]} (\varphi, \mathrm{sp}\ \psi) \qquad (\varphi_{\mathfrak{S}}, \psi_{\mathfrak{S}} \text{ abs. irred.}).$$

In ihr ist die rechte Seite unempfindlich bei Vergrößerung von $\mathfrak{G}$. Aus dieser Formel fließt der folgende Satz.

Satz 8. *Liegen die Werte der absolut irreduziblen Untergruppencharaktere φ, ψ in K und geht die Primzahl p nicht in (φ, ψ) auf, so sind die p-Bestandteile der zugeordneten Algebren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ einander ähnlich.*

Beweis. Da die Werte von φ, ψ in K liegen, ist nach dem Hilfssatz K das Zentrum von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Wir setzen $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{B}$, also $[\mathfrak{B}\mathfrak{S}^{-1}] = 1$. Da die linke Seite der Umrechnungsformel ganz ist, folgt $p \nmid [\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}]$ und daraus die Behauptung.

Die Umkehrung von Satz 8 ist natürlich im allgemeinen falsch. Beispielsweise sind für eine symmetrische Gruppe $\mathfrak{G}$ die verschiedenen einfachen Summanden von $K\mathfrak{G}$ einander ähnlich, obwohl $(\varphi, \psi) = 0$ ist und die Charaktere rationale Werte haben.

Weiterhin sei $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$ und $\varphi = \chi$. Bei der

Strukturuntersuchung von $\mathfrak{A}$ mit $\chi(\mathfrak{A}) \neq 0$

dürfen wir nach dem letzten Hilfssatz ohne Nachteil für die Allgemeinheit die Erweiterung mit Z schon vollzogen denken, d. h. wir dürfen weiterhin die einander gleichwertigen Voraussetzungen machen:

1. Die Werte des Charakters χ liegen in K.
2. K ist das Zentrum von $\mathfrak{A}$.
3. $(\mathfrak{A} : K) = \chi(1)^2$.

Wir schlagen jetzt folgenden Weg ein. Da eine Algebrenklasse Produkt ihrer p-Bestandteile ist, und da eine p-reguläre Erweiterung von K (d. h. eine Erweiterung mit zu p teilerfremden Grad) niemals den p-Bestandteil zerstört, dürfen wir annehmen, daß $\left(K\left(\sqrt[g]{1}\right) : K\right)$ eine p-Potenz ist.

11. Elementare Algebren und Charaktere. Eine einfache Algebra $\mathfrak{B}$ von dem schon früher betrachteten Typ

$$\mathfrak{B} = K\mathfrak{h}/f(b)$$

wollen wir *elementar* nennen. Dabei ist $\mathfrak{h}$ die Faktorgruppe einer Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$, wobei $\mathfrak{H}$ im Normalisator einer p-regulären zyklischen Gruppe (c) gelegen ist. (b) ist ein zyklischer Normalteiler von $\mathfrak{h}$ mit $Nb = (b)$ und $f(x)$ ein in K irreduzibler Faktor von $x^{((b):1)} - 1$.

Den $\mathfrak{B}$ entsprechenden Charakter $\psi_{\mathfrak{S}}^{\mathfrak{H}}$ bzw. dessen absolut irreduzible Bestandteile ψ wollen wir ebenfalls elementar nennen.

Satz 9. *Der Grad $\left(K\left(\sqrt[g]{1}\right) : K\right)$ sei eine p-Potenz. Dann gibt es zu einem absolut irreduziblen Charakter χ von $\mathfrak{G}$ mit Werten aus K einen elementaren absolut irreduziblen Untergruppencharakter ψ mit Werten aus K mit*

$$(\psi, \chi) = (1 : \mathfrak{H}) \sum_{h \in \mathfrak{G}} \psi(h^{-1})\, \chi(h) \not\equiv 0 \bmod p.$$

Die zugeordneten Algebren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind dann ähnlich.

$\psi(h)$ ist bereits auf der Faktorgruppe $\mathfrak{h}$ definiert. Nach der Bemerkung 3. zum Beweis von Satz 1 ist $\psi(h) = 0$ für $h \notin (b)$. Dies ist für praktische Rechnungen von Vorteil.

Übrigens darf in Satz 9 für ψ noch verlangt werden, daß $\mathfrak{h}/(b)$ eine p-Gruppe ist für die vorliegende Primzahl p.

Beweis. Für eines der elementaren $\psi_{\mathfrak{S}}^{\mathfrak{H}}$ von Satz 7 muß

$$(\chi_{\mathfrak{S}}, \psi_{\mathfrak{S}}, \mathfrak{S}) \not\equiv 0 \bmod p$$

sein, sonst ließe sich $\chi_{\mathfrak{S}}$ nicht aus den $\psi_{\mathfrak{S}}$ ganzzahlig linear kombinieren. ψ sei ein absolut irreduzibler Bestandteil von $\psi_{\mathfrak{S}}$. Die Anzahl der zu ψ konjugierten Charaktere ist eine Potenz p^{μ}. Da die Werte von χ in K liegen, folgt aus der Umrechnungsformel mit $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{A}$

$$[\mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-1}] \cdot p^{\mu} \cdot (\chi, \psi) \not\equiv 0 \bmod p.$$

$\mu = 0$ besagt, die Werte von ψ liegen in K.

Die zugeordneten Algebren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind p-Algebren ähnlich, denn der Körper $K\left(\sqrt[g]{1}\right)$ vom p-Potenzgrad ist nach R. Brauer Zerfällungskörper für $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Aus $(\chi, \psi) \not\equiv 0$ folgt jetzt nach Satz 8 die Ähnlichkeit $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$, w. z. b. w.

Daß $\mathfrak{h}/(b)$ als p-Gruppe vorausgesetzt werden darf, ergibt sich durch Zurückgehen auf Satz 5.

Ein anderer Weg zur Strukturbestimmung von $\mathfrak{A}$, ohne K p-regulär zu erweitern, ist folgender. Der größte gemeinsame Teiler von $(\chi_{\mathfrak{S}}, \psi_{\mathfrak{S}}, \mathfrak{S})$, über alle $\psi_{\mathfrak{S}}$ aus Satz 7 genommen, ist 1, sonst ließe sich $\chi_{\mathfrak{S}}$ nicht aus den $\psi_{\mathfrak{S}}$ ganzzahlig linear kombinieren. Nach der Umrechnungsformel ist daher entsprechend

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{S}^{-1}] = \underset{\nu}{GGT}[\mathfrak{B}\mathfrak{S}^{-1}] \cdot (\chi, \operatorname{sp} \psi),$$

und hierdurch ist $[\mathfrak{A}\mathfrak{S}^{-1}]$ zurückgeführt auf die *elementaren* $[\mathfrak{B}\mathfrak{S}^{-1}]$. Ihre noch ausstehende Berechnung, die wir für einen Zahlkörper durchführen werden, bedeutet eine *implizite* Strukturangabe von $\mathfrak{A}$, denn

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{S}^{-1}] = 1 \text{ ist gleichwertig mit } \mathfrak{A} \sim \mathfrak{S},$$

und im zutreffenden Fall ist dann $\mathfrak{A}$ ein $\frac{\chi(1)}{[\mathfrak{S}]}$-reihiger voller Matrizenring mit $\mathfrak{S}$ als Koeffizientenkörper.

12. Algebren über einem Zahlkörper. Eine normale Algebra $\mathfrak{A}$ über einem Zahlkörper ist nach Hasse eindeutig durch ihre sämtlichen $\mathfrak{q}$-adischen Erweiterungen $\mathfrak{A}_{\mathfrak{q}}$ festgelegt. Der Schursche Index $[\mathfrak{A}]$ ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Schurschen Indizes $[\mathfrak{A}_{\mathfrak{q}}]$.

Wir dürfen daher von jetzt ab einen $\mathfrak{q}$-adischen Körper als Grundkörper voraussetzen.

Nach Hasse ist eine normale Algebra $\mathfrak{A}$ durch ihre Invariante $J(\mathfrak{A})$, eine rationale Zahl mod 1, festgelegt. Dem Produkt der Algebren entspricht die Summe der Invarianten. Bei Grundkörpererweiterung multipliziert sich die Invariante mit dem Erweiterungsgrad. Der Schursche Index ist der Nenner der in gekürzter Form geschriebenen Invarianten.

z sei der Rang des Zentrums $\mathfrak{Z}/K$ der elementaren Algebra

$$\mathfrak{B} = K\mathfrak{h}/f(b).$$

Dann ist

$$[\mathfrak{B}\mathfrak{S}^{-1}] = \text{reduzierter Nenner von } \big(J(\mathfrak{B}) - zJ(\mathfrak{S})\big).$$

Jetzt müssen wir nur noch die Invariante der elementaren Algebra $\mathfrak{B}$ berechnen. Wir stellen uns folgende allgemeinere Aufgabe:

III.

Explizite Berechnung der Invariante J einer Kreisalgebra.

Unter einer $\mathfrak{q}$-adischen *Kreisalgebra* $\mathfrak{B}$ verstehen wir hier ein assoziatives verschränktes Produkt

$$\mathfrak{B} = (\beta(S, T), L/Z) = \sum_S \mu\, L U_S$$

unter nachstehenden Voraussetzungen:

1) L ist ein *Kreiskörper* über dem q-adischen Körper R_q, $(\mathfrak{q}/q)$,
2) der Zwischenkörper Z ist das Zentrum von $\mathfrak{B}$,
3) $\beta(S, T)$ ist ein Faktorensystem aus *Einheitswurzeln* β,
4) das verschränkte Produkt $\mathfrak{B}$ ist erklärt durch die Regeln

$$U_S \lambda = \lambda^S U_S \qquad (\lambda \in L)$$
$$U_S U_T = \beta(S, T)\, U_{ST},$$

5) S, T sind Automorphismen von L/Z.

Wenn man für jede endliche Gruppe die einfachen Bestandteile des Gruppenringes charakterisieren will, so muß man dazu insbesondere imstande sein für die hier vorliegende, von den β und U_S erzeugte endliche Gruppe. Die oben gestellte Aufgabe ist also nur scheinbar allgemeinerer Natur.

13. Verlagerung der Algebra von Z auf R_q. Die Zuordnung von Galois sei gegeben durch

$$\begin{array}{ccccc} R_q & \text{———} & Z & \text{———} & L \\ \Lambda & \text{———} & \Delta & \text{———} & 1. \end{array}$$

Mit σ werde ein festgewählter Vertreter der Nebengruppe $\Delta\sigma$ bezeichnet. Nun betrachten wir das neue verschränkte Produkt

$$\mathfrak{a} = (\alpha_{\sigma,\tau}, L/R_q) = \sum_{\sigma \in \Lambda} L u_\sigma$$

mit dem Faktorensystem aus den Einheitswurzeln

$$\alpha_{\sigma,\tau} = \prod_v \beta(\bar{v}\sigma\overline{v\sigma}^{-1}, \overline{v\sigma}\tau\overline{v\sigma\tau}^{-1})^{v^{-1}},$$

worin v ein Vertretersystem von Λ mod Δ durchlaufe.

Aus dem Assoziativgesetz

$$\beta(S, T)^R \beta(R, ST) = \beta(R, S)\, \beta(RS, T)$$

folgt rechnerisch das entsprechende Assoziativgesetz

$$\alpha_{\sigma,\tau}^{\varrho}\, \alpha_{\varrho,\sigma\tau} = \alpha_{\varrho,\sigma}\, \alpha_{\varrho\sigma,\tau}.$$

Wir nennen nun $\mathfrak{a}$ die **Verlagerung** des verschränkten Produktes $\mathfrak{B}$.

Von den Eigenschaften des Verlagerungsprozesses, die in einer besonderen Arbeit hergeleitet werden sollen, interessiert hier nur die Tatsache

$$J(\mathfrak{B}) = J(\mathfrak{a}).$$

Es ist nun vorteilhafter, $\mathfrak{a}$ weiter zu untersuchen.

14. Formeln für die Invariante J. Über dem q-adischen Körper R_q ist der Kreiskörper L direktes Produkt eines rein verzweigten Körpers $V = R_q\left(\sqrt[q^\nu]{1}\right)$ mit einem unverzweigten zyklischen Körper W. Mit $\mathfrak{Q}$ bezeichnen wir die Gruppe der q^ν-ten Einheitswurzeln, und mit $\mathfrak{W}$ die Gruppe der Einheitswurzeln aus W. Dann ist $\mathfrak{Q}\mathfrak{W}$ die Gruppe der Einheitswurzeln aus L.

Die Galoissche Zuordnung sei gegeben durch

$$\begin{array}{ccccc} & & V & & \\ R_q & \langle & & \rangle & VW = L, \\ & & W & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & (\varphi) & & \\ \Lambda & \langle & & \rangle & 1. \\ & & \Gamma & & \end{array}$$

Hierbei sei φ der Frobenius-Automorphismus von VW/V, der also im Restklassenkörper die Wirkung $\alpha^\varphi \equiv \alpha^q \bmod \mathfrak{q}$ hat.

Im Fall $L = W$ ist $J = 0$, da bei unverzweigtem zyklischen Zerfällungskörper ein Faktorensystem aus Einheiten immer zerfällt.

Weiterhin setzen wir L als verzweigt voraus.

Wir verwenden die naheliegende Abkürzung

$$\alpha_{\Gamma,\sigma} = \prod_{\varrho \in \Gamma} \alpha_{\varrho,\sigma}.$$

Mit $[s]$ bezeichnen wir den Automorphismus von L/W, der die q^ν-ten Einheitswurzeln in die s-te Potenz erhebt, $(s, q) = 1$. Statt $u_{[s]}$ und $\alpha_{[s],[t]}$ wollen wir aber einfach u_s und $\alpha_{s,t}$ schreiben.

Die Berechnung von J gestaltet sich nun unterschiedlich, je nachdem V zyklisch ist oder nicht.

Satz 10. *Für $q \neq 2$, $h = q^{\nu-1}$ und $(s, q) = 1$ gilt im Restklassenkörper*

$$\alpha_{s,\varphi}^{h}\ \alpha_{\varphi,s}^{-h}\ \alpha_{\Gamma,s} \equiv s^m \bmod \mathfrak{q}. \tag{10}$$

Hieraus erhält man die Invariante

$$J = -\frac{m}{q-1} \bmod 1.$$

Satz 11. *Für $q = 2$ setze man*

$$u_{-1}^2 = \alpha, \quad u_\varphi u_{\mathfrak{z}} = \beta u_{\mathfrak{z}} u_\varphi, \quad u_\varphi u_{-1} = \gamma u_{-1} u_\varphi.$$

Dann gilt mit $w = (\mathfrak{W} : 1)$

$$(\alpha\beta\gamma^2)^w = (-1)^m. \tag{11}$$

Hieraus erhält man die Invariante

$$J = \frac{m}{2} \bmod 1.$$

Beweise. Sie erfolgen für beide Sätze zusammen und setzen sich aus mehreren Schritten zusammen.

A) Die linken Seiten von (10) mod $\mathfrak{q}$ bzw. von (11) sind invariant bei den Transformationen

$$u'_\sigma = \beta_\sigma u_\sigma, \qquad \beta_\sigma \in \mathfrak{Q}\mathfrak{W}$$
$$\alpha'_{\sigma,\tau} = \alpha_{\sigma,\tau} \beta_\sigma \beta_\tau^\sigma \beta_{\sigma\tau}^{-1}.$$

Für (10) folgt die Invarianz aus

$$\beta_\sigma^{[s]} \equiv \beta_\sigma, \ \beta_\sigma^\varphi = \beta_\sigma^q \bmod \mathfrak{q}, \ h(q-1) = (\Gamma : 1).$$

Bei (11) darf wegen des Exponenten w sogleich $\beta_\sigma \in \mathfrak{Q}$ angenommen werden mit

$$\beta_\sigma^\varphi = \beta_\sigma, \ \beta_\sigma^{[s]} = \beta_\sigma^s,$$

und dann sind sogar α und $\beta\gamma^2$ invariant.

B) Wir dürfen annehmen, daß die $\alpha_{\sigma,\tau}$ sämtlich $(q-1)$-te Potenzen sind (bzw. 4. Potenzen, falls $q = 2$). Um dies zu erreichen, brauchen wir nur alle $\sqrt[q-1]{\alpha_{\sigma,\tau}}$ bzw. $\sqrt[4]{\alpha_{\sigma,\tau}}$ zu $L = VW$ zu adjungieren und das Faktorensystem $\alpha_{\sigma,\tau}$ sinngemäß beizubehalten. Dabei wird nur W vergrößert (bzw. nur V, falls $q = 2$). In den Aussagen der Sätze 10 und 11 tritt hierbei keine Änderung ein.

C) Fall $\alpha_{\sigma,\tau} \in \mathfrak{W}$. Nach B) dürfen wir

$$u_s u_\varphi = \beta_s^{q-1} u_\varphi u_s, \qquad \beta_s \in \mathfrak{W}$$

annehmen. Das bedeutet wegen $\beta_s^\varphi = \beta_s^q$ die Vertauschbarkeit von $\beta_s u_s$ mit u_φ, also

$$(\alpha_{\sigma,\tau}, L) = (\alpha'_{s,t}\ V)\ (\alpha'', W, \varphi) \sim (\alpha'_{s,t}, V).$$

Für $q = 2$ zerfällt $(\alpha'_{s,t}, V)$ wegen $\mathfrak{W} \frown V = 1$, im Einklang mit Satz 11.

Für $q \neq 2$ ist $V = R_q\left(\sqrt[q^\nu]{1}\right)$ zyklisch. Zur Bestätigung von Satz 10 müssen wir zeigen, daß

$$(\alpha'_{s,t}, V) = \left(a^m, R_q\left(\sqrt[q^\nu]{1}\right)/R_q,\ \zeta \to \zeta^{a+q}\right)$$

$$\text{für } q \neq 2,\ \nu > 0,\ a = \text{primitive } \sqrt[q-1]{1},\ \zeta \in \mathfrak{Q}$$

die Invariante $J = -\dfrac{m}{q-1}$ hat.

Ohne Änderung der Invariante dürfen wir wegen $a = a^q$ nach einem Satz über zyklische verschränkte Produkte $\nu = 1$ setzen. Nun darf a multiplikativ um $(q-1)$-te Potenzen $\neq 0$ aus R_q abgeändert werden, also beliebig mod q wegen der q-adischen Konvergenz der Binomialreihe $(1+x)^{\frac{1}{q-1}}$ für $q \mid x$. Nach dem Satz von Dirichlet von der arithmetischen Progression kann a durch eine Primzahl $p > 0$ ersetzt werden, die also eine primitive Wurzel mod q ist.

Wir betrachten nun über dem Körper R der rationalen Zahlen das zyklische verschränkte Produkt

$$\left(p^m, R\left(\sqrt[q]{1}\right)/R,\ \zeta \to \zeta^p\right),$$

das an allen Stellen außer p und q zerfällt. An der Stelle p ist $\zeta \to \zeta^p$ der Frobenius-Automorphismus, also ist die hier auftretende Invariante nach der von Hasse gegebenen Definition $= \dfrac{m}{q-1}$. Da die Summe aller Invarianten $= 0$ mod 1 ist (Monodromiesatz), ist an der Stelle q die gesuchte Invariante $J = -\dfrac{m}{q-1}$. Damit ist der Fall $\alpha_{\sigma,\tau} \in \mathfrak{W}$ erledigt.

D) Fall $\alpha_{\sigma,\tau} \in \mathfrak{Q}$ und q ungerade. Für Satz 10 muß $J = 0$ gezeigt werden.

Für eine primitive Wurzel r mod q^ν ist $\mathfrak{Q}^{r-1} = \mathfrak{Q}$. Setzen wir daher

$$u_\varphi u_r = \beta^{r-1} u_r u_\varphi,$$

so besagt das, βu_φ ist mit u_r vertauschbar, also ist wieder

$$(\alpha_{\sigma,\tau}, L) = (\alpha'_{s,t}, V) \cdot (\alpha'', W, \varphi) \sim (\alpha'_{s,t}, V).$$

Nun ist $(\alpha'_{s,t}, V)$ für $\alpha'_{s,t} \in \mathfrak{Q}$ die Erweiterung einer Algebra über dem rationalen Körper R, deren Diskriminante eine Potenz von q ist. Die Stellen q und ∞ haben also dieselbe Invariante J, und zwar $J = 0$, denn reell erweitert zerfällt die Algebra, da $2 \nmid (\mathfrak{Q} : 1)$.

E) Fall $\alpha_{\sigma,\tau} \in \mathfrak{Q}$ und $q = 2$. Nach B) dürfen wir

$$u_\sigma u_5 = \beta_\sigma^4 u_5 u_\sigma \qquad (\beta_\sigma \in \mathfrak{Q},\ \beta_5 = 1)$$

annehmen, d. h. $\beta_\sigma u_\sigma$ ist mit u_5 vertauschbar. Nach A) dürfen wir sogleich annehmen, daß alle u_σ, folglich auch alle $\alpha_{\sigma,\tau}$, die sich ja hierdurch ausdrücken lassen, mit u_5 vertauschbar sind. Daher ist $\alpha_{\sigma,\tau}^{5-1} = 1$. In Satz 11 ist jetzt $\beta = 1$.

Ist nun $\gamma = i^\mu$, $(i = \sqrt{-1})$, so erweist sich

$$u'_\varphi = (1-i)^\mu u_\varphi$$

als mit u_{-1} vertauschbar, außerdem natürlich mit u_5 und den Elementen von V. Mit $f = (W : R_2)$ ist daher

$$(\alpha_{\sigma,\tau}, VW) = (\alpha_{s,t}, V) \cdot ((1-i)^{\mu f}, W, \varphi).$$

Hier muß $(1-i)^{\mu f}$ in R_2 liegen, also ist μf gerade.

Der rechte Faktor hat definitionsgemäß die Invariante $\dfrac{\mu}{2}$, zerfällt also genau für $\gamma^2 = 1$.

Der linke Faktor kann ähnlich wie in D) als 2-adische Erweiterung einer Algebra über dem rationalen Körper R betrachtet werden, deren Diskriminante eine Potenz von 2 ist, die folglich an den Stellen 2 und ∞ dieselbe Invariante hat. Diese Algebra zerfällt daher genau für $\alpha = \alpha_{-1,\,-1} = 1$.

F) Die multiplikative Zusammenfassung der Fälle C), D), E) vollendet den Beweis der Sätze 10 und 11.

In vielen Fällen ist der folgende Satz von Nutzen:

Satz 12. *Eine* $\mathfrak{q}$*-adische Kreisalgebra zerfällt, wenn ihr Zentrum die* q*-ten Einheitswurzeln bzw. für* $q = 2$ *die vierten Einheitswurzeln enthält* $(\mathfrak{q} \mid q)$.

Beweis. Man schließt im Prinzip wie vorhin, allerdings mit wesentlichen Erleichterungen. An die Stelle des rationalen Körpers R tritt hier der Körper

$$\bar{R} = R\left(\sqrt[q]{1}\right) \text{bzw. } R\left(\sqrt[4]{1}\right).$$

Wir bilden zunächst die Verlagerung nach $\bar{R}_q$. Hierüber ist wieder $L = VW$, und V und W sind zyklisch mit den erzeugenden Automorphismen $[r]$, φ. Dabei kann $r = 5$ für $q = 2$ genommen werden. Im übrigen halten wir uns an dieselben Bezeichnungen wie vorhin.

Wir dürfen wie vorhin in B) annehmen, daß das Faktorensystem $\alpha_{\sigma,\tau}$ aus $(q-1)$-ten bzw. 4. Potenzen besteht. In den Fällen C), D), E) folgt wieder genau so, daß u_r mit u_φ vertauschbar gedacht werden darf, also

$$(\alpha_{\sigma,\tau}, L) = (\alpha'_{s,t}, V) \cdot (\alpha'', W, \varphi) \sim (\alpha'_{s,t}, V).$$

Für $\alpha'_{s,t} \in \mathfrak{W}$ zerfällt die rechte Seite, da $(\mathfrak{W} : 1)$ und $(V : \bar{R}_q)$ teilerfremd sind.

Für $\alpha'_{s,t} \in \mathfrak{Q}$ kann die rechte Seite als Erweiterung einer Algebra über $\bar{R}$ angesehen werden, deren Diskriminante eine Potenz von $\mathfrak{q}$ ist. Auch diesmal zerfällt die rechte Seite, und zwar nach dem Monodromiesatz im total imaginären Körper $\bar{R}$.

Eingegangen 10. Oktober 1951.

Berichtigungen

Im Inhaltsverzeichnis von Band 185 ist zu ändern:

Seite

Stöhr, Alfred, Bemerkungen zur additiven Zahlentheorie. II 56

Im Inhaltsverzeichnis von Band 186 ist zusätzlich einzufügen:

Nehring, O., Über ein Dreiecksproblem 70

Inhaltsverzeichnis der Bände 181—190

	Band	Seite
Aigner, Alexander (*Graz*) und **Hans Reichardt** (*Leipzig*), Stufenreihen im Potenzrestcharakter	184.	158—160
Ancochea, G. (*Salamanca*), Le théorème de von Staudt en géométrie projective quaternionienne	184.	193—198
Arf, Cahit (*Göttingen*), Untersuchungen über reinverzweigte Erweiterungen diskret bewerteter perfekter Körper	181.	1—44
— —, (*Istanbul*), Untersuchungen über quadratische Formen in Körpern der Charakteristik 2. (Teil I.)	183.	148—167
Armsen, Paul (*Erlangen*), Über die Strahlenbrechung an einer einfachen Sammellinse. I	187.	193—221
— —, Über die Strahlenbrechung an einer einfachen Sammellinse. II	188.	65—73
— —, Verallgemeinerungen von Sequenzen in Permutationen	189.	77—99
Bachmann, Friedrich (Marburg/*L.*), Die Bewegungsgruppe einer ebenen Cayleyschen Geometrie	181.	242—252
Baer, Reinhold (*Urbana*), Klassifikation der Gruppenerweiterungen	187.	75—94
Beck, H. (*Bonn*), Eine Klasse volumentreuer Transformationen	184.	1—11
Belck, Hans-Boris (*Frankfurt/M.*), Reguläre Faktoren von Graphen	188.	228—252
Bergmann, G. (*Münster*), Periodische Ketten linearer Transformationen	190.	108—124
Bergström, Harald (*Uppsala*), Die Klassenzahlformel für reelle quadratische Zahlkörper mit zusammengesetzter Diskriminante als Produkt verallgemeinerter Gaußscher Summen	186.	91—115
Bitterlich-Willmann, Johann (*Prag*), Eine Verallgemeinerung der Fermatschen Vermutung	183.	251—252
Braun, Hel (*Göttingen*), Geschlechter quadratischer Formen	182.	32—49
Braunschmidt, Otto (*München*), Über Interpolation	185.	14—55
Brödel, Walter (*Jena*), Über die Nullstellen der Weierstraßschen $\wp$-Funktion	187.	189—192
Buckel, Walter (*Nördlingen*), Über eine Verallgemeinerung der Dupinschen Indikatrix	185.	144—191
Burger, E. (*Frankfurt/M.*), Über Gruppen mit Verschlingungen	188.	193—200
Chung, Kai-Lai (*Kunming*), A generalization of an inequality in the elementary theory of numbers	183.	193—196
Delvendahl, Otto (*Breslau*), Die Singularitäten der Elementarkurven	182.	54—59
Denk, Franz und **Otto Haupt** (*Erlangen*), Über die Singularitäten reeller Bogen im R_n	183.	69—91
— — —, Über gewöhnliche und signierte Permutationen	186.	170—183
— — —, Über die Windungsmonotonie der Elementarbogen im $R^{(n)}$	187.	95—108
Deuring, Max (*Jena*), Arithmetische Theorie der Korrespondenzen algebraischer Funktionenkörper. II	183.	25—36
Dieudonné, J. (*Nancy*), Sur les systèmes hypercomplexes	184.	178—192
— —, Matrices semi-finies et espaces localement linéairement compacts	188.	162—166
Egerváry, Eugen (*Budapest*), Über ein räumliches Analogon des Sehnenvierecks	182.	122—128
Eichler, Martin (*Göttingen*), Zur numerischen Lösung von Gleichungen mit reellen Koeffizienten	184.	124—128
— —, (*z. Zt. Darmstadt*), Bemerkungen zu den vorstehenden Vermutungen von Teichmüller	185.	12—13
Epheser, Helmut (*Hannover*), Konforme Abbildung einfach zusammenhängender Gebiete, die von Bögen konzentrischer logarithmischer Spiralen berandet sind	187.	131—152
Franz, Wolfgang (*Frankfurt/M., z. Zt. Berlin*), Abbildungsklassen und Fixpunktklassen dreidimensionaler Linsenräume	185.	65—77
Gaschütz, Wolfgang (*Kiel*), Zur Erweiterungstheorie der endlichen Gruppen	190.	93—107
George, Erich (*Schneidemühl*), Wurzeln singulärer Punkte in regulären Kurvenscharen	184.	238—252
Grün, O. (*Berlin*), Zusammenhang zwischen Potenzbildung und Kommutatorbildung	182.	158—177
— —, Beiträge zur Gruppentheorie. II	186.	165—169
Grüss, Gerhard (*Freiberg/Sa.*), Zur anschaulichen Geometrie der Tangentenfläche einer Raumkurve	184.	65—76
Haacke, Wolfhart (*Braunschweig*), Die stabilen Lagen eines ebenen n-fachen Pendels mit vertikal periodisch erschüttertem Aufhängepunkt	190.	51—64
Hadwiger, H. (*Bern*), Über eine Mittelwertformel für Richtungsfunktionale im Vektorraum und einige Anwendungen	185.	241—252
Haenzel, G. (*Karlsruhe*), Die Polarentheorie des linearen Strahlenkomplexes und seiner Strahlenkongruenzen	181.	45—60

	Band	Seite
Haenzel, G. (*Karlsruhe*), Die Diracsche Wellengleichung und das Ikosaeder	183.	232—242
— — und **F. Reutter** (*Karlsruhe*), Die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz. IV. Über algebraische Regelflächen vom Grade $2n$ mit zwei n-fachen Leitgeraden ($n = 3, 4, 5, 6$)	185.	78—101
Hall, P. (*Cambridge*), The classification of prime-power groups	182.	130—141
— —, Verbal and marginal subgroups	182.	156—157
— —, On groups of automorphisms	182.	194—204
— —, The construction of soluble groups	182.	206—214
Hasse, Helmut (*Berlin*), Kurt Hensel zum Gedächtnis	187.	1—13
— —, Invariante Kennzeichnung galoisscher Körper mit vorgegebener Galoisgruppe	187.	14—43
— —, Zum Existenzsatz von Grunwald in der Klassenkörpertheorie	188.	40—64
Haupt, Otto und **Georg Nöbeling** (*Erlangen*) und **Christian Pauc** (*Paris*), Über Abhängigkeitsräume	181.	193—217
— — — — —, Sekanten und Paratingenten in topologischen Abhängigkeitsräumen	182.	105—121
— —, Raumbogen mit Punkten von beliebig vorgegebenem linearen Ordnungswert	184.	77—90
— —, Über Kontinua mit unvollständigen lokalen Halbsekantenmengen	185.	231—240
— —, Über einen Eindeutigkeitssatz für gewisse Funktionalgleichungen	186.	58—64
— —, Über die kombinatorische Mindestordnung signierter Permutationen	186.	221—229
— —, s. Denk, Franz und Otto Haupt		
Hlawka, Edmund (*Wien*), Über Gitterpunkte in Parallelepipeden	187.	246—248
Hornich, Hans (*Graz*), Zur Lösbarkeit von gewissen elliptischen Differentialgleichungen	189.	204—206
Jaeckel, Karl (*Hannover*), Über die Eigenlösungen gewisser Integralgleichungen der Potentialtheorie	189.	141—149
Jaeger, Arno (*Ibadan*), Eine algebraische Theorie vertauschbarer Differentiationen für Körper beliebiger Charakteristik	190.	1—21
Jonas, Hans (*Berlin*), Mit einem beliebigen Paare von Flächen gleichen konstanten Krümmungsmaßes verknüpfte räumliche Beziehungen	186.	193—220
— —, Die allgemeinen äquidistanten Transformationen der von Bianchi entdeckten isometrischen Paare Tschebyschefscher Netze	189.	207—237
Jung, Heinrich W. E. (*Halle/S.*), Zur Theorie der algebraischen Funktionen zweier Veränderlicher. II	181.	68—82
— —, Zur Theorie der algebraischen Funktionen zweier Veränderlicher. III	181.	125—132
— —, Über ganze birationale Transformationen der Ebene	184.	161—174
— —, Rationale und halbrationale Doppelebenen	184.	199—237
Kaluza jun., Theodor (*Braunschweig*), Untersuchung fastperiodischer Funktionen mittels äquidistanter Zahlenmengen	181.	153—176
Kanold, Hans-Joachim (*Breslau*), Untersuchungen über ungerade vollkommene Zahlen	183.	98—109
— (*Augsburg*), Verschärfung einer notwendigen Bedingung für die Existenz einer ungeraden vollkommenen Zahl	184.	116—123
— —, Folgerungen aus dem Vorkommen einer Gaußschen Primzahl in der Primfaktorenzerlegung einer ungeraden vollkommenen Zahl	186.	25—29
— (*Heidelberg*), Sätze über Kreisteilungspolynome und ihre Anwendungen auf einige zahlentheoretische Probleme. I	187.	169—182
— —, Eine Bemerkung zur Verteilung der r-ten Potenznichtreste einer ungeraden Primzahl	188.	74—77
— —, Sätze über Kreisteilungspolynome und ihre Anwendungen auf einige zahlentheoretische Probleme. II	188.	129—146
— (*Gießen*), Über ein spezielles System von zwei diophantischen Gleichungen	189.	243—245
Kasch, Friedrich (*Münster*), Über den Satz vom primitiven Element bei Schiefkörpern	189.	150—159
Keller, Ott-Heinrich (*Berlin*), Zu einem Satze von H. W. E. Jung über ganze birationale Transformationen der Ebene	186.	78—79
Klobe, W. (*Erfurt*), Über eine untere Abschätzung der n-ten Kreisteilungspolynome $g_n(z) = \prod_{d/n} (z^d - 1)^{\mu\binom{n}{d}}$	187.	68—69
Kneschke, A. (*Meerane*), Theorie der genäherten Quadratur	187.	115—128
Kneser, Hellmuth (*Tübingen*), Reelle analytische Lösungen der Gleichung $\varphi(\varphi(x)) = e^x$ und verwandter Funktionalgleichungen	187.	56—67
Knopp, K. (*Tübingen*), Beweis eines von I. Schur in der Theorie der C-Summierbarkeit aufgestellten Satzes	187.	70—74
von Koppenfels, Werner (*Würzburg*), Konforme Abbildung besonderer Kreisbogenvierecke	181.	83—124
Kowalewski, Gerhard (*Prag*), Zur Cesàro-Pickschen Geometrie	181.	218—241
— —, Zur natürlichen Geometrie der irreduziblen G_6 von Berührungstransformationen	183.	243—250

	Band	Seite
Kowalewski, Gerhard (*Prag*), Neues Beispiel einer genetisch darstellbaren Berührungstransformation	185.	102—105
— —, Räumliche Mercatorkoordinaten	186.	65—69
Kretschmer, Annemarie (*Jena*), Die projektiven Involutionen des n-dimensionalen Raumes	186.	241—253
Kropp, Gerhard (*Berlin*), Lalouvères Quadratura circuli	189.	1—76
Krull, Wolfgang (*Bonn*), Über separable, abgeschlossene Abelsche Gruppen	182.	235—241
— —, Über separable, insbesondere kompakte separable Gruppen	184.	19—48
— —, Zur Arithmetik der endlichen diskreten Hauptordnungen	189.	118—128
— —, Über geschlossene Bewertungssysteme	190.	75—92
Lemke, H. (*Berlin*), Über die Gleichung der Gaskugeln und andere Differentialgleichungen von ähnlicher Form	183.	197—231
Löwig, H. F. J. (*Hobart*), Bemerkung zu den Primquotienten eines distributiven Verbandes	190.	49—50
— —, On the properties of freely generated algebras	190.	65—74
Lorenzen, P. (*Bonn*), Ein vereinfachtes Axiomensystem für Gruppen	182.	50
Ludwig, Konrad (*Hannover*), Die der transversalen Mercatorkarte der Kugel entsprechende Abbildung des Rotationsellipsoids	185.	193—230
Lyra, Gerhard (*Göttingen*), Über eine Konvergenzfrage bei der Auflösung linearer Differentialgleichungen in der Umgebung einer Stelle der Bestimmtheit	189.	238—242
Maak, Wilhelm (*München*), Integralmittelwerte von Funktionen auf Gruppen und Halbgruppen	190.	34—48
Magnus, Wilhelm (*Berlin*), Über Gruppen und zugeordnete Liesche Ringe	182.	142—149
— und **F. Oberhettinger** (*Göttingen*), Über einige Randwertprobleme der Schwingungsgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ im Falle ebener Begrenzungen	186.	184—192
Mohr, Ernst (*Breslau*), Über die Kräfte und Momente, welche Singularitäten auf eine stationäre Flüssigkeitsströmung übertragen	182.	65—104
— —, Beweis des sogenannten Fundamentalsatzes der Algebra im reellen Gebiete	184.	175—177
— (*Berlin*), Die Konstruktion der Greenschen Funktion im erweiterten Sinne	189.	129—140
— —, Nachtrag zu meiner Arbeit: Beweis des sogenannten Fundamentalsatzes der Algebra im reellen Gebiete	189.	250—252
Moriya, Mikao (*Sapporo*), Über die Divisorenklassen nullten Grades in einem abstrakten elliptischen Funktionenkörper	181.	61—67
v. Sz. Nagy, Gyula (Julius) (*Szeged*), Über die Kurven n-ter Ordnung im projektiven q-dimensionalen Raum für $n < 2q$	183.	1—8
— (*Kolozsvár*), Zur Theorie der Flächen vom Maximalindex	183.	129—147
— —, Kurven vom Maximalindex in mehrdimensionalen projektiven Räumen	186.	30—39
— —, Algebraische Kurven vom Maximalindex im mehrdimensionalen Raum	186.	40—48
Nakayama, Tadasi (*Nagoya*), On construction and characterization of Galois algebras with given Galois groups	189.	100—117
Nehring, O. (*Bitterfeld*), Zyklische Projektionen im Dreieck	184.	129—137
— —, Über ein Dreiecksproblem	186.	70—77
Neumer, Walter (*Worms*), Die dreigliedrigen Berührungstransformationsgruppen der Ebene, welche keine Invariante erster Ordnung besitzen. I	181.	133—152
— —, Die dreigliedrigen Berührungstransformationsgruppen der Ebene, welche keine Invariante erster Ordnung besitzen. II	182.	1—31
Niedermeier, Franz (*München*), Ein elementarer Beitrag zur Fermatschen Vermutung	185.	111—112
Nöbeling, Georg (*Erlangen*), Geometrische (Realitäts)-Ordnung und topologische Struktur	183.	37—67
— —, Über die topologische Struktur der rektifizierbaren Kontinuen	184.	91—115
— —, Ein gemeinsamer Beweis für den Jordanschen Kurvensatz und zwei damit zusammenhängende Sätze	188.	22—39
— —, s. Haupt, Otto und Georg Nöbeling und Christian Pauc.		
Noether, Emmy†, Idealdifferentiation und Differente	188.	1—21
Oberhettinger, F., s. Magnus, W. und F. Oberhettinger.		
Ohmann, D. (*Frankfurt/M.*), Eine Abschätzung für die Dicke bei Überdeckung durch konvexe Körper	190.	125—128
Ostmann, Hans-Heinrich (*Breslau*), Gegenbeispiel zu einer Frage über Basismengen der additiven Zahlentheorie	185.	63—64
— (*Marburg*), Verfeinerte Lösung der asymptotischen Dichtenaufgabe	187.	183—188
— —, Über die Anzahl der Elemente von Summenmengen	187.	222—230
— (*Berlin*), Euklidische Ringe mit eindeutiger Partialbruchzerlegung	188.	150—161

Band Seite

Pauc, Christian (*Berlin*), Über ebene Punktmengen, welche überall einen Sektor von gegebener Größe freilassen . . . . . 185. 127—128
—, s. Haupt, Otto und Georg Nöbeling und Christian Pauc.
Perron, Oskar (*München*), Über die Berechnung der Grundeinheit in reellen quadratischen Körpern und Ringen . . . . . 185. 106—110
Pickert, Günter (*Tübingen*). Komposita transzendenter Körpererweiterungen . . . . . 187. 234—245
Rédei, L. (*Budapest*), Über den Euklidischen Algorithmus in reellquadratischen Zahlkörpern . . . 183. 183—192
— (*Szeged*), Über die Klassengruppen und Klassenkörper algebraischer Zahlkörper . . . . . 186. 80—90
— —, Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie . . . . . 188. 201—227
Reeb, G. (*Strasbourg*), Sur les éléments de contact linéaires du second ordre attachés à un système différentiel . . . . . 189. 186—189
Reichardt, Hans (*Leipzig*), Einige im Kleinen überall lösbare, im Großen unlösbare diophantische Gleichungen . . . . . 184. 12—18
— —, s. Aigner, Alexander und Hans Reichardt.
Reutter, F., s. Haenzel, G. und F. Reutter.
Ringel, Gerhard (*Bonn*), Farbensatz für nichtorientierbare Flächen beliebigen Geschlechtes . . . . 190. 129—147
Roquette, Peter (*Hamburg*), Arithmetische Untersuchung des Charakterringes einer endlichen Gruppe 190. 148—168
Rosenfeldt, Kurt (*Halle/S.*), Über algebraische Flächen mit Büscheln elliptischer Kurven . . . . 182. 51—53
Sade, Albert (*Marseille*), Omission dans les listes de Norton pour les carrés 7 · 7 . . . . . 189. 190—191
Schilling, Bernhard (*Dresden*), Methoden zur numerischen Auswertung unendlicher Reihen mit reellen, konstanten Gliedern . . . . . 181. 177—192
Schmeidler, Werner (*Berlin*), Über ein zweidimensionales Analogon einer Formel der Integralrechnung 183. 175—182
— —, Über Integralgleichungen erster Art mit beschränkter Kernmatrix . . . . . 186. 16—24
— —, Über unbeschränkt iterierbare Operatoren . . . . . 187. 109—114
Schmidt, Adam (*Jena*), Lineare partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . 189. 160—167
Schmidt, Arnold (*Göttingen*), Über die Bewegungsgruppe der ebenen elliptischen Geometrie . . . . 186. 230—240
Schmidt, Robert (*München*), Zusammenhänge zwischen Differenzenquotienten und Derivierten von stetigen Funktionen . . . . . 188. 112—114
Schneider, Theodor (*Göttingen*), Zur Theorie der Abelschen Funktionen und Integrale . . . . . 183. 110—128
— —, Zur Annäherung der algebraischen Zahlen durch rationale . . . . . 188. 115—128
Schöneborn, Heinz (*Bonn*), Über Linearformenmoduln unendlichen Ranges. I . . . . . 189. 168—185
— —, Über Linearformenmoduln unendlichen Ranges. II . . . . . 189. 193—203
Scholz, Arnold (*Kiel*), Zur Abelschen Durchkreuzung 182. 216
— —, Totale Normenreste, die keine Normen sind, als Erzeuger nichtabelscher Körpererweiterungen. II . . . . . 182. 217—234
— —, † Zur Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern . . . . . 185. 113—126
Specht, Wilhelm (*Breslau*), Darstellungstheorie der endlichen Gruppen . . . . . 182. 242—248
Speiser, Andreas (*Zürich*), Gruppen aus der Klassenkörpertheorie . . . . . 182. 178—179
Sprague, R. (*Berlin*), Über die Zerlegung von Rechtecken in lauter verschiedene Quadrate . . . . 182. 60—64
Stöhr, Alfred (*Berlin*), Bemerkungen zur additiven Zahlentheorie. I . . . . . 183. 168—174
— —, Über zweifach geordnete Mengen und Zerlegungen in Rechtecke. I . . . . . 184. 138—157
— —, Bemerkungen zur additiven Zahlentheorie. II . . . . . 185. 56—62
— —, Oszillationstheoreme für die Eigenvektoren spezieller Matrizen . . . . . 185. 129—143
Strubecker, Karl, Über die parataktische Abbildung der Flächenelemente des isotropen Raumes auf Punktepaare einer Ebene . . . . . 186. 129—164
Süss, Wilhelm (*Freiburg/Br.*), Eichflächenprinzipien in der projektiven Flächentheorie . . . . . 188. 100—111
Suetuna, Zyoiti (*Tokyo*), Über die sich selbst assoziierten Charaktere der symmetrischen Gruppe 183. 92—97
Szele, Tibor (*Debrecen*), Ein Analogon der Körpertheorie für abelsche Gruppen . . . . . 188. 167—192
Teichmüller, Oswald (*z. Zt. Norwegen*), Drei Vermutungen über algebraische Funktionenkörper . . 185. 1—11
— (*Berlin*), Über die partielle Differentiation algebraischer Funktionen nach einem Parameter und die Invarianz einer gewissen Hauptteilsystemklasse . . . . . 186. 49—57
Tietz, Horst (*Marburg*), Eine Rekursionsformel der Faberschen Polynome 189. 192
— —, Beweis der Konvergenz eines Verfahrens von W. Bartky zur Berechnung von bestimmten Integralen . . . . . 189. 246—249
— (*Braunschweig*), Fabersche Entwicklungen auf geschlossenen Riemannschen Flächen . . . . . 190. 22—33

	Band	Seite
Tietze, Heinrich (*München*), Komprimierte Gitterpunktmengen und eine additiv-zahlentheoretische Aufgabe	184.	49—64
— —, Über Frenetsche Formeln, Poinsotsche Bewegungen und Gramsche Determinanten	186.	116—128
Vietoris, L. (*Innsbruck*), Zur Kennzeichnung des Sinus und verwandter Funktionen durch Funktionalgleichungen	186.	1—15
Voderberg, H. †, Neue Beiträge zur ersten Hauptaufgabe der Geodäsie für eine Drehfläche, insbesondere das Erdsphäroid	187.	153—168
Volkmann, Bodo (*Mainz*), Über Klassen von Mengen natürlicher Zahlen	190.	199—230
van der Waerden, B. L. (*Leipzig*), Bericht über die Arbeit von H. Fitting: Beiträge zur Theorie der Gruppen endlicher Ordnung	182.	215
Wendelin, Hermann (*Graz*), Zwei Verästelungssätze	187.	231—233
— —, Untersuchungen zur Mengenalgebra	188.	78—99
— —, Ein Vergleichskriterium für Ausdrücke in Booleschen Verbänden und einige Anwendungen	188.	147—149
Wever, Franz (*Göttingen*), Operatoren in Lieschen Ringen	187.	44—55
Wielandt, Helmut (*Tübingen*), p-Sylowgruppen und p-Faktorgruppen	182.	180—193
Witt, Ernst (*Hamburg*), Die Automorphismengruppen der Cayleyzahlen	182.	205
— —, Die algebraische Struktur des Gruppenringes einer endlichen Gruppe über einem Zahlkörper	190.	231—245
Zacharias, Max (*Berlin*), Bemerkungen zu der Arbeit von O. Nehring „Über ein Dreiecksproblem"	187.	129—130
Zassenhaus, Hans (*Hamburg*), Darstellungstheorie nilpotenter Lie-Ringe bei Charakteristik $p > 0$	182.	150—155
Ziegenbein, P. (*Göttingen*), Konfigurationen in der Kreisgeometrie	183.	9—24
Zulauf, Achim (*Mainz*), Beweis einer Erweiterung des Satzes von Goldbach-Vinogradov	190.	169—198
Ergänzung eines Zitates in der Arbeit: Haupt-Nöbeling-Pauc, Über Abhängigkeitsräume (dieses Journal Band 181)	183.	68
Ergebnis des 10. wissenschaftlichen Wettbewerbs der Gesellschaft für Zeitmeßkunde und Uhrentechnik EV.	183.	68
Ernst-Schröder-Preisaufgabe	185.	192
Vortragswoche über Gruppentheorie, Göttingen 1939	182.	129